

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

для поступающих в магистратуру в 2011 году

по специальности «Прикладная математика и физика»

1. ② Найдите уравнение плоскости, точки которой одинаково удалены от точек $A(3,1,5)$ и $B(-5,3,7)$. Система координат декартова прямоугольная.

2. ② Найдите характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$.

3. ④ Найдите асимптоты, координаты точек экстремума, промежутки выпуклости вверх и вниз, постройте график функции $y = \frac{2x^2 + x + 1}{1 + x}$.

4. ③ Вычислите интеграл $\int e^{2x} \cos e^x dx$.

5. ④ Вычислите $\iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$, где S - внешняя сторона поверхности $\{x^2 - 2x + y^2 = 0, -1 \leq z \leq 1\}$.

6. ④ Напишите формулы для нахождения коэффициентов разложения функции $f(x) = x$ при $x \in [0; 1]$ в ряд Фурье по системе $\{\sin \pi x, \dots, \sin \pi k x, \dots\}$. Не вычисляя коэффициентов ряда, постройте график его суммы $S(x)$. Найдите $S(6)$. Определите, сходится ли ряд равномерно на $(-\infty; +\infty)$. Ответ обосновать.

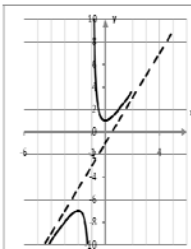

7. ③ Найдите общее решение дифференциального уравнения $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 2x$.

8. ④ Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x} = x + 9y, \\ \dot{y} = -x - 5y. \end{cases}$

9. ④ Применяя теорию вычетов, вычислите интеграл $\oint_{|z+1|=\frac{3}{2}} \frac{\sin z}{z^2 \operatorname{ch} z} dz$ (обход контура совершается против часовой стрелки).

10. ④ Решите задачу Коши $u_{tt} = 9u_{xx}$, $u|_{t=0} = \sin x$, $u_t|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Ответы к варианту **115** для поступающих в магистратуру в 2011 году по специальности «Прикладная математика и физика»

1.	$4x - y - z + 12 = 0$
2.	$\lambda_1 = 1, \mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};$ $\lambda_2 = 13, \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$
3.	<p>Асимптоты: $x = -1; y = 2x - 1$</p> <p>Экстремумы: $(-2; -7)$ -max, $(0; 1)$ - min</p> <p>Выпукла вниз при $x > -1$, выпукла вверх при $x < -1$</p> 
4.	$e^x \sin e^x + \cos e^x + C$
5.	4π
6.	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi k} \sin \pi k x,$ $a_0 = 0, a_k = 0, b_k = 2 \int_0^1 x \sin \pi k x dx$ <p>$S(6) = f(0) = 0$ Ряд сходится неравномерно</p> 
7.	Общее решение: $y(x) = -x \ln x + C_1 x + C_2 x^3$
8.	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \left[t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{-2t}$
9.	$2\pi i$ $I = 2\pi i \operatorname{res}_0 f(z)$ $\operatorname{res}_0 f(z) = 1$
10.	$u(x, t) = \frac{\sin(x + 3t) + \sin(x - 3t)}{2} + \frac{1}{6} \int_{x-3t}^{x+3t} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} =$ $\frac{\sin(x + 3t) + \sin(x - 3t)}{2} + \frac{\arcsin(x + 3t) - \arcsin(x - 3t)}{6}$