

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

для поступающих в магистратуру

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln \operatorname{ch} x)$.
2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость при всех значениях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} x^\alpha \sin(e^x) dx$.
3. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin k}{k + \sin x}$ на множестве $x \in \mathbb{R}$.
4. Функцию $f(x, y) = |xy|$ исследовать на дифференцируемость в \mathbb{R}^2 .
5. Для задачи на условный экстремум функции $f(x, y) = x^2 + y$ при условии $x + y^2 = \frac{3}{4}$ найти стационарные точки функции Лагранжа и проверить в них достаточные условия локального условного экстремума второго порядка.
6. Вычислить поверхностный интеграл $\int_S z dS$, где поверхность $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z = x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$.
7. Найти общее решение дифференциального уравнения $(2x + 1)y''(x) + 4xy'(x) - 4y(x) = 0$ на множестве $x > 0$.
8. Пусть \mathcal{E} — вещественное евклидово пространство многочленов степени не выше второй со скалярным произведением $\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)y(t) dt$. Вычислить расстояние в \mathcal{E} от многочлена $x(t) = t^2$ до подпространства M всех многочленов степени не выше первой.
9. Применяя теорию вычетов, найти интеграл $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\sin \frac{1}{z}}$.
10. Решить задачу Коши для волнового уравнения в \mathbb{R}^2
$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + ty^2, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = x^2y, \quad u_t|_{t=0} = xy.$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

для поступающих в магистратуру

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} \right)$.
2. Исследовать на сходимость при всех значениях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^\alpha} dx$.
3. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{k}}{x+k}$ на множествах $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$.
4. Функцию $f(x, y) = |y| \sin x$ исследовать на дифференцируемость в \mathbb{R}^2 .
5. Для задачи на условный экстремум функции $f(x, y) = x^2 + y$ при условии $x^2 + y^2 = 1$ найти стационарные точки функции Лагранжа и проверить в них достаточные условия локального условного экстремума второго порядка.
6. Вычислить поверхностный интеграл $\int_S xy dS$, где поверхность $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, z^2 = x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$.
7. Найти общее решение дифференциального уравнения $x^2 y''(x) \ln x - xy'(x) + y(x) = 0$ на множестве $x \in (0, 1)$.
8. В двумерном вещественном евклидовом пространстве \mathcal{E} базис $e = \{e_1, e_2\}$ имеет матрицу Грама $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, подпространство $M = \operatorname{Lin}\{e_1 - e_2\}$. Найти базис в ортогональном дополнении M^\perp и матрицу преобразования ортогонального проектирования на M в базисе e .
9. Применяя теорию вычетов, найти интеграл $\oint_{|z|=1} \frac{z dz}{\left(\cos \frac{1}{z}\right)^2}$.
10. Решить задачу Коши для волнового уравнения в \mathbb{R}^2
$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + tx^2, \quad t > 0,$$
$$u|_{t=0} = y^2, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

для поступающих в магистратуру

1. Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $x + 2y - 3z + 1 = 0$ и равноотстоящей от точек $A(0; 1; 0)$ и $B(2; 1; 4)$. Система координат ортогональная.

2. При всех возможных значениях λ найти решения системы

$$\begin{cases} 2x - y - 5z = 3, \\ -x + 2y + z = \lambda, \\ -x + y + 2z = 3. \end{cases}$$

3. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\ln x}.$$

4. Найти условный экстремум функции $z = 2x - 8y + 7$ относительно уравнения связи $x^2 + 2y^2 = 1$.

5. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x + 2)^n.$$

6. Вычислить объём заданной области

$$\Omega = \left\{ (x, y) \mid x > 0; y > 0; 1 < x^2 + y^2 < 3; 0 < z < \frac{2x + 3y}{x^2 + y^2} \right\}.$$

7. Найти площадь части поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$, расположенной в первом квадранте и внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 1$.

8. Разложить функцию $f(x) = \pi - |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$, в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 2π . Выяснить, является ли ряд равномерно сходящимся. Ответ обосновать.

9. Найти все действительные решения уравнения

$$y'' - 4y = 8e^{2x}.$$

10. Монету бросают пять раз. Найти вероятность того, что “герб” выпадет не более двух раз.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

для поступающих в магистратуру

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$.
2. Исследовать на сходимость при всех значениях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^\alpha} dx$.

3. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x + k^2}{x + 2^k}$ на множествах $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$.

4. Функцию $f(x, y) = x|y|$ исследовать на дифференцируемость в \mathbb{R}^2 .
5. Для задачи на условный экстремум функции $f(x, y) = x^2 + y$ при условии $x^2 + y^2 = 1$ найти стационарные точки функции Лагранжа и проверить в них достаточные условия локального условного экстремума второго порядка.

6. Вычислить поверхностный интеграл $\int_S z dS$, где поверхность

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, z^2 = x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

7. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''(x) - y(x) = \sin x$$

на множестве $x \in \mathbb{R}$.

8. Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования двумерного линейного пространства L , матрица которого в базисе $\{e_1, e_2\}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Применяя теорию вычетов, найти интеграл $\oint_{|z|=2} \frac{z dz}{z+1}$.

10. Решить задачу Коши

$$u_{xy} = 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R},$$

$$u|_{x=y} = x, \quad u_y|_{x=y} = 0.$$

Задачи для поступающих в магистратуру

1. Вычислить предел функции одного вещественного переменного в точке.
2. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость при всех значениях параметра несобственный интеграл.
3. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд на заданном множестве.
4. Исследовать функцию двух вещественных переменных на дифференцируемость в каждой точке ее области определения.
5. В классической задаче на условный экстремум для функции нескольких вещественных переменных найти стационарные точки функции Лагранжа и проверить в них достаточные условия локального условного экстремума второго порядка.
6. Вычислить поверхностный интеграл первого или второго рода.
7. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.
8. В конечномерном вещественном евклидовом пространстве вычислить расстояние от заданного вектора до заданного подпространства.
9. Применяя теорию вычетов, найти комплексный интеграл по замкнутой ориентированной кривой.
10. Решить задачу Коши для волнового уравнения на плоскости.

На решение этих задач отводится четыре астрономических часа.