Московский физико-технический институт
(государственный университет)

О.В. Бесов

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

Учебно-методическое пособие

Москва, 2004

Составитель О.В.Бесов

УДК 517.

Тригонометрические ряды Фурье.
Учебно-методическое пособие (для студентов 2-го курса).
МФТИ. М., 2004. 31 с.

В соответствии с программой кафедры высшей математики МФТИ излагаются начальные сведения по теории тригонометрических рядов Фурье, теоремы о сходимости и равномерной сходимости рядов Фурье, теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций.

В центре внимания вопросы равномерной сходимости ряда Фурье. В отличие от многих курсов математического анализа, равномерная сходимость ряда Фурье непрерывной и кусочно-гладкой функции доказывается с неулучшаемой оценкой скорости сходимости ряда Фурье. Зависимость скорости сходимости ряда Фурье функции от ее гладкости также устанавливается вместе с точными оценками.

Содержание

§ 1. Определение ряда Фурье и принцип локализации 4

§ 2. Сходимость ряда Фурье 10

§ 3. Равномерная сходимость ряда Фурье 13

§ 4. Приближение непрерывных функций многочленами 18

§ 5. Почленное дифференцирование тригонометрических рядов. Скорость стремления к нулю коэффициентов и остатка ряда Фурье 22

Заключительное замечание 30

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 1. Определение ряда Фурье и принцип локализации

Определение 1.1. Ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (a_k,\ b_k \in \mathbb{R})$$

называется *тригонометрическим рядом.*

Множество функций

$$\frac{1}{2}, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad cos 2x, \quad \sin 2x, \quad \cos 3x, \quad \sin 3x, \ldots$$

называется *тригонометрической системой.*

Тригонометрическая система функция является *ортогональной* системой в том смысле, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx \, dx = 0, \quad k, m \in \mathbb{N}_0, \quad k \neq m,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx \, dx = 0, \quad k, m \in \mathbb{N}_0, \quad k \neq m,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mx \, dx = 0, \quad k, m \in \mathbb{N}_0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Кроме того,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx = \pi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Лемма 1.1. *Пусть*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{1.1}$$

и этот ряд сходится равномерно на $\mathbb{R}$. *Тогда*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx, \quad k\in\mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция f непрерывна на $[-\pi,\pi]$ как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Домножим равенство (1.1) почленно на $\cos nx$ или $\sin nx$ $(n\in\mathbb{N})$. Полученные ряды также будут сходиться равномерно и их почленное интегрирование с использованием свойства ортогональности функций системы дает

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_n\cos^2 nx\,dx = \pi a_n,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} b_n\sin^2 nx\,dx = \pi b_n,$$

откуда получаем вторую и третью формулы из (1.2). Первая из формул (1.2) получается почленным интегрированием ряда (1.1).

Заметим, что члены тригонометрического ряда являются определенными на действительной оси 2π-периодическими функциями. Поэтому и сумма тригонометрического ряда (если этот ряд сходится) также является 2π-периодической функцией.

Определение 1.2. Пусть f — 2π-периодическая функция, абсолютно интегрируемая на отрезке $[-\pi,\pi]$. Тригонометрический ряд с коэффициентами a_k, b_k, определенными формулами (1.2), называется (*тригонометрическим*) *рядом Фурье* функции f, а коэффициенты a_k, b_k — *коэффициентами ряда Фурье* функции f.

В этом случае пишут

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{1.3}$$

понимая под такой записью, что функции f поставлен в соответствие ее ряд Фурье.

Лемму 1.1 можно переформулировать так: *равномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы.*

Упражнение 1.1. Показать, что тригонометрический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{1+\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$, является рядом Фурье.

Заметим, что если 2π-периодическая функция f абсолютно интегрируема на каком-либо отрезке $[a, a+2\pi]$ длины 2π, то она будет абсолютно интегрируемой и на любом сдвинутом отрезке $[b, b+2\pi]$ и при этом

$$\int_b^{b+2\pi} f(x)\,dx = \int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx.$$

Это свойство, очевидное с геометрической точки зрения, без труда можно доказать и аналитически. В частности, коэффициенты Фурье 2π-периодической функции f можно вычислять, заменив в формулах (1.2) интеграл по отрезку $[-\pi, \pi]$ на интеграл по любому отрезку $[a, a+2\pi]$.

С другой стороны, каждую заданную на $[a-\pi, a+\pi]$ абсолютно интегрируемую функцию можно (изменив при необходимости ее значение в точке $a-\pi$ или в точке $a+\pi$, или и в той и в другой точке) продолжить до определенной на всей оси 2π-периодической функции. При этом изменение ее значения в одной или двух точках не изменит коэффициентов Фурье ее 2π-периодического продолжения (1.2), а значит, и ряда Фурье (1.3). Поэтому сходимость и другие свойства ряда Фурье можно изучать, считая, что функция f задана лишь на отрезке длиной 2π, например, на $[-\pi, \pi]$.

Мы будем изучать в первую очередь вопросы сходимости ряда Фурье в данной точке, на отрезке, равномерной сходимости на всей числовой оси и т.п. Наибольший интерес представляет случай, когда ряд Фурье функции f сходится в том или ином смысле к функции f. В этом случае говорят, что функция f разложена в ряд Фурье.

Теорема 1.1 (Римана об осцилляции). *Пусть функция f абсолютно интегрируема на конечном или бесконечном интервале (a, b). Тогда*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx = 0.$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $(a, b) = (-\infty, +\infty)$ (если это не так, то функцию f можно доопределить нулем на $(-\infty, +\infty) \setminus (a, b)$). Известно, что всякая абсолютно интегрируемая на $(-\infty, \infty)$ функция f является непрерывной по сдвигу в среднем, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)|\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{1.4}$$

Это свойство можно доказать, аппроксимируя f в среднем непрерывной финитной функцией.

Заменив переменную x на $x + \frac{\pi}{\lambda}$, получаем:

$$I(\lambda) \coloneqq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right)\cos\lambda x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right) - f(x)\right]\cos\lambda x\,dx.$$

В силу (1.4)

$$|I(\lambda)| \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f\left(x+\frac{\pi}{\lambda}\right) - f(x)\right|\,dx \to 0 \quad (\lambda\to\infty).$$

Для интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx$ доказательство аналогично.

Следствие 1. *Коэффициенты Фурье* (1.2) *абсолютно интегрируемой на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *функции стремятся к нулю при* $k \to \infty$.

Пусть 2π-периодическая функция f абсолютно интегрируема на $[-\pi, \pi]$. Частичная сумма ряда Фурье

$$S_n(x; f) \coloneqq \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

называется суммой ряда Фурье порядка $n \in \mathbb{N}_0$ функции f. Приведем ее к компактному виду, удобному для дальнейших исследований.

Назовем *ядром Дирихле* функцию

$$D_n(x) \coloneqq \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}}\,. \tag{1.5}$$

Последнее равенство (правая часть понимается при $x = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, как предел частного при $x \to 2m\pi$) устанавливается следующим образом. При $x \neq 2m\pi$

$$D_n(x) = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\sin \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2 \sin \frac{x}{2} \cos kx \right) =$$

$$= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\sin \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{2k+1}{2}\, x - \sin \frac{2k-1}{2}\, x \right) =$$

$$= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}}\,.$$

Ядро Дирихле (1.5) является, очевидно, 2π-периодической, четной, непрерывной функцией,

$$\max |D_n(x)| = D_n(0) = n + \frac{1}{2}\,,$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\, dx = 1. \tag{1.6}$$

Преобразуем сумму Фурье $S_n(x;f)$, подставив в нее вместо коэффициентов Фурье их выражения (1.2). Получим

$$S_n(x;f) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx)\,dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x)\right] dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(t)\,dt. \quad (1.7)$$

Произведя в последнем интеграле (называемом интегралом Дирихле) замену переменной t на $t+x$ и сдвиг отрезка интегрирования, получим

$$S_n(x;f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x+t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi}\right) D(t) f(x+t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)]\,dt. \quad (1.8)$$

Для произвольного δ, $0 < \delta < \pi$, представим последний интеграл в виде

$$S_n(x;f) = \frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right) \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right) dt.$$

Во втором из этих интегралов знаменатель дроби $2\sin\frac{t}{2} \geqslant$ $\geqslant 2\sin\frac{\delta}{2} > 0$, поэтому сама дробь абсолютно интегрируема как функция t.

Следовательно, второй интеграл стремится к нулю при $n \to$ $\to \infty$ по теореме Римана об осцилляции. Мы приходим, таким образом, к следующему утверждению.

Теорема 1.2 (принцип локализации). *Пусть 2π-периодическая функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi,\pi]$, $x_0\in\mathbb{R}$, $0<\delta<\pi$. Пределы*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x;f),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt$$

существуют или не существуют одновременно и совпадают в случае их существования.

Мы видим, таким образом, что сходимость ряда Фурье функции f в точке x_0 и величина его суммы в случае сходимости определяются поведением функции f на интервале $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, т.е. в сколь угодно малой окрестности точки x_0.

§ 2. Сходимость ряда Фурье

Пусть x_0 — точка разрыва первого рода функции f. Введем следующие обобщения односторонних производных:

$$f'_+(x_0)=\lim_{h\to0+0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0+0)}{h},$$

$$f'_-(x_0)=\lim_{h\to0+0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0-0)}{-h},$$

которые также будем называть односторонними производными.

Определение 2.1. Точку x_0 назовем *почти регулярной* точкой функции f, если существуют $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$, $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$. Если при этом $f(x_0)=\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$, то x_0 назовем *регулярной* точкой функции f.

Если функция f непрерывна в точке x_0 и имеет в ней правую и левую производные, то x_0 — регулярная точка функции f.

Теорема 2.1. *Пусть 2π-периодическая функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi,\pi]$, и x_0 — ее почти регулярная точка. Тогда ряд Фурье функции f сходится в точке x_0 к $\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$. Если же при этом x_0 — регулярная* *точка f (в частности, если f непрерывна в точке x_0), то ряд Фурье в точке x_0 сходится к $f(x_0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть x_0 — почти регулярная точка функции f. Из формулы (1.8) с помощью (1.6) получаем

$$S_n(x;f) - \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\,dt -$$
$$- \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\,\frac{2}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2f(x_0)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left[\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}+\right.$$
$$\left.+\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t}\right]\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt.$$

Дробь $\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}$, доопределенная единицей при $t=0$, является непрерывной на $[0,\pi]$ функцией. Дробь $\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}$ является абсолютно интегрируемой на $[0,\pi]$ функцией, поскольку таковой является ее числитель, и при $t\to 0+0$ она имеет конечный предел. То же относится и ко второй дроби в квадратной скобке. Следовательно, множитель при $\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)$ в подынтегральном выражении последнего интеграла представляет собой абсолютно интегрируемую на $[0,\pi]$ функцию. По теореме Римана об осцилляции, последний интеграл стремится к нулю при $n\to\infty$, т.е.

$$S_n(x_0;f)\to\frac{f(x_0-0)-f(x_0+0)}{2} \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

З а м е ч а н и е 2.1. Требование существования f'_+ $+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ в условии теоремы можно (как это видно из доказательства) заменить более слабым требованием выполнения неравенств

$$\begin{aligned} &|f(x_0+h) - f(x_0+0)| \leqslant Mh^\alpha, \quad \forall\, h \in (0,\delta),\\ &|f(x_0-h) - f(x_0-0)| \leqslant Mh^\alpha, \quad \forall\, h \in (0,\delta), \end{aligned} \tag{2.1}$$

при некоторых $\alpha \in (0,1]$, $\delta > 0$, $M > 0$. Условия (2.1) называются (односторонними) условиями Гёльдера степени α, а при $\alpha = 1$ еще и (односторонними) условиями Липшица.

Следствие 1. *Пусть 2π-периодическая функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi,\pi]$, и существует $f'(x_0)$. Тогда ряд Фурье функции f сходится в точке x_0 к $f(x_0)$.*

З а м е ч а н и е 2.2. Непрерывность на $\mathbb{R}$ 2π-периодической функции не является достаточным условием сходимости ее ряда Фурье в данной точке x_0. Существуют примеры 2π-периодической непрерывной на $\mathbb{R}$ функций, ряды Фурье которых расходятся в каждой рациональной точке.

В теореме 2.1, замечании 2.1 и следствии приводятся достаточные условия сходимости ряда Фурье в данной точке. Существуют и значительно более общие достаточные условия такой сходимости.

З а м е ч а н и е 2.3. Пусть функция f задана и абсолютно интегрируема на отрезке длиной 2π, например на $[-\pi,\pi]$. Для выяснения сходимости ее ряда Фурье в концах отрезка можно применить теорему 2.1, продолжив функцию f (изменив при необходимости ее значения на одном или обоих концах) до 2π-периодической функции. После такого продолжения точка $x = -\pi$ будет почти регулярной тогда и только тогда, когда $\exists\, f'_+(-\pi)$, $f'_-(\pi)$. В этом случае ряд Фурье функции f сходится в точке $x_0 = -\pi$ к $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

Аналогично решается вопрос о сходимости ряда Фурье в точке $x_0 = \pi$.

Пример 2.1. Найдем ряд Фурье функции $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $x \in$ $\in [0, 2\pi]$.

Пусть $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая функция, $\tilde{f}(x) = f(x)$ при $0 < x < 2\pi$, $\tilde{f}(0) = 0$. Как мы знаем, коэффициенты Фурье функции $\tilde{f}$ можно вычислить по формулам (1.2) либо отличающихся от них сдвигом отрезка интегрирования. В силу нечетности $\tilde{f}$, $a_k = 0\ \forall\, k \in \mathbb{N}_0$. Интегрируя по частям, получаем

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin kx\,dx =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\,(\pi - x)\,\frac{\cos kx}{x}\bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi}\cos kx\,dx = \frac{1}{k}\,.$$

Заметим, что всякая точка $x \in \mathbb{R}$ является регулярной точкой функции $\tilde{f}$. Следовательно,

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Итак, на отрезке $[0, 2\pi]$ сумма ряда Фурье $\tilde{f}$ функции f совпадает с f на интервале $(0, 2\pi)$ и отличается от f в концах интервала.

§ 3. Равномерная сходимость ряда Фурье

Определение 3.1. Функцию f называют *кусочно-непрерывно дифференцируемой* на отрезке $[a, b]$, если существует такое разбиение $\{a_i\}_{i=0}^m$ отрезка $[a, b]$ ($a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < b_m = b$), что:

1° Производная f' непрерывна на каждом интервале (a_{i-1}, a_i);

2° Существуют односторонние пределы $f'(a_{i-1} + 0)$, $f'(a_i - 0)$ для $i = 1, 2, \ldots, m$.

2π-периодическую функцию будем называть кусочно-непрерывной (кусочно-непрерывно дифференцируемой), если она кусочно-непрерывна (кусочно-непрерывно дифференцируема) на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Теорема 3.1. *Пусть f — 2π-периодическая непрерывная и кусочно-непрерывно дифференцируемая функция.*

Тогда ряд Фурье функции f сходится к f равномерно на $\mathbb{R}$ и

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |S_n(x;f) - f(x)| \leqslant C\,\frac{\ln n}{n} \quad \textit{при} \quad n \geqslant 2,$$

где C не зависит от n.

Доказательство. Пусть $M_0 = \max|f|$, $M_1 = \max|f'|$,

$$g_x(t) \coloneqq \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{2\sin\frac{t}{2}}\,.$$

С помощью теоремы Лагранжа о конечных приращениях получаем, что при $0 < t \leqslant \pi$

$$|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)| \leqslant 2M_1 t.$$

Следовательно,

$$|g_x(t)| \leqslant \frac{2M_1 t}{2\sin\frac{t}{2}} \leqslant \pi M_1,$$

$$\left|\frac{d}{dt}\,g_x(t)\right| \leqslant |f'(x+t) - f'(x-t)|\,\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} + $$

$$+|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\,\frac{\cos\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi M_1}{t} + \frac{\pi^2 M_1}{2t} \leqslant \frac{\pi^2 M_1}{t}\,.$$

Пусть $0 < \delta = \delta_n < \pi$. Как и при доказательстве теоремы 2.1

$$S_n(x;f) - f(x) = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi\right) g_x(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)dt = I_n + J_n.$$

Очевидно, что $|I_n| \leqslant \delta M_1$.

С помощью интегрирования по частям имеем

$$J_n = -\,\frac{1}{\pi}\,g_x(t)\,\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{n+\frac{1}{2}}\Bigg|_\delta^\pi - \frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \frac{d}{dt}\,g_x(t)\,\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{n+\frac{1}{2}}\;dt.$$

Отсюда

$$|J_n| \leqslant \frac{M_1}{n+\frac{1}{2}} + \frac{nM_1}{\delta\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \left(1+\frac{\pi}{\delta}\right) M_1 \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\,.$$

Полагая $\delta = \delta_n = \frac{1}{n}$, получаем, что при $n \geqslant 2$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |S_n(x;f) - f(x)| \leqslant |I_n| + |J_n| \leqslant \frac{C\ln n}{n}\,,$$

где C не зависит от n.

Из последнего неравенства следует утверждение теоремы.

Подчеркнем, что теорема 3.1 не только устанавливает равномерную сходимость ряда Фурье, но и дает оценку быстроты стремления к нулю остатка этого ряда.

Равномерная сходимость ряда Фурье периодической функции может быть установлена и при условиях более общих, чем в теореме 3.1, например, для функций, удовлетворяющих условию Гёльдера.

Определение. Говорят, что функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Гёльдера степени α, $0 < \alpha \leqslant 1$ (или условию Липшица в случае $\alpha = 1$), если $\exists\, M_\alpha > 0$:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M_\alpha |x-y|^\alpha \quad \forall\, x,y \in [a,b].$$

Заметим, что функции, удовлетворяющие условию Гёльдера, непрерывны м что класс функций, удовлетворяющих условию Гёльдера степени α сужается при увеличении α.

Если функция f непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема на $[a,b]$, то она удовлетворяет на $[a,b]$ условию Липшица.

Следующая теорема обобщает теорему 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть 2π-периодическая функция f удовлетворяет на $\mathbb{R}$ условию Гёльдера степени α, $0 < \alpha \leqslant 1$.*

Тогда ее ряд Фурье сходится к ней равномерно на $\mathbb{R}$ и

$$\sup_x |S_n(x;f) - f(x)| \leqslant C_\alpha \frac{\ln n}{n^\alpha} \quad \forall\, n \geqslant 2,$$

где C_α не зависит от n.

Доказательство. Воспользуемся формулой (2.1) в виде

$$S_n(x;f)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t)-f(x)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,dt.$$

Положим

$$h_x(t)=\frac{f(x+t)-f(x)}{2\sin\frac{t}{2}}\,,\quad \lambda=\lambda_n=n+\frac{1}{2}\,,\quad \delta\geqslant\frac{8}{n}>2\,\frac{\pi}{\lambda}\,.$$

Так же, как при доказательстве теоремы Римана об осцилляции, получаем

$$|S_n(x;f)-f(x)|\leqslant\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left|h_x\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-h_x(t)\right|\,dt=$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\delta}^{\delta}\ldots\,dt+\frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{-\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\right)\ldots\,dt=I_{\delta,n}(x)+J_{\delta,n}(x).\quad(3.1)$$

Напомним, что $\frac{2}{\pi}\,t<\sin t<t$ при $0<t<\frac{\pi}{2}$. Заметим, что при $|t|\leqslant 2\delta$

$$|h_x(t)|\leqslant\frac{M_\alpha|t|^\alpha}{2|t|}=\frac{\pi}{2}\,M_\alpha|t|^{\alpha-1},$$

так что

$$I_{\delta,n}(x)\leqslant\frac{\pi}{2}\,M_\alpha\int_0^{2\delta}t^{\alpha-1}\,dt=\frac{\pi}{2\alpha}\,M_\alpha 2^\alpha\delta^\alpha.\quad(3.2)$$

Если же $|t|>\delta$, то

$$h_x\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-h_x(t)=\frac{f\left(x+t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(x)}{2\sin\frac{t+\frac{\pi}{\lambda}}{2}}-\frac{f(x+t)-f(x)}{2\sin\frac{t}{2}}=$$

$$=\frac{f\left(x+t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(x)}{2\sin\frac{t+\frac{\pi}{\lambda}}{2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\frac{t+\frac{\pi}{\lambda}}{2}}-\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\right)\times$$
$$\times(f(x+t)-f(x)),\quad(3.3)$$

так что

$$\left|h_x\left(t+\frac{\pi}{\lambda}\right)-h_x(t)\right| \leqslant \frac{M_\alpha\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^\alpha \pi}{2\left|t+\frac{\pi}{\lambda}\right|}+\frac{2\sin\frac{\pi}{2\lambda}\,\pi^2 M_\alpha |t|^\alpha}{2\left|t+\frac{\pi}{\lambda}\right|\,|t|} \leqslant$$

$$\leqslant C_2\,\frac{M_\alpha}{|t|\lambda^\alpha}\,,$$

$$J_{\delta,n}(x) \leqslant \int_\delta^\pi \frac{C_2 M_\alpha}{\lambda_\alpha}\,\frac{dt}{t} \leqslant \frac{C_2 M_\alpha}{\lambda^\alpha}\ln\frac{1}{\delta}\,.$$

Полагая $\delta=\dfrac{8}{n}$ и собирая оценки, приходим к утверждению теоремы.

Часть теоремы 3.1, касающаяся лишь факта равномерной сходимости, допускает следующее обобщение.

Теорема 3.3. *Пусть 2π-периодическая функция f абсолютно интегрируема на $[-\pi,\pi]$. Пусть на некотором интервале (a',b') f непрерывна и f' кусочно-непрерывна.*

Тогда ряд Фурье функции f равномерно сходится к f на любом отрезке $[a,b]\subset(a',b')$.

Доказательство. Пусть $\frac{8}{n}\leqslant\delta<\delta$, $[a-2\delta,b+2\delta]\subset$ $\subset(a',b')$, $x\in[a,b]$. Воспользуемся оценкой (3.1). В силу (3.2) при $\alpha=1$

$$I_{\delta,n}(x)\leqslant C_1 M_1\delta.$$

Для получения оценки $J_{\delta,n}$ используем преобразование (3.3) разности в подынтегральном выражении. Тогда

$$J_{\delta,n}(x)\leqslant\frac{1}{4\pi\delta}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(u+\frac{\pi}{\lambda}\right)-f(u)\right|du+$$

$$+\frac{\pi^3}{4\delta^2\lambda}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(u)|\,du+2\pi\sup_{[a,b]}|f|\right).$$

Пусть задано $\varepsilon>0$. Тогда существует такое достаточно малое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что $\sup\limits_{[a,b]}I_{\delta,n}<\frac{\varepsilon}{2}$. При выбранном δ

$$\exists\, n_\delta\in\mathbb{N}\ :\ \sup_{[a,b]}J_{\delta,n}<\frac{\varepsilon}{2}\quad\forall\, n\geqslant n_\delta.$$

Тогда из (3.1) и полученных оценок следует, что

$$\sup_{x\in[a,b]} |S_n(x;f) - f(x)| \to 0 \text{ при } n\to\infty$$

и теорема установлена.

Отметим, что теорема 3.3 расширяет сформулированный ранее принцип локализации, показывая, что для утверждения о равномерной сходимости ряда Фурье на отрезке $[a,b]$ достаточно знать поведение этой функции лишь на окрестности $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ этого отрезка при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$.

Из теоремы 3.3 следует, например, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ на любом отрезке $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, равномерно сходится к функции $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$.

Теорему 3.3 можно обобщить, заменив условие кусочно-непрерывной дифференцируемости на условие Гёльдера степени $\alpha > 0$ на $[a', b']$.

§ 4. Приближение непрерывных функций многочленами

Определение 4.1. Функция вида

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx \quad (A_n^2 + B_n^2 > 0)$$

называется *тригонометрическим многочленом* (*тригонометрическим полиномом*) степени n.

Теорема 4.1 (Вейерштрасса). *Пусть f — 2π-периодическая непрерывная функция. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический многочлен T, что*

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - T(x)| < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зададим $\varepsilon > 0$. Пусть $\tau = \{x_j\}_{j=0}^{J}$, $x_j = -\pi + j\,\frac{2\pi}{J}$, — разбиение отрезка $[-\pi,\pi]$. Построим ломаную (вписанную в график функции f), соединив отрезками последовательно точки $(x_j, f(x_j))$ графика f. Обозначим через $\Lambda_J \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-периодическую непрерывную функцию, график которой совпадает на $[-\pi,\pi]$ с построенной ломаной. Очевидно, Λ_J — кусочно линейная на $[-\pi,\pi]$ функция, а значит, и кусочно-непрерывно дифференцируемая (т.е. Λ'_J кусочно-непрерывна).

Непрерывная функция f является равномерно непрерывной. Поэтому

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{при} \quad |x' - x''| \leqslant \frac{2\pi}{J}\,,$$

если $J = J(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ достаточно велико. Тогда

$$\max |f(x) - \Lambda_J(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Функция Λ_J удовлетворяет условиям теоремы 2.1, поэтому ее ряд Фурье сходится к ней равномерно на $\mathbb{R}$. Следовательно, существует такое $n = n(\varepsilon)$, что

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |\Lambda_j(x) - S_n(x;\Lambda_J)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Из последних двух неравенств получаем, что

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - S_n(x;\Lambda_J)| < \varepsilon,$$

т.е. утверждение теоремы при

$$T(x) = S_n(x;\Lambda_J).$$

Теорему 4.1 в эквивалентной форму можно сформулировать следующим образом:

Теорема 4.1′. (Вейерштрасса). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический многочлен T, что*

$$\max_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi} |f(x) - T(x)| < \varepsilon.$$

Упражнение 4.1. Показать, что последняя теорема перестает быть верной, если отбросить условие $f(-\pi) = f(\pi)$.

Заметим, что в теореме 4.1 в качестве тригонометрического многочлена T нельзя (вообще говоря) взять $S_n(x; f)$ (частичную сумму ряда Фурье функции f), поскольку ряд Фурье непрерывной функции не обязан равномерно сходиться (не обязан даже и поточечно сходиться) к функции f. Однако, в качестве T можно взять $\sigma_n(x; f)$ (сумму Фейера функции f) при достаточно большом n, где

$$\sigma_n(x; f) = \frac{S_0(x; f) + S_1(x; f) + \dots + S_n(x; f)}{n+1}$$

— среднее арифметическое сумм Фурье, как это следует из теоремы Фейера:

Теорема 4.2 (Фейера). *Пусть f — 2π-периодическая непрерывная функция. Тогда*

$$\sigma_n(x; f) \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f(x) \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательства этой теоремы приводить не будем.

Факт сходимости последовательности сумм Фейера в теореме Фейера выражают еще и следующим образом:

Ряд Фурье 2π-периодической непрерывной функции f суммируем к $f(x)$ методом средних арифметических.

Метод суммирования ряда средними арифметическими (последовательности его частичных сумм) дает возможность и для некоторых расходящихся рядов определить понятие их суммы как предела последовательности этих средних арифметических. Для сходящегося ряда это понятие совпадает с понятием суммы ряда.

Пример 4.1. Расходящийся ряд $1-1+1-1+\dots$ суммируем методом средних арифметических к числу $\frac{1}{2}$.

С помощью теоремы 4.1 (Вейерштрасса) доказывается и возможность приближения с любой точностью непрерывной на отрезке функции подходящим алгебраическим многочленом P.

Теорема 4.3 (Вейерштрасса). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой алгебраический многочлен P, что*

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Отобразим линейно отрезок $[0, \pi]$ на отрезок $[a, b]$:

$$x = a + \frac{b-a}{\pi}\, t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

и положим $f^*(t) = f\left(a + \frac{b-a}{\pi}\, t\right)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Продолжим ее четным образом на отрезок $[-\pi, 0]$ и затем на всю ось с периодом 2π, сохранив обозначение f^*. Полученная функция $f^*\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является 2π-периодической и непрерывной на $\mathbb{R}$. По теореме 4.1 для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой тригонометрический многочлен T, что

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant \pi} |f^*(t) - T(t)| \leqslant \max_{x \in \mathbb{R}} |f^*(t) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Функции $\cos kt$, $\sin kt$ (а значит и $T(t)$) раскладываются в степенные ряды с радиусом сходимости $\mathbb{R} = +\infty$, и, следовательно, равномерно сходящиеся на каждом отрезке. Поэтому существует такой номер $n = n(\varepsilon)$, что

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant \pi} |T(t) - P_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

где P_n — многочлен Тейлора функции T.

Из последних двух неравенств получаем, что

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant \pi} |f^*(t) - P_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

или (возвращаясь к переменной x)

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} \left| f(x) - P_n\left(\pi\, \frac{x-a}{b-a}\right) \right| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теорему 4.3 можно переформулировать следующим образом:

Всякая непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция является равномерным пределом некоторой последовательности алгебраических многочленов.

§ 5. Почленное дифференцирование тригонометрических рядов. Скорость стремления к нулю коэффициентов и остатка ряда Фурье

Теорема 5.1. *Пусть 2π-периодическая функция f непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема и пусть*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

— ее разложение в ряд Фурье. Тогда

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} -ka_k \sin kx + kb_k \cos kx,$$

т.е. ряд Фурье производной получается из ряда Фурье функции почленным дифференцированием.

Доказательство. Пусть

$$f'(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx.$$

Тогда, интегрируя по частям, получим

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\,[f(\pi) - f(-\pi)] = 0,$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\, f(x)\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = kb_k,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\, f(x)\sin kx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = -ka_k.$$

Лемма 5.1. *Пусть 2π-периодическая функция f имеет непрерывные производные до порядка $m-1$ включительно и кусочно-непрерывную производную порядка $m \in \mathbb{N}$.*

Тогда для коэффициентов Фурье функции f выполняются оценки

$$|a_k| + |b_k| = o\left(\frac{1}{k^m}\right) \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{5.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $m \geqslant 1$ и

$$f^{(m)}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx.$$

Применяя m раз теорему 5.1, получаем, что

$$|\alpha_k| + |\beta_k| = k^m(|a_k| + |b_k|), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Поскольку $\alpha_k,\ \beta_k \to 0$ $(k \to \infty)$ по лемме о стремлении к нулю коэффициентов Фурье, из последнего равенства получаем (5.1).

Лемма 5.1 показывает, что коэффициенты Фурье функции f тем быстрее стремятся к нулю, чем лучше дифференциальные свойства функции f.

Утверждение леммы 5.1 можно несколько усилить, если использовать неравенства Бесселя для кусочно-непрерывных 2π-периодических функций:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{5.2}$$

Это неравенство будет установлено ниже. Применяя (5.2) к производной $f^{(m)}$, получаем, что в условиях леммы 5.1

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2m}(a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f^{(m)}(x))^2 dx < \infty.$$

Установим оценки скорости приближения функции ее суммами Фурье в зависимости от дифференциальных свойств функции. Изучим для этого характер сходимости ряда, *сопряжен-*

ного с рядом Фурье 2π-периодической непрерывной и кусочно-непрерывно дифференцируемой функции f, т.е. *ряда*

$$\tilde{S}(x;f) \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx - b_k \cos kx, \tag{5.3}$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции f.

Сопряженным ядром Дирихле называется

$$\tilde{D}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\,.$$

Последнее равенство устанавливается так же, как (1.5). Так же, как (1.8) устанавливается, что частичную сумму

$$\tilde{S}_n(x;f) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx - b_k \cos kx$$

ряда (5.3) можно представить в виде

$$\tilde{S}_n(x;f) = -\int_0^{\pi} \tilde{D}_n(t)[f(x+t)-f(x-t)]\,dt = \\ = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h_x(t)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,dt + \tilde{f}(x),$$

где

$$h_x(t) \coloneqq \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\,,$$

$$\tilde{f}(x) \coloneqq -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt.$$

Лемма 5.2. *Пусть 2π-периодическая функция f непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема, a_k, b_k — ее коэффициенты Фурье.*

Тогда при некотором $C > 0$ и $\forall\, n \geqslant 2$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{n+1}^{\infty} a_k \sin kx - b_k \cos kx \right| \leqslant C\,\frac{\ln n}{n}\,. \tag{5.4}$$

Доказательство. Положим $M_1 \coloneqq \max_{\mathbb{R}} |f'|$. С помощью теоремы Лагранжа о конечных приращениях получаем

$$|f(x+t) - f(x-t)| \leqslant 2M_1 t, \quad 0 < t \leqslant \pi,$$

откуда следует, в частности, что $\tilde{f}(x)$ существует для каждого x (как интеграл от непрерывной на $(0, \pi]$ и ограниченной функции). Оценим

$$\tilde{f}(x) - \tilde{S}_n(x; f) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi h_x(t) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) t \, dt,$$

используя оценки

$$|h_x(t)| \leqslant \pi M_1,$$

$$\left|\frac{d}{dt} h_x(t)\right| \leqslant |f'(x+t) + f'(x-t)| \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} +$$

$$+|f(x+h) - f(x-h)| \frac{\cos\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}} \leqslant \frac{\pi M_1}{t} + \frac{\pi^2 M_1}{2t} \leqslant \frac{\pi^2 M_1}{t}.$$

Так же, как при доказательстве теоремы 1.2 получаем

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\tilde{f}(x) - \tilde{S}_n(x; f)| \leqslant C \frac{\ln n}{n} \quad \text{при} \quad n \geqslant 2,$$

откуда следует (5.4).

Теорема 5.2. *Пусть при $m \in \mathbb{N}$ 2π-периодическая функция f имеет непрерывные производные до порядка $m-1$ включительно и кусочно-непрерывную производную $f^{(m)}$.*

Тогда ряд Фурье функции f сходится к f равномерно и

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - S_n(x; f)| = O\left(\frac{\ln n}{n^m}\right) =$$

$$= o\left(\frac{1}{n^{m-\varepsilon}}\right) \text{ при } n \to \infty \text{ и } \forall \varepsilon > 0.$$

Доказательство. Случай $m = 1$ совпадает с теоремой 3.1. Пусть $\varphi := f^{(m-1)}$ и α_k, β_k — коэффициенты Фурье функции φ. По теореме 3.1

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx\right|\leqslant C\,\frac{\ln n}{n}\quad\forall\, n\geqslant 2. \tag{5.5}$$

Пусть a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции f. Пусть сначала $m-1$ — четно. Тогда в силу $m-1$ раз примененной теоремы 5.1 при $x\in\mathbb{R}$ имеем

$$|r_n(x;f)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx\right|=$$
$$=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{m-1}}\,(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right|.$$

Применим к последнему ряду преобразование Абеля, учитывая сходимость ряда $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx$ и оценку (установленные в случае $m=1$ данной теоремы)

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx\right|\leqslant C\,\frac{\ln n}{n}\,.$$

Получим

$$|r_n(x;f)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\sum_{j=n+1}^{\infty}\alpha_j\cos jx+\beta_j\sin jx\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{(k+1)^{m-1}}-\frac{1}{k^{m-1}}\right)\right|\leqslant C\,\frac{\ln n}{n}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^{m-1}}-\frac{1}{k^{m-1}}\right|=$$
$$=C\,\frac{\ln n}{n}\,\frac{1}{(n+1)^{m-1}}\leqslant C\,\frac{\ln n}{n^m}\,,$$

и (5.5) в этом случае установлено.

Пусть теперь $m-1$ нечетно. Тогда

$$|r_n(x;f)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx\right| = \\ = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{m-1}} \left(\alpha_k \sin kx - \beta_k \cos kx\right)\right|.$$

Ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \sin kx - \beta_k \cos kx$ сходится по лемме 5.2. Применяя преобразование Абеля и оценку (5.5), получим, что

$$|r_n(x;f)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \alpha_j \sin jx - \beta_j \cos jx\right) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{(k+1)^{m-1}} - \frac{1}{k^{m-1}}\right)\right| \leqslant C\,\frac{\ln n}{n}\,\frac{1}{(n+1)^{m-1}} \leqslant C\,\frac{\ln n}{n^m}\,,$$

и теорема доказана.

Теорема 5.2 показывает, что чем больше производных имеет функция f, тем с большей скоростью сходится ее ряд Фурье.

З а м е ч а н и е. Лемму 5.1 и теорему 5.2 можно переформулировать для функции f, заданной лишь на отрезке $[-\pi,\pi]$, добавив условия в концах отрезка, гарантирующие выполнение для ее 2π-периодического продолжения условий соответственно леммы 5.1 и теоремы 5.2. Именно, следует для функции $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ считать выполненными следующие дополнительные условия на односторонние производные:

$$f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi) \quad \text{при} \quad j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

При соответствующей переформулировке теоремы 3.1 и теоремы 5.1 для функции $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ следует считать выполненным равенство $f(-\pi) = f(\pi)$.

Наряду с теоремой 5.2 установим и другую теорему 5.2$'$, хотя и менее сильную, но также указывающую на связь между дифференциальными свойствами 2π-периодической функции и скоростью сходимости ее ряда Фурье.

Доказательство теоремы $5.2'$ в отличие от теоремы 5.2 опирается не на анализ сходимости сопряженного с рядом Фурье ряда, а на неравенство Бесселя (5.2), которое будет предварительно установлено.

Читатель может по своему усмотрению ограничиться изучением одной из этих двух теорем.

Лемма 5.3. *Пусть f — 2π-периодическая и кусочно-непрерывная функция, a_k, b_k — ее коэффициенты Фурье.*

Тогда справедливо неравенство Бесселя (5.2).

Доказательство. Пусть сначала f является 2π-периодической непрерывной и кусочно-непрерывно дифференцируемой функцией. По теореме 5.2, она раскладывается в равномерно сходящийся ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx. \tag{5.6}$$

Домножим равенство (5.6) почленно на $f(x)$ и проинтегрируем полученный ряд (также равномерно сходящийся) почленно. Получим в силу формул (1.2) для коэффициентов Фурье равенство

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx, \tag{5.7}$$

следствием которого является (2.2)

Равенство Парсеваля (5.7) и *неравенство Бесселя* (5.2) будут позднее распространены на функции f со значительно более общими свойствами.

Пусть теперь функция f удовлетворяет условиям леммы и $\Lambda_J\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая непрерывная функция, кусочно линейная на $[-\pi, \pi]$, построенная при доказательстве теоремы Вейерштрасса 4.1 (график Λ_J представляет собой вписанную в график f ломаную). Обозначим через $a_k(f)$, $b_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции f. Из (5.2) следует неравенство

$$\frac{a_0^2(\Lambda_J)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2(\Lambda_J) + b_k^2(\Lambda_J)) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Lambda_J^2(x)\,dx \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \quad (5.8)$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$ фиксировано, а $J \to \infty$. Тогда, как легко видеть,

$$a_k(\Lambda_J) \to a_k(f), \quad b_k(\Lambda_J) \to b_k(f), \quad \int_{-\pi}^{\pi}\Lambda_J^2(x)\,dx \to \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

Переходя к пределу в неравенстве (5.5), получаем, что

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2(f) + b_k^2(f)) \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, приходим к утверждению леммы.

Теорема 5.2′. *Пусть при $m \in \mathbb{N}$ 2π-периодическая функция f имеет непрерывные производные до порядка $m-1$ включительно и кусочно-непрерывную производную $f^{(m)}$.*

Тогда ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно на $\mathbb{R}$ и

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - S_n(x; f)| = o\left(\frac{1}{n^{m-\frac{1}{2}}}\right) \quad \textit{при} \quad n \to \infty. \quad (5.9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равномерная сходимость к функции f ее ряда Фурье установлена в теореме 3.1. Оценим остаток ее ряда Фурье.

$$|r_n(x; f)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty}(|\alpha_k| + |\beta_k|)\,\frac{1}{k^m},$$

где α_k, β_k — коэффициенты Фурье функции $f^{(m)}$, а последнее неравенство получено m-кратным применением теоремы 5.1. В силу неравенства Коши–Шварца

$$\sum_{k=n+1}^{N} (|\alpha_k| + |\beta_k|)\, \frac{1}{k^m} \leqslant \sqrt{\sum_{k=n+1}^{N} (|\alpha_k| + |\beta_k|)^2} \sqrt{\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^{2m}}}.$$

Предельный переход в последнем неравенстве при $N \to \infty$ показывает, что оно остается верным, если в нем вместо N поставить ∞. Используя его, получаем, что

$$|r_n(x; f)| \leqslant \sqrt{2 \sum_{k=n+1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)} \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}} = \\ = \varepsilon_n \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}}, \qquad (5.10)$$

причем $\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$ в силу сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)$, вытекающей из неравенства Бесселя для функции $f^{(m)}$ (см. лемму 5.3). Заметим, что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k-1}^{m} \frac{dx}{x^{2m}} \leqslant \int_{n}^{\infty} \frac{dx}{x^{2m}} = \frac{1}{(2m-1)n^{2m-1}}\,.$$

Отсюда и из (5.10) следует (5.9).

Заключительное замечание

В этом пособии не рассмотрены вопросы почленного интегрирования рядов Фурье, рядов Фурье $2l$-периодических функций и комплексной формы рядов Фурье. Стандартное изложение этих вопросов можно найти во многих учебниках.

Мы не коснулись также вопросов сходимости рядов Фурье в смысле среднего квадратичного, в которых в полной мере проявляется свойство ортогональности функций тригонометрической системы.