МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Кафедра высшей математики

М. В. Балашов

ДОБАВЛЕНИЕ К ЛЕКЦИЯМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ. 1 СЕМЕСТР

Учебно-методическое пособие

МОСКВА
МФТИ
2015

УДК 517

Рецензент
доктор физико-математических наук, профессор Г. Е. Иванов

Добавление к лекциям по математическому анализу. 1 семестр: Учебно-методическое пособие по курсу *Математический анализ* / авт. М. В. Балашов. – М., МФТИ, 2015. – 33 с.

Пособие включает некоторые темы по математическому анализу, прочитанные автором студентам 1 курса ФУПМ осенью 2014 года. Предназначено для студентов 1 курса МФТИ, а также для преподавателей.

Содержание

Нельзя объять необъятное.
К. Прутков

Лекционный курс «Математичекский анализ» занимает важное место в общеинститутской подготовке студентов Физтеха. Созданный академиком С. М. Никольским и его школой, этот курс долгие годы шлифовался многими поколениями сотрудников кафедры высшей математики МФТИ. В результате у нас сложилась хорошо продуманная традиция преподавания математического анализа для прикладных специалистов физико-математического профиля, подлинная гордость «системы Физтеха». Вместе с тем со временем всякая традиция становится архаичной. Не может избежать этого и наша традиция преподавания курса анализа. Дело в том, что возникновение новых задач (как теоретических, так и прикладных), смена приоритетов (иногда и вовсе не связанных с наукой), постоянно бросают новые вызовы преподавателям научных дисциплин.

Две крайних реакции на сложившуюся ситуацию — от «оставить основы нетронутыми» до «разрушить до основания, а затем...». Истина, вероятно, лежит посередине и, на мой взгляд, несколько ближе к «оставить основы нетронутыми», чем к крайнему реформаторству. Таким образом, данное пособие есть скромная попытка «поварьировать» наш классический физтеховский курс анализа.

Пособие состоит из набора тем, прочитанных автором в осеннем семестре 2014 года дополнительно к «стандартной» программе по анализу. При этом, во-первых, это потребовало некоторого моего напряжения, дабы успеть по времени. Во-вторых, автор не уверен, что студенты хорошо восприняли всё (и особенно абстрактные моменты). В-третьих, дополнительные темы лекций во многом определялись личными предпочтениями автора. У другого лектора акценты могли быть другими.

Все это должно служить известным предостережением для студента-первокурсника, впервые приступающего к изучению анализа. Вместе с тем я бы хотел рекомендовать данное пособие хорошо успевающим студентам, желающим углубить свои знания по анализу, в качестве стартовой площадки.

Я благодарен сотрудникам кафедры, с которыми обсуждался замысел и содержание данного пособия. Я также благодарен сотрудникам редакционно-издательского отдела МФТИ за работу, способствующую существенному улучшению текста.

М. В. Балашов 5 февраля 2015, Долгопрудный

1. Компактность и свойство Гейне–Бореля. Теорема Бэра

Напомним, что множество $A \subset X$ называется *открытым* в $X \subset \mathbb{R}$, если $A = X \cap B$, где $B \subset \mathbb{R}$ — открытое подмножество. Множество $A \subset X$ называется *замкнутым* в X, если $A = X \cap B$, где $B \subset \mathbb{R}$ — замкнутое подмножество.

Легко проверить, что если $A \subset X$ открыто в X, то $X \backslash A$ замкнуто в X, а если $A \subset X$ замкнуто в X, то $X \backslash A$ открыто в X (проверьте!).

Заметим, что открытое в X множество может оказаться одновременно и замкнутым в X, а замкнутое в X — открытым в X. Например, если $X = (0,1) \cup (2,3)$, то множество $(0,1)$ является одновременно и открытым и замкнутым подмножеством X (почему?).

Напомним, что множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *компактным*, если из любой последовательности элементов X можно выделить подпоследовательность, которая сходится и имеет предел в X. Множество $X \subset \mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено [1, теорема 2. §11, Глава 1].

Ниже мы рассмотрим одно полезное определение понятия компактности через покрытия.

Будем говорить, что множество $X \subset \mathbb{R}$ покрыто семейством множеств $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ ($\mathcal{A}$ — произвольное множество индексов), если

$$X \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha.$$

Заметим, что знак включения $\subset$ не исключает равенства.

Будем говорить, что для множества $X \subset \mathbb{R}$ выполняется *свойство Гейне–Бореля,* если из любого покрытия множества X семейством открытых подмножеств из $\mathbb{R}$ можно выделить конечное подпокрытие, т.е. если $X \subset \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$ и все множества V_α открыты (а $\mathcal{A}$ — произвольное множество индексов), то найдется некоторый конечный набор индексов $\{\alpha_k\}_{k=1}^N \subset \mathcal{A}$ такой, что $X \subset \bigcup\limits_{k=1}^N V_{\alpha_k}$. При этом мы можем без ограничения общности считать, что $V_\alpha \subset X$ для всех α и V_α открыты в X. Действительно, достаточно заменить каждое множество V_α на открытое в X множество $V_\alpha \bigcap X$.

Л е м м а 1.1. *Следующие свойства эквивалентны:*
1) для множества $X \subset \mathbb{R}$ выполняется свойство Гейне–Бореля,
2) для любого набора замкнутых в X множеств $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset X$ из условия

$$\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha = \emptyset$$

следует, что найдется конечное подмножество индексов $\{\alpha_k\}_{k=1}^N \subset \mathcal{A}$ таких, что

$$\bigcap_{k=1}^N F_{\alpha_k} = \emptyset.$$

Заметим, что условие 2) леммы эквивалентно следующему: если для всякого конечного набора индексов $\{\alpha_k\}_{k=1}^N \subset \mathcal{A}$ (N — любое натуральное число) выполняется неравенство $\bigcap\limits_{k=1}^N F_{\alpha_k} \neq \emptyset$, то $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha \neq \emptyset$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $X \subset \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$ и $V_\alpha \subset X$ открыты как подмножества X для всякого α. Допустим, выполнено условие 2). Тогда

$$\emptyset = X \backslash \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} (X \backslash V_\alpha).$$

При этом множества $X \backslash V_\alpha$ замкнуты в X. Из условия 2) найдется конечное подмножество индексов $\{\alpha_k\}_{k=1}^N \subset \mathcal{A}$ со свойством

$$\bigcap_{k=1}^N (X \backslash V_{\alpha_k}) = \emptyset,$$

откуда

$$X = X \backslash \bigcap_{k=1}^N (X \backslash V_{\alpha_k}) = \bigcup_{k=1}^N V_{\alpha_k},$$

то есть выполнено свойство Гейне–Бореля.

Допустим, выполнено условие 1). Пусть $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}} \subset X$ произвольный набор замкнутых в X подмножеств со свойством $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha = \emptyset$, тогда

$$X = X \backslash \bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} (X \backslash F_\alpha).$$

Множества $X \backslash F_\alpha$ открыты в X и по свойству 1) существует конечное подпокрытие:

$$X = \bigcup_{k=1}^N (X \backslash F_{\alpha_k}).$$

Отсюда

$$\emptyset = X \setminus \bigcup_{k=1}^{N} (X \setminus F_{\alpha_k}) = \bigcap_{k=1}^{N} F_{\alpha_k}.$$

□

Теорема 1.1. *Множество $X \subset \mathbb{R}$ является компактным тогда и только тогда, когда для множества X выполняется свойство Гейне–Бореля.*

Доказательство. Покажем методом от противного, что из свойства Гейне–Бореля вытекает компактность X.

Допустим, X не ограничено. Рассмотрим следующее покрытие X: каждую точку $x \in X$ мы покроем единичным интервалом вида $V_x = (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2})$, имеем

$$X \subset \bigcup_{x \in X} V_x.$$

По свойству Гейне–Бореля найдется подмножество $\{x_k\}_{k=1}^N$ множества X со свойством $X \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} V_{x_k}$. Получаем противоречие: в правой части последнего включения ограниченное множество (конечное объединение единичных интревалов), а в левой — не ограниченное. Итак, множество X ограничено.

Допустим, X не замкнуто. Тогда найдется последовательность точек $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset X$, сходящаяся к точке $x_0 \notin X$. Рассмотрим замкнутые множества $D_n = \{x_k\}_{k=n}^\infty \cup \{x_0\}$ (почему D_n замкнуто?) и замкнутые в X подмножества $F_n = D_n \cap X = \{x_k\}_{k=n}^\infty$ для всякого натурального n. Любое конечное пересечение F_n непусто, поскольку для любого натурального N

$$\bigcap_{n=1}^{N} F_n = \{x_k\}_{k=N}^\infty,$$

но пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ пусто. В силу леммы 1.1 это противоречит свойству Гейне–Бореля. Итак, X замкнуто.

Замкнутое и ограниченное множество $X \subset \mathbb{R}$ компактно.

Пусть теперь множество $X \subset \mathbb{R}$ компактно.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем произвольно точку $x_1 \in X$. Покроем ее интервалом $U_\varepsilon(x_1) = (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon)$ и рассмотрим множество $X_1 = X \setminus U_\varepsilon(x_1)$. Если X_1 непусто, то выберем произвольно точку $x_2 \in X_1$ и покроем ее интервалом $U_\varepsilon(x_2)$. Определим $X_2 = X_1 \setminus U_\varepsilon(x_2)$, заметим, что $|x_1 - x_2| > \varepsilon$.

Пусть построены точки $x_1, \ldots, x_n \in X$ со свойством $|x_i - x_j| > \varepsilon$, $1 \leq i \neq j \leq n$ и $X_n = X_{n-1} \setminus U_\varepsilon(x_n)$ непусто. Тогда выбираем $x_{n+1} \in X_n$ и индуктивно продолжаем построение точек x_k, $k = 1, \ldots, n+1$.

Если процесс построения точек не оборвется ни на каком номере $n = N$, то мы получим неограниченность X. Действительно, среди точек $x_2, \ldots, x_N$ не менее $\left[\frac{N-1}{2}\right]$ из указанного списка находятся либо слева, либо справа от точки x_1 (и расстояние между соседними точками не менее ε), поэтому для всякого натурального N множество X не содержится в отрезке

$$\left[x_1 - \varepsilon \left[\frac{N-1}{2}\right] + \varepsilon, x_1 + \varepsilon \left[\frac{N-1}{2}\right] - \varepsilon\right].$$

Это и означает неограниченность X. Противоречие показывает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует конечное покрытие множества X вида

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{N} U_\varepsilon(x_k), \quad x_k \in X, \; k = 1, \ldots, N.$$

Допустим, существует покрытие множества X открытыми множествами $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие. Для каждого натурального n рассмотрим конечное покрытие интервалами радиуса $\varepsilon = \frac{1}{n}$:

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{N_n} U_{\frac{1}{n}}(x_k^n), \quad x_k^n \in X, \; k = 1, \ldots, N_n.$$

Хотя бы одно из множеств $U_{\frac{1}{n}}(x_k^n) \cap X$ не может быть покрыто конечным набором множеств V_α (иначе и все множество X можно было бы покрыть конечным набором V_α, что, как мы считаем, неверно). Без ограничения общности будем считать, что это множество $U_{\frac{1}{n}}(x_1^n) \cap X$. Таким образом (перебрав все натуральные n), мы построили последовательность $\{x_1^n\}_{n=1}^\infty \subset X$. Так как множество X компактно, то найдется подпоследовательность $\{x_1^{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{x_1^n\}_{n=1}^\infty$, сходящаяся к точке $x_0 \in X$. При этом точка x_0 содержится в некотором элементе покрытия V_{α_0}. Поскольку V_{α_0} открыто в X, то найдется $\varepsilon_0 > 0$ со свойством $U_{\varepsilon_0}(x_0) \cap X \subset V_{\alpha_0}$.

Из условий $\frac{1}{n_k} \to 0$ и $x_1^{n_k} \to x_0$ найдется такой номер M, что при $k > M$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon_0}{3}, \qquad |x_1^{n_k} - x_0| < \frac{\varepsilon_0}{3},$$

т.е.

$$U_{\frac{1}{n_k}}(x_1^{n_k}) \bigcap X \subset U_{\varepsilon_0}(x_0) \bigcap X \subset V_{\alpha_0}.$$

Это противоречит тому, что (по построению) ни одно множество из совокупности $U_{\frac{1}{n}}(x_1^n) \cap X$, $n = 1, 2, \ldots$, не покрывается конечным набором множеств V_α. Значит, наше допущение неверно, и для множества X свойство Гейне–Бореля выполнено. □

Теорема 1.2. *(Бэр). Пусть множества*

$$\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$$

замкнуты и

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \mathbb{R}.$$

Тогда для некоторого $n \in \mathbb{N}$ внутренность множества F_n непуста, т.е.

$$\operatorname{int} F_n = \{x \in F_n \mid \exists\, \varepsilon(x) > 0 \ U_{\varepsilon(x)}(x) \subset F_n\} \neq \emptyset.$$

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что $\operatorname{int} F_n = \emptyset$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Множество $\mathbb{R} \backslash F_1$ открыто, поэтому выберем в нем отрезок $[a_1, b_1] \subset \mathbb{R} \backslash F_1$. По построению $[a_1, b_1] \cap F_1 = \emptyset$.

Пусть построен набор вложенных отрезков $\{[a_k, b_k]\}_{k=1}^n$ таких, что $[a_n, b_n] \cap F_k = \emptyset$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Множество $(a_n, b_n) \backslash F_{n+1}$ непусто (т.к. $\operatorname{int} F_{n+1} = \emptyset$ по предположению и интервал (a_n, b_n) не может целиком во множестве F_{n+1} содержаться) и открыто (почему?), поэтому мы можем выбрать отрезок $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset (a_n, b_n) \backslash F_{n+1}$.

Продолжая индуктивно этот процесс, построим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ со свойством $[a_n, b_n] \cap F_k = \emptyset$ для всех $k = 1, \ldots, n$ и всех $n \in \mathbb{N}$. По теореме Кантора о вложенных отрезках [1, теорема 1, §8, Глава 1]

$$\exists\, x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n],$$

при этом $x_0 \notin F_n$ для всякого n. Действительно, если мы предположим, что $x_0 \in F_n$, то получаем противоречие: $x_0 \in [a_n, b_n] \cap F_n = \emptyset$.

Противоречие показывает, что наше допущение о пустоте внутренности всех F_n неверно. □

2. Несколько слов о мощности множеств

В курсе лекций было доказано, что множество рациональных чисел счетно, а множество вещественных чисел на любом промежутке (отличном от точки) несчетно. В данном разделе мы сделаем несколько замечаний о понятии *равномощные* множества.

Будем говорить, что множество A *равномощно* множеству B, если между элементами A и B можно установить взаимно однозначное соответствие. Будем обозначать равномощность множеств $A \sim B$.

Покажем, например, что любой отрезок $[a, b]$ равномощен любому полуинтервалу $[c, d)$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$. Достаточно показать, что $[0, 1] \sim [0, 1)$ (почему?). Функцию, которая задает взаимно однозначное соответствие между элементами $[0, 1]$ и $[0, 1)$, можно выписать явно:

$$\varphi : [0, 1] \to [0, 1), \qquad \varphi(x) = x \text{ при } x \in [0, 1] \backslash \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty};$$

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} \text{ при } n \in \mathbb{N}.$$

Будем говорить, что мощность множества B *больше* мощности множества A, если во множестве B есть часть, равномощная множеству A, и между элементами множеств A и B нельзя установить взаимно однозначное соответствие.

Счетное множество — самое «маленькое» бесконечное множество.

Упражнение 1. Пусть A — непустое бесконечное множество (количество элементов множества A не конечно). Докажите, что A содержит счетное подмножество.

Множество, равномощное $[0, 1]$, принято называть *континуум.* Принято говорить, что мощность множества A есть c, если множество A равномощно отрезку $[0, 1]$.

Вопрос о существовании множества промежуточной мощности между счетным множеством и множеством мощности континуум составляет известную *континуум-гипотезу.* Оказывается, контнум- гипотеза является независимой от остальной теоретико-множественной аксиоматики. Это доказал Курт Гедель в 1940 году.

Пример 1. Рассмотрим все возможные числовые функции, определенные на отрезке $[0, 1]$. Обозначим множество этих функций через Φ. Покажем, что мощность Φ больше, чем c.

Во-первых, множество функций $\{x + a\}_{a \in [0,1]}$ равномощно $[0, 1]$, т.е. имеет мощность c. Осталось показать, что не существует взаимно однозначного соответствия между элементами множеств Φ и $[0, 1]$. Допустим, существует биекция $\varphi : [0, 1] \to \Phi$, для каждого $t \in [0, 1]$

$\varphi : t \to f(t,x) \in \Phi$. Первый аргумент t у f показывает, какому числу функция соответствует во множестве $[0,1]$, вторая переменная x — аргумент функции. Легко видеть, что функция f определена при всех $t, x \in [0,1]$.

Рассмотрим функцию $F(x) = f(x,x) + 1$, $x \in [0,1]$. Она корректно определена, и, в силу предположения, найдется число $t_0 \in [0,1]$ такое, что $\varphi : t_0 \to f(t_0, x) = F(x) = f(x,x) + 1$. Но при $x = t_0$ получаем противоречие: $f(t_0,t_0) = f(t_0,t_0)+1$. Значит биекции φ не существует.

Пример 2. Пусть A — непустое множество. Обозначим через 2^A множество всех подмножество множества A: это $\emptyset$, A, одноточечные подмножества (элементы A), двухточечные подмножества (пары элементов из A) и т. д.

Покажем, что мощность 2^A больше мощности A.

Ясно, что 2^A содержит подмножество отноточечных подмножеств из A? которое равномощно A.

Допустим, A равномощно 2^A. Тогда существует биекция $\varphi : A \to 2^A$: для каждого $x \in A$ $\varphi(x) \in 2^A$. Разобьем элементы A на 2 класса:
1) $x \in A$ из первого класса, если $x \in \varphi(x)$ и
2) $x \in A$ из второго класса, если $x \notin \varphi(x)$, пусть $S = \{x \in A \mid x \notin \varphi(x)\}$.

Поскольку $S \in 2^A$, то найдется элемент $x_0 \in A$ такой, что $\varphi(x_0) = S$.

Если предположить, что x_0 из первого класса элементов, то $x_0 \in \varphi(x_0) = S$, что противоречит определению S (в S содержатся только такие $x \in A$, для которых $x \notin \varphi(x)$).

Если предположить, что x_0 из второго класса элементов, то $x_0 \notin \varphi(x_0) = S$, что опять противоречит определению S: поскольку $x_0 \notin \varphi(x_0)$, то по определению S должно быть выполнено включение $x_0 \in S$.

Противоречие вызвано допущением существования биекции φ. Поэтому A и 2^A не равномощны.

Пример 3. Покажем, что подмножество вещественных чисел $[0,1)$ равномощно множеству

$$\mathcal{N} = \{(n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots) \mid n_m \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\},$$

т.е. множеству *всех* последовательностей, составленных из натуральных чисел.

Для установления биекции между $[0,1)$ и $\mathcal{N}$ рассмотрим двоичную запись каждого числа $x \in [0,1)$ в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} := \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{2^k}, \quad a_k \in \{0,1\}\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Иными словами,

$$x = 0, a_1 a_2 \ldots a_k \ldots, \tag{2.1}$$

где a_k — цифры (0 или 1) в двоичной форме записи числа $x \in [0,1)$.

Легко видеть, что двоично-рациональные числа вида $x = \frac{2m-1}{2^n}$, $m = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$, имеют 2 формы записи: в виде дроби с единицей в периоде в конце и в виде конечной дроби (с нулем в периоде в конце). Например,

$$\frac{1}{2} = 0,1000\ldots, \qquad \text{и} \quad \frac{1}{2} = 0,01111\ldots.$$

Остальные числа $x \in [0,1)$ записываются однозначно.

Договоримся не использовать запись числа $x \in [0,1)$ вида (2.1) с единицей в периоде в конце.

Таким образом, каждому числу $x \in [0,1)$ мы ставим единственным образом в соответствие его двоичное представление вида (2.1), в котором среди цифр $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ бесконечно много нулей.

Пусть для числа x вида (2.1) нули стоят на местах k_1, k_2, ..., (и $k_m < k_{m+1}$ для всех $m \in \mathbb{N}$) т.е. $a_{k_m} = 0$ для всех $m \in \mathbb{N}$, а остальные цифры равны 1.

Тогда биекция задается соотношением

$$n_1 = k_1, \quad n_{m+1} = k_{m+1} - k_m. \tag{2.2}$$

Действительно, по каждому $x \in [0,1)$ строится последовательность натуральных чисел $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$.

Если же мы берем произвольную последовательность натуральных чисел $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$, то по формуле (2.2) восстанавливается строго монотонная последовательность $\{k_m\}_{m=1}^{\infty}$ натуральных чисел, а далее и число x: для этого в формуле (2.1) в k_m-е разряды после запятой надо поставить цифру 0, а в остальные — 1.

Поскольку все неодноточечные промежутки равномощны, то множество $\mathcal{N}$ равномощно и любому отрезку $[a,b]$, $a < b$.

Пример 4. Отрезок $[0,1]$ равномощен квадрату стандартной декартовой плоскости $K = \{(x_1, x_2) \mid x_i \in [0,1],\ i = 1, 2\}$.

Пусть $(x_1, x_2) \in K$. Отрезок $[0,1]$ абсцисс и ординат равномощен $\mathcal{N}$, т.е. всякому числу $x_1 \in [0,1]$ соответствует последовательность $\{n_m^1\}_{m=1}^{\infty}$, а числу x_2 — последовательность $\{n_m^2\}_{m=1}^{\infty}$ (построенные по формуле (2.2) из предыдущего примера 3). Тогда точке (x_1, x_2) поставим в соответствие последовательность

$$\{k_l\}_{l=1}^{\infty} = \{n_1^1, n_1^2, n_2^1, n_2^2, n_3^1, n_3^2, \ldots, n_m^1, n_m^2, \ldots\},$$

т.е. $k_{2m-1} = n^1_m$, а $k_{2m} = n^2_m$, $m \in \mathbb{N}$.

Ясно, что, перебирая всевозможные последовательности натуральных чисел $\{n^1_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{n^2_m\}_{m=1}^{\infty}$ (т.е. всевозможные абсциссы x_1 и ординаты x_2), мы получим всевозможные последовательности $\{k_l\}_{l=1}^{\infty}$. В свою очередь из последовательности натуральных чисел $\{k_l\}_{l=1}^{\infty}$ однозначно по указанному выше правилу восстанавливаются последовательности $\{n^1_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{n^2_m\}_{m=1}^{\infty}$. Отсюда вытекает, что множество точек квадрата равномощно $\mathcal{N}$, а значит, и $[0,1]$.

Упражнение 2. Докажите, что множество функций Φ из примера 1 равномощно множеству всех подмножеств $[0,1]$, т.е. $2^{[0,1]}$.

Упражнение 3. Докажите, что единичный отрезок равномощен телесному кубу с ребром 1.

Упражнение 4. Пусть $V \subset \mathbb{R}$ — открытое подмножество. Докажите, что V есть не более чем счетное (т.е. конечное или счетное) объединение непересекающихся открытых интервалов.

Упражнение 5. Замкнутое множество F будем называть *совершенным,* если для любой точки $x_0 \in F$ найдется последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F\backslash\{x_0\}$, сходящаяся к точке x_0: $x_n \to x_0$. Докажите, что всякое замкнутое совершенное множество несчетно.

Указание. Воспользуйтесь идеей из доказательства теоремы Бэра.

Заметим, что всякое замкнутое совершенное множество имеет мощность c, однако это более сложный результат.

Упражнение 6. Докажите, что всякое замкнутое подмножество $F \subset \mathbb{R}$ можно представить как объединение замкнутого совершенного множества и не более чем счетного множества.

3. Несколько слов о непрерывных функциях

В настоящем разделе мы рассмотрим свойства функции $f : X \to Y$, где $X, Y \subset \mathbb{R}$ (и ниже в настоящем разделе мы будем везде это предполагать, если не оговорено противное), которая непрерывна на множестве X. Последнее означает, что функция f непрерывна в каждой точке множества X, т.е. для всякой точки $x_0 \in X$ выполнено свойство

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap X = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X \\ f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0)).\end{gathered} \tag{3.3}$$

Договоримся обозначать $f(X) = \{f(x) \in Y \mid x \in X\}$. Выражение $f : X \to Y$ означает, что $f(X) \subset Y$, но может быть $f(X) \neq Y$. Будем говорить, что $f : X \to Y$ отображает X *на* Y, (или f является отображением *на*), если $f(X) = Y$.

Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f : X \to Y$, $E \subset Y$. Тогда *прообразом* множества E называется множество $f^{-1}(E) = \{x \in X \mid f(x) \in E\}$.

Упражнение 1. Пусть функция $f : X \to Y$. 1) Пусть $E \subset Y$. Докажите, что $f\left(f^{-1}(E)\right) = E$. 2) Пусть $E \subset X$. Докажите, что $f^{-1}(f(E)) \supset E$, причем равенства в последнем включении может не быть.

Оказывается, существует полезное определение непрерывности через понятие прообраза множества.

Теорема 3.3. *Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна на X. Тогда это эквивалентно тому, что для всякого открытого множества $V \subset \mathbb{R}$ множество $f^{-1}(V)$ открыто в X.*

Доказательство. Зафиксируем открытое подмножество $V \subset \mathbb{R}$. Пусть функция непрерывна на X в смысле формулы (3.3). Если $f^{-1}(V) = \emptyset$, то, поскольку пустое множество по определению и открыто, и замкнуто, все доказано.

Пусть $f^{-1}(V) \neq \emptyset$. Зафиксируем $x_0 \in f^{-1}(V)$, т.е. $f(x_0) \in V$. Поскольку V открыто, то найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(f(x_0)) \subset V$. В силу непрерывности f в точке $x_0 \in X$ получаем, что для нашего $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$ (см. (3.3)), что для всех $x \in U_\delta(x_0) \cap X$ имеем $f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$, или же $f\left(U_\delta(x_0) \cap X\right) \subset U_\varepsilon(f(x_0)) \subset V$. Отсюда следует, что $U_\delta(x_0) \cap X \subset f^{-1}(V)$, $\delta > 0$, т.е. множество $f^{-1}(V)$ открыто в X.

Пусть теперь функция f такова, что для всякого открытого множества $V \subset \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}(V)$ открыт в X. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, $x_0 \in X$, и рассмотрим открытое множество $U_\varepsilon(f(x_0))$. По условию множество $f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0)))$ открыто в X и очевидно, что $x_0 \in f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0)))$. Поэтому найдется число $\delta > 0$, для которого

$$U_\delta(x_0) \cap X \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(x_0))).$$

Итак, для всякой точки $x_0 \in X$ и числа $\varepsilon > 0$ мы можем найти такое число $\delta > 0$, что при всяком $x \in U_\delta(x_0) \cap X$ выполнено включение $f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$. Но это и означает по формуле (3.3) непрерывность функции f в точке x_0. $\square$

Упражнение 2. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна на множестве X. Докажите, что это эквивалентно следующему утверждению: для любого замкнутого множества $F \subset \mathbb{R}$ множество $f^{-1}(F)$ замкнуто в X.

Упражнение 3. Пусть $f : X \to Y$. Докажите, что функция f непрерывна на X тогда и только тогда, когда для любого открытого в Y подмножества V множество $f^{-1}(V)$ открыто в X.

Покажем, как с помощью теоремы 3.3 доказать некоторые утверждения.

Теорема 3.4. *(Вейерштрасс) Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна на компактном множестве $X \subset \mathbb{R}$. Тогда множество $f(X)$ компактно в X.*

Доказательство. Пусть $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — произвольное открытое покрытие множества $f(X)$:

$$f(X) \subset \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha.$$

Взяв прообраз от обеих частей последнего включения, получаем

$$X \subset f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} V_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} f^{-1}(V_\alpha)$$

(объясните, почему верно последнее равенство в предыдущей формуле?). Поскольку по теореме 3.3 каждое из множеств $f^{-1}(V_\alpha)$ открыто в X, то по свойству Гейне–Бореля (теорема 1.1) существует конечное подпокрытие

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{N} f^{-1}(V_{\alpha_k}).$$

В силу упражнения 1 часть 1) из настоящего раздела получаем, что

$$f(X) \subset \bigcup_{k=1}^{N} V_{\alpha_k},$$

т.е. для множества $f(X)$ выполняется свойство Гейне–Бореля, а значит, по теореме 1.1 оно компактно. □

Упражнение 4. Докажите, что если $Y \subset \mathbb{R}$ — компактное подмножество, то существует $m = \min Y \in \mathbb{R}$ и $M = \max Y \in \mathbb{R}$. Докажите далее, что в условиях теоремы 3.4 найдутся точки $x_1, x_2 \in X$, для которых $f(x_1) = \inf\limits_{x\in X} f(x)$, а $f(x_2) = \sup\limits_{x\in X} f(x)$.

Пусть функция $f : X \to Y$ отображает X на Y. Функция $h : Y \to X$ называется обратной к f, если для любого $x \in X$ выполнено равенство $h(f(x)) = x$. Напомним, что для существования обратной функции к f, отображающей X на Y, необходима и достаточна *инъективность* f, т.е. если $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$ [1, лемма 2, §8, глава 2].

Упражнение 5. Пусть $f : X \to Y$ отображает X на Y и $h : Y \to X$ — обратная к функции f. Докажите, что для всякого числа $y \in Y$ выполнено $f(h(y)) = y$, т.е. в свою очередь функция f — обратная к функции h.

Теорема 3.5. *Пусть функция $f : X \to Y$ непрерывна на компактном множестве $X \subset \mathbb{R}$ и отображает X на Y. Пусть $h : Y \to X$ — обратная функция к функции f. Тогда функция h непрерывна на множестве Y.*

Доказательство. Так как h — обратная функция к функции f, то, по теореме 3.3, достаточно доказать, что для любого открытого в X подмножества $V \subset X$ множество

$$h^{-1}(V) = \{y \in Y \mid h(y) \in V\} = \{y \in Y \mid y \in f(V)\} = f(V)$$

открыто в Y. Множество $X\backslash V$ замкнуто в компактном X, следовательно, оно замкнуто, ограничено и само является компактным. По теореме 3.4 множество $f(X\backslash V)$ компактное. Так как $f(V) \cup f(X\backslash V) = Y$ (почему?), то множество $h^{-1}(V) = f(V) = Y\backslash f(X\backslash V)$ открыто в Y (см. упражнение 3). □

Упражнение 6. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и переводит всякий открытый промежуток в открытый промежуток. Докажите, что функция f строго монотонна.

Упражнение 7. Докажите, что множество непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ имеет мощность c.

Указание. Для определения непрерывной функции во всех точках отрезка $[0, 1]$ достаточно знать ее значения в рациональных точках отрезка $[0, 1]$.

Пример 1. Пусть функция $f : [a, b] \to [a, b]$ непрерывна на $[a, b]$. Докажем, что существует точка $x_0 \in [a, b]$: $x_0 = f(x_0)$.

Рассмотрим функцию $g(x) = x - f(x)$. Имеем $g(a) = a - f(a) \leq 0$ (т.к. $f(a) \in [a, b]$) и $g(b) = b - f(b) \geq 0$. По теореме о промежуточных значениях Больцано–Коши найдется точка $x_0 \in [a, b]$ такая, что $g(x_0) = x_0 - f(x_0) = 0$.

Упражнение 8. Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$ и $[a, b] \subset f([a, b])$. Докажите, что существует точка $x_0 \in [a, b]$: $x_0 = f(x_0)$.

Пример 2. Пусть функция $f : [a, b] \to [a, b]$ непрерывна на $[a, b]$ и монотонно возрастает на $[a, b]$. Тогда для любой точки $x_1 \in [a, b]$

рекуррентная последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$ сходится к одному из решений уравнения $x = f(x)$. Отметим, что в силу включения $f([a,b]) \subset [a,b]$ последовательность $\{x_n\}$ определена корректно.

Пусть $x_2 = f(x_1)$. Рассмотим 2 случая.

Случай 1: $x_1 \le x_2$. Тогда (в силу монотонного возрастания f) $x_3 = f(x_2) \ge f(x_1) = x_2$ и по индукции из $x_{n-1} \le x_n$ вытекает, что $x_{n+1} = f(x_n) \ge f(x_{n-1}) = x_n$. Итак, последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает и ограничена. По теореме Вейерштрасса о монотонной последовательности $x_n \to x_0 \in [a,b]$. Переходя к пределу в равенстве $x_{n+1} = f(x_n)$ и учитывая непрерывность f, получаем, что $x_0 = f(x_0)$.

Случай 2: $x_1 > x_2$. Повторяя рассуждения из случая 1, получаем, что $\{x_n\}$ монотонно убывает. Далее рассуждения повторяют случай 1.

Интересно отметить, что если заменить условие монотонного возрастания f на монотонное убывание, то результат примера 2 становится неверным. Например, для функции $f : [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = 1-x$, для любой точки $x_1 \in [0,1]\backslash\{\frac{1}{2}\}$ последовательность $\{x_n\}$ не сходится.

Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *полунепрерывной снизу* в точке $x_0 \in X$, если для любой последовательности точек $\{x_n\} \subset X$, $x_n \to x_0$, выполнено условие

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \ge f(x_0)$$

($\liminf$ — знак нижнего предела).

Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *полунепрерывной сверху* в точке $x_0 \in X$, если для любой последовательности точек $\{x_n\} \subset X$, $x_n \to x_0$, выполнено условие

$$\limsup_{n\to\infty} f(x_n) \le f(x_0)$$

($\limsup$ — знак верхнего предела).

Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется полунепрерывной снизу (сверху) на множестве $X \subset \mathbb{R}$, если она полунепрерывна снизу (сверху) в каждой точке множества X.

Упражнение 9. Докажите, что функция $f : U_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$, $\delta > 0$, непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она полунепрерывна снизу и сверху в точке x_0.

Упражнение 10. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу на множестве $X \subset \mathbb{R}$. Докажите, что для каждого $\mu \in \mathbb{R}$ нижние множества уровня f вида

$$\{x \in X \mid f(x) \le \mu\}$$

замкнуты в X. Какой аналог имеет это утверждение для полунепрерывной сверху функции?

Упражнение 11. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ имеет замкнутые нижние множества уровня f, т.е. для каждого $\mu \in \mathbb{R}$ множество

$$\{x \in X \mid f(x) \le \mu\}$$

замкнуто в X. Докажите, что функция f полунепрерывна снизу на множестве X. Какой аналог имеет это утверждение для полунепрерывной сверху функции?

Упражнение 12. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу на компактном множестве $X \subset \mathbb{R}$. Докажите, что существует точка $x_0 \in X$ такая, что

$$f(x_0) = \inf_{x\in X} f(x).$$

Какой аналог имеет это утверждение для полунепрерывной сверху функции?

Пример 3. Покажем, что не существует функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая непрерывна в рациональных точках и разрывна в иррациональных точках.

Допустим, функция с таким свойством существует. Определим колебание функции f на множестве $E \subset \mathbb{R}$:

$$\Omega_f(E) = \sup_{x_1,x_2\in E} |f(x_2) - f(x_1)| = \sup_{x_1,x_2\in E} (f(x_2) - f(x_1))$$

(объясните исчезновение модуля в последнем равенстве) и колебание функции f в точке x_0:

$$\omega_f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \Omega_f\left(\left[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right]\right).$$

Отметим, что в силу определения $\Omega_f(E) \ge 0$. Кроме того, если $[a,b] \subset [c,d]$, то $\Omega_f([a,b]) \le \Omega_f([c,d])$. Отсюда следует, что последовательность $\left\{\Omega_f\left(\left[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right]\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывает и ограничена снизу нулем, а значит, величина $\omega_f(x_0)$ определена корректно и является неотрицательной.

Покажем, что функция f непрерывна в точке x_0 в том и только том случае, когда $\omega_f(x_0) = 0$. Допустим, что f разрывна в точке x_0, т.е.

$$\exists\, \varepsilon > 0 \forall \delta > 0\ \exists\, x_\delta \in U_\delta(x_0):\ |f(x_\delta) - f(x_0)| \ge \varepsilon.$$

Взяв $\delta_n = \frac{1}{n}$, получаем для $x_{\delta_n} \in U_{\delta_n}(x_0)$, что

$$\Omega_f\left(\left[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right]\right) \geq |f(x_{\delta_n}) - f(x_0)| \geq \varepsilon > 0$$

для всех $n \in \mathbb{N}$, откуда $\omega_f(x_0) \geq \varepsilon > 0$. Таким образом, из условия $\omega_f(x_0) = 0$ следует непрерывность f в точке x_0.

Аналогично докажите самостоятельно, что условие непрерывности f в точке x_0 влечет $\omega_f(x_0) = 0$.

Итак, множество точек, где функция f разрывна, имеет вид $\{x \in \mathbb{R} \mid \omega_f(x) > 0\}$. Представим это множество в виде

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \omega_f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, \quad \text{где } F_n = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \omega_f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$$

(объясните справедливость предыдущего равенства).

Покажем, что любое из множеств F_n замкнуто. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset F_n$, $x_k \to x_0$. Покажем, что $x_0 \in F_n$. Пусть $m \in \mathbb{N}$, оценим снизу $\Omega_f\left(\left[x_0 - \frac{1}{m}, x_0 + \frac{1}{m}\right]\right)$.

Так как $x_k \to x_0$, то найдется k такое, что

$$|x_k - x_0| < \frac{1}{3m}. \tag{3.4}$$

Так как $x_k \in F_n$, то $\omega_f(x_k) \geq \frac{1}{n}$, а значит, и для любого $l \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\Omega_f\left(\left[x_k - \frac{1}{l}, x_k + \frac{1}{l}\right]\right) \geq \frac{1}{n}.$$

Взяв $l = 3m$, получаем, что

$$\Omega_f\left(\left[x_k - \frac{1}{3m}, x_k + \frac{1}{3m}\right]\right) \geq \frac{1}{n}. \tag{3.5}$$

Из формулы (3.4) получаем включение

$$\left[x_k - \frac{1}{3m}, x_k + \frac{1}{3m}\right] \subset \left[x_0 - \frac{1}{m}, x_0 + \frac{1}{m}\right],$$

а из формулы (3.5) вытекает, что

$$\Omega_f\left(\left[x_0 - \frac{1}{m}, x_0 + \frac{1}{m}\right]\right) \geq \Omega_f\left(\left[x_k - \frac{1}{3m}, x_k + \frac{1}{3m}\right]\right) \geq \frac{1}{n}.$$

Поскольку последнее неравенство верно при всех $m \in \mathbb{N}$, то $x_0 \in F_n$.

Итак, множество точек разрыва f разбито на замкнутые множества F_n и по предположению

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \mathbb{R} \backslash \{r_n\}_{n=1}^{\infty},$$

где $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ — занумерованное множество рациональных чисел. Пусть $D_n = F_n \cup \{r_n\}$, тогда D_n замкнуто для всех n и

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \mathbb{R}.$$

По теореме 1.2 (Бэра) существует натуральное $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\operatorname{int} D_n \neq \emptyset$, а значит, $\operatorname{int} F_n = \operatorname{int}(D_n \backslash \{r_n\}) \neq \emptyset$. Но тогда F_n содержит некоторый открытый интервал, на котором обязательно найдется рациональное число. Это противоречит непрерывности f в рациональных числах.

Пример 4. Покажем, что для любой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ множество точек разрыва 1-го рода не более чем счетно.

Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — множество точек разрыва первого рода функции f. Тогда, как и в предыдущем примере 3, легко показать, что

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n, \qquad \text{где } X_n = \left\{x \in X \mid \omega_f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$$

(покажите!). Допустим, что X несчетно. Тогда хотя бы одно из множеств X_n несчетно (поскольку счетное объединение счетных множеств счетно).

Пусть для некоторого $n \in \mathbb{N}$ множество X_n несчетно. Тогда у множества X_n существует предельная точка, т.е. точка $x_0 \in X_n$ такая, что существует $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X_n \backslash \{x_0\}$ со свойством $x_k \to x_0$. Это легко показать от противного: если такой точки x_0 нет, то каждая точка множества X_n изолирована, т.е. для каждой точки $x \in X_n$ найдется число $\delta(x) > 0$ такое, что $U_{\delta(x)}(x) \cap X_n = \{x\}$. Тогда выберем в каждом из непересекающихся интервалов $\{U_{\delta(x)}(x)\}_{x \in X_n}$ по рациональному числу. Полученное множество рациональных чисел не более чем счетно. Получаем, что множество интервалов, а значит, и множество X_n, не более чем счетно. Противоречие.

Без ограничения общности можно считать, что $x_0 < x_k$ для всех k. Поскольку $x_k \in X_n$, то, как было показано в предыдущем примере,

$$\Omega_f\left(\left[x_k - \frac{1}{m_k}, x_k + \frac{1}{m_k}\right]\right) \geq \frac{1}{n}$$

для всех чисел $m_k \in \mathbb{N}$. Выберем натуральные m_k для каждого k из условия $\frac{1}{m_k} < x_k - x_0$, заметим $\frac{1}{m_k} \to 0$. Из определения колебания функции на множестве следует, что найдутся точки $y_k, z_k \in \left[x_k - \frac{1}{m_k}, x_k + \frac{1}{m_k}\right]$ такие, что $|f(y_k) - f(z_k)| \geq \frac{1}{2n}$. По построению $y_k \to x_0 + 0$, $z_k \to x_0 + 0$, поэтому в любой правой окрестности точки x_0 вида $(x_0, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, найдутся точки y_k и z_k с достаточно большими номерами k. Итак,

$$\forall \delta > 0 \, \exists y_k, z_k \in (x_0, x_0 + \delta) : \quad |f(y_k) - f(z_k)| \geq \frac{1}{2n} > 0.$$

Это противоречит условию Коши существования конечного предела справа. Противоречие показывает, что допущение о несчетности множества точек разрыва первого рода неверно.

4. О производной

Заметим, что вычисление производной

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

регламентируется следующими правилами.

Теорема 4.6. *Пусть $x \in (a,b)$, функция $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ имеет производную в точке x. Тогда для любых последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$: $a < a_n < x < b_n < b$ для всех n со свойством $a_n \to x - 0$, $b_n \to x + 0$ выполнено условие*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(x).$$

Доказательство. Легко проверить, что

$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n - a_n} - f'(x) = \lambda_n \left(\frac{f(b_n) - f(x)}{b_n - x} - f'(x) \right) + \\ + (1 - \lambda_n) \left(\frac{f(a_n) - f(x)}{a_n - x} - f'(x) \right),$$

где $\lambda_n = \frac{b_n - x}{b_n - a_n} \in (0,1)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поскольку выражения в скобках в предыдущей формуле стремятся к нулю по определению производной f в точке x, а последовательности λ_n и $1 - \lambda_n$ ограничены, то последовательность в левой части бесконечно малая. □

Пример 1. Пусть $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ дифференцируема, $x \in (a,b)$. Последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $x < a_n < b_n < b$ для всех n, сходятся: $a_n \to x + 0$, $b_n \to x + 0$. Тогда *не обязательно*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(x).$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0. \end{cases}$$

Определим $a_n = (2\pi n)^{-1}$, $b_n = \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)^{-1}$. Пусть $x = 0$. Тогда

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

(докажите предыдущее равенство). Однако $f'(0) = 0$.

Упражнение 1. Покажите, что если, дополнительно к условию предыдущего примера 1, последовательность $\left\{\frac{b_n - x}{b_n - a_n}\right\}$ ограничена, то

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(x).$$

5. Теорема о промежуточных значениях производной

Теорема 5.7. *(Дарбу). Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ дифференцируема (т.е. существует конечная производная $f'(x)$ для всякого $x \in (a,b)$, а также конечные односторонние производные $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$), $c \in \mathbb{R}$ и $f'_+(a) < c < f'_-(b)$. Тогда найдется точка $x_0 \in (a,b)$ такая, что $f'(x_0) = c$.*

Доказательство. В силу предельных соотношений

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_+(a), \quad \lim_{h \to +0} \frac{f(b-h) - f(b)}{-h} = f'_-(b)$$

найдется такое число $h \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right)$, что

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'_+(a) \right| < \frac{c - f'_+(a)}{2},$$

$$\left|\frac{f(b-h)-f(b)}{-h} - f'_-(b)\right| < \frac{f'_-(b)-c}{2},$$

откуда имеем неравенства

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < c < \frac{f(b-h)-f(b)}{-h} = \frac{f(b)-f(b-h)}{h}. \qquad (5.6)$$

Определим функцию $\varphi(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при $x \in [a, b-h]$. Функция φ непрерывна на отрезке $[a, b-h]$ и в силу (5.6) $\varphi(a) < c < \varphi(b-h)$. По теореме Больцано–Коши о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции получаем, что найдется точка $\xi \in (a, b-h)$, для которой $\varphi(\xi) = \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} = c$.

Применяя к функции $f : [\xi, \xi+h] \to \mathbb{R}$ теорему Лагранжа о среднем, получаем, что для некоторой точки $x_0 \in (\xi, \xi+h)$ справедливо равенство

$$c = \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} = \frac{f'(x_0)h}{h} = f'(x_0).$$

□

6. Некоторые свойства выпуклых функций

Напомним, что функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ $(a, b \in \overline{\mathbb{R}})$ *выпуклая* (устаревшее название: *выпуклая вниз*), если $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, $\forall t \in (0, 1)$ имеет место неравенство

$$f\left((1-t)x_1 + tx_2\right) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ $(a, b \in \overline{\mathbb{R}})$ *вогнутая* (устаревшее название: *выпуклая вверх*), если функция $-f$ выпуклая.

Упражнение 1. Пусть функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ выпуклая и $f'(x_0) = 0$ для некоторой точки $x_0 \in (a, b)$. Докажите, что для любой точки $x \in (a, b)$ выполнено неравенство $f(x_0) \leq f(x)$, т.е. точка x_0 является точкой глобального минимума f на промежутке (a, b).

Лемма 6.2. *Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ выпуклая и $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$ для некоторой точки $x_0 \in (a, b)$. Тогда*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \forall x \in (a, b). \qquad (6.7)$$

Доказательство. Зафиксируем $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$ (при $x = x_0$ формула (6.7) очевидна). Запишем условие выпуклости f:

$$f\left((1-t)x_0 + tx\right) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x)$$

в виде

$$\frac{f\left(x_0 + t(x - x_0)\right) - f(x_0)}{t} \leq f(x) - f(x_0),$$

или, что то же,

$$(x - x_0)\frac{f\left(x_0 + t(x - x_0)\right) - f(x_0)}{(x - x_0)\,t} \leq f(x) - f(x_0).$$

Переходя к пределу $t \to 0$ и производя замену переменной $\Delta x = (x - x_0)t$, по теореме о замене переменной при предельном переходе [1, теорема 3 (a), §6, глава 2] получаем, что

$$\lim_{t\to 0} \frac{f\left(x_0 + t(x - x_0)\right) - f(x_0)}{(x - x_0)\,t} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

а последний предел равен $f'(x_0)$, откуда следует формула (6.7). □

Лемма 6.3. *Пусть функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ дифференцируема и f' нестрого монотонно возрастает на промежутке (a, b). Тогда для любой пары точек $x_0, x \in (a, b)$ выполнено неравенство (6.7).*

Доказательство. Применяя к функции f на отрезке с концами в точках x_0 и x теорему Лагранжа о среднем, получаем, что для некоторой точки ξ между x_0 и x выполнено равенство

$$\begin{aligned}&f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \\ &= f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \left(f'(\xi) - f'(x_0)\right)(x - x_0).\end{aligned}$$

Если $x < x_0$, то $\xi \in (x, x_0)$ и $f'(\xi) \leq f'(x_0)$, т.е. выполнена формула (6.7).

Если $x > x_0$, то $\xi \in (x_0, x)$ и $f'(x_0) \leq f'(\xi)$, т.е. снова выполнена формула (6.7). □

Теорема 6.8. *Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ дифференцируема. Тогда выпуклость функции f на промежутке (a, b) эквивалентна нестрого монотонному возрастанию функции f' на (a, b).*

Доказательство. Пусть f выпукла, $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$. По формуле (6.7) леммы 6.2 имеем неравенства

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1), \qquad (6.8)$$

$$f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2). \tag{6.9}$$

Складывая неравенства (6.8) и (6.9) почленно и сокращая на $f(x_1)+f(x_2)$, получаем, что

$$0 \geq (f'(x_1) - f'(x_2))(x_2 - x_1).$$

В силу $x_2 - x_1 > 0$ из последнего неравенства следует, что $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, т.е. f' нестрого монотонно возрастает на промежутке (a,b).

Пусть f' нестрого монотонно возрастает на промежутке (a,b). Зафиксируем $x_1, x_2 \in (a,b)$, $t \in (0,1)$ и определим точку $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2$. По формуле (6.7) (которая теперь следует из леммы 6.3) получаем, что

$$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0), \tag{6.10}$$

$$f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0). \tag{6.11}$$

Умножив неравенство (6.10) на $1-t$, а неравенство (6.11) на t, сложим их и получим (напомним, что $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2$)

$$(1-t)f(x_1) + tf(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)((1-t)x_1 + tx_2 - x_0) = f(x_0),$$

т.е. неравенство из определения выпуклой функции. □

Следствие 6.1. *Пусть функция $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ выпуклая и дифференцируемая. Тогда f' — непрерывная функция на промежутке (a,b).*

Доказательство. По теореме 6.8 f' нестрого монотонно возрастает на (a,b). По теореме о пределе монотонной функции [1, теорема 1, §5, глава 2] для всякой точки $x_0 \in (a,b)$ существуют конечные пределы $f'(x_0 \pm 0)$.

По следствию из теоремы Лагранжа о среднем (1, 2) [1, §4, глава 3] имеем

$$f'_-(x_0) = f'(x_0 - 0), \qquad f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0)$$

и, в силу существования производной в точке x_0, $f'(x_0) = f'_\pm(x_0)$. Отсюда следует, что $f'(x_0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0)$. Последнее и означает непрерывность производной в точке x_0. □

Упражнение 2. Пусть функция $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ выпуклая. Докажите, что для любой точки $x \in (a,b)$ существуют односторонние производные $f'_\pm(x) \in \mathbb{R}$. Докажите, что функции $f'_\pm$ нестрого монотонно возрастают на (a,b) и $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ для всех $x \in (a,b)$.

Упражнение 3. Пусть функция $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ выпуклая. Докажите, что найдется не более счетное (т.е. конечное или счетное) подмножество $X \subset (a,b)$ такое, что для любой точки x множества $(a,b)\setminus X$ существует конечная производная $f'(x)$.
Указание. Докажите, что если $x_1 < x_2$, то $f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2)$. Используйте результат упражнения 2.

Теорема 6.9.[1] *Пусть функция $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ выпуклая. Тогда f непрерывна на промежутке (a,b).*

Доказательство. Зафиксируем $x_0 \in (a,b)$. Пусть отрезок $[c,d] \subset (a,b)$ такой, что $x_0 \in (c,d)$. Тогда любая точка $x \in (c,d)$ может быть представлена в виде $x = (1-t)c + td$ для некоторого числа $t \in [0,1]$. Отсюда для любого $x \in [c,d]$ выполнена оценка $f(x) = f((1-t)c+td) \leq (1-t)f(c)+tf(d) \leq \max\{f(c), f(d)\} < +\infty$. Итак, найдется окрестность U точки x_0, в которой функция f ограничена сверху.

Обозначим

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \sup\Big\{\lim_{k\to\infty} f(z_k) \mid \{z_k\}_{k=1}^\infty \subset U - \text{последовательность Гейне в точке } x_0, \text{ для которой существует предел последовательности } \{f(z_k)\}_{k=1}^\infty\Big\}.$$

Поскольку f ограничена сверху на U, то $\limsup\limits_{x\to x_0} f(x) < +\infty$.

Пусть последовательность $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset U$ такова, что $x_k \to x_0$, $x_k \neq x_0$ для всех k и

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \limsup_{x\to x_0} f(x).$$

Упражнение 4. Почему последовательность $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ существует?

Определим $\{y_k\}$ из условия $x_k = \frac{x_0+y_k}{2}$, при этом $y_k \to x_0$. В силу выпуклости f имеем

$$f(x_k) \leq \frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(y_k),$$

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) \leq \tfrac{1}{2}f(x_0) + \tfrac{1}{2}\limsup_{k\to\infty} f(y_k) \leq$$
$$\leq \tfrac{1}{2}f(x_0) + \tfrac{1}{2}\limsup_{x\to x_0} f(x).$$

[1] Теорема не читалась на лекции.

Итак,
$$\limsup_{x\to x_0} f(x) \le f(x_0). \tag{6.12}$$

Обозначим

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) = \inf\Big\{ \lim_{k\to\infty} f(z_k) \mid \{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset U-$$
последовательность Гейне в точке x_0, для которой существует предел последовательности $\{f(z_k)\}_{k=1}^{\infty}\Big\}$.

Пусть последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset U$ такова, что $x_k \to x_0$, $x_k \ne x_0$ для всех k и
$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \liminf_{x\to x_0} f(x).$$
Определим $\{y_k\}$ из условия $x_0 = \frac{x_k+y_k}{2}$, при этом $y_k \to x_0$. В силу выпуклости f имеем
$$f(x_0) \le \frac{1}{2} f(x_k) + \frac{1}{2} f(y_k),$$
откуда
$$f(x_0) \le \tfrac{1}{2}\limsup_{k\to\infty} f(y_k) + \tfrac{1}{2}\lim_{k\to\infty} f(x_k) \le \tfrac{1}{2}\limsup_{x\to x_0} f(x) + \\ + \tfrac{1}{2}\liminf_{x\to x_0} f(x) \le \tfrac{1}{2} f(x_0) + \tfrac{1}{2}\liminf_{x\to x_0} f(x)$$
и
$$f(x_0) \le \frac{1}{2}\liminf_{x\to x_0} f(x).$$

Из последнего неравенства и формулы (6.12) вытекают оценки
$$f(x_0) \le \liminf_{x\to x_0} f(x) \le \limsup_{x\to x_0} f(x) \le f(x_0).$$
Это означает непрерывность f в точке x_0 (почему?). $\square$

Упражнение 5. Функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ выпуклая. Верно ли, что она непрерывна на $[a,b]$?

Упражнение 6. Функция $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ выпуклая. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$, чисел $\{x_k\}_{k=1}^{n} \subset (a,b)$ и $\{t_k\}_{k=1}^{n} \subset [0,1]$: $\sum\limits_{k=1}^{n} t_k = 1$ выполнено неравенство
$$f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k).$$

7. Эквивалентность норм в $\mathbb{R}^n$

Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ в $\mathbb{R}^n$ называются *эквивалентными*, если существуют такие числа $C, D > 0$, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ выполняются неравенства
$$C\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le D\|x\|_1.$$

Теорема 7.10. *Все нормы в $\mathbb{R}^n$ эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $\|x\|_e = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$ — евклидова норма, а $\|x\|$ — некоторая норма. Покажем, что эти две нормы эквивалентны.

Пусть $e_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$ (1 стоит на k-м месте), $1 \le k \le n$.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k \in \mathbb{R}^n$.
$$\|x\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right\| \le \sum_{k=1}^{n} |x_k|\|e_k\| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \|e_k\|^2} = A\|x\|_e,$$
где $A = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \|e_k\|^2} > 0$.

Итак, при $C = A^{-1}$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$ выполнена оценка
$$C\|x\| \le \|x\|_e. \tag{7.13}$$

Допустим, что
$$\forall m \in \mathbb{N} \exists \tilde{x}^{(m)} \in \mathbb{R}^n : \|\tilde{x}^{(m)}\|_e > m\|\tilde{x}^{(m)}\| \ge 0. \tag{7.14}$$
Отсюда, в частности, следует, что $\|\tilde{x}^{(m)}\|_e > 0$ и, значит, $\tilde{x}^{(m)} \ne 0$.

Определим $x^{(m)} = \frac{\tilde{x}^{(m)}}{\|\tilde{x}^{(m)}\|_e}$, $\|x^{(m)}\|_e = 1$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Перепишем условие (7.14) в виде
$$\forall m \in \mathbb{N} \exists x^{(m)} \in \mathbb{R}^n : \|x^{(m)}\|_e = 1 > m\|x^{(m)}\|. \tag{7.15}$$

Рассмотрим последовательность $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$, $m \in \mathbb{N}$, векторов.
$$1 = \|x^{(m)}\|_e^2 = \sum_{l=1}^{n} \left(x_l^{(m)}\right)^2 \ge \left(x_k^{(m)}\right)^2 \qquad \forall k,$$

т.е. последовательности $\{x_k^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ ограничены при всех $1 \le k \le n$.

Выделим по теореме Больцано–Вейерштрасса из ограниченной последовательности $\{x_1^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ сходящуюся $\{x_1^{(m_j)}\}_{j=1}^{\infty}$.

Рассмотрим последовательность $x^{(m_j)} = (x_1^{(m_j)}, \dots, x_n^{(m_j)})$, $j \in \mathbb{N}$, векторов. Последовательность $\{x_2^{(m_j)}\}_{j=1}^{\infty}$ ограничена, следовательно, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_2^{(m_{j_i})}\}_{i=1}^{\infty}$. При этом последовательность $\{x_1^{(m_{j_i})}\}_{i=1}^{\infty}$ будет сходиться как подпоследовательность сходящейся последовательности $\{x_1^{(m_j)}\}_{j=1}^{\infty}$. Поэтому у набора векторов $x^{(m_{j_i})} = (x_1^{(m_{j_i})}, x_2^{(m_{j_i})}, \dots, x_n^{(m_{j_i})})$, $i \in \mathbb{N}$, первые две компоненты образуют сходящиеся последовательности.

Продолжая этот процесс, получим, что можно выделить из набора векторов $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ подпоследовательность векторов (ее мы обозначим через $\{x^{(m_j)}\}_{j=1}^{\infty}$), у которой каждый компонент сходится, т.е. $\lim\limits_{j\to\infty} x_k^{(m_j)} = x_k^0 \in \mathbb{R}$, $1 \le k \le n$.

Определим $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$. Отсюда получаем, что

$$\|x^{(m_j)} - x^0\|_e \to 0, \qquad j \to \infty.$$

Из условия $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(x_k^{(m_j)}\right)^2 = 1$ имеем в пределе по $j \to \infty$, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(x_k^0\right)^2 = 1$, откуда

$$x^0 \neq 0. \tag{7.16}$$

Из условия (7.15) получаем, что

$$\|x^{(m_j)}\| < \frac{1}{m_j} \qquad \forall j. \tag{7.17}$$

Из оценки (7.13) следует ($A = C^{-1}$)

$$\|x^{(m_j)} - x^0\| \le A\|x^{(m_j)} - x^0\|_e \to 0, \qquad j \to \infty. \tag{7.18}$$

Из оценок (7.17) и (7.18) вытекает

$$\|x^0\| \le \|x^{(m_j)}\| + \|x^{(m_j)} - x^0\| \to 0, \qquad j \to \infty,$$

т.е. $\|x^0\| \le 0$ и, в силу аксиом нормы, $x^0 = 0$. Это противоречит (7.16). Следовательно, утверждение (7.14) неверно. □

8. Основная теорема алгебры

Напомним, что комплексное число $z = x + iy \neq 0$ может быть записано в виде $z = \sqrt{x^2+y^2}\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Договоримся для указанного выше числа z выбирать $\varphi \in [0, 2\pi)$ и называть такой угол φ *аргументом* комплексного числа z. Если $z = 0$, то будем считать $\varphi = 0$.

Введем еще одно полезное обозначение: будем *обозначать* комплексное число $\cos\varphi + i\sin\varphi$ через $e^{i\varphi}$, соответственно: $z = x + iy = re^{i\varphi}$, где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, φ — аргумент числа z. Еще раз заметим, что $e^{i\varphi}$ в данном разделе — это более компактная запись для $\cos\varphi + i\sin\varphi$. Число $\sqrt{x^2+y^2}$ называется *модулем* комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $|z|$.

Упражнение 1. Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Докажите, что $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Упражнение 2. Пусть $z_1 = \cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1$, $z_2 = \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2$. Докажите, что

$$z_1 z_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\,,$$

т.е. аргументы при перемножении комплексных чисел складываются. Это, в частности, означает, что $e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

Будем говорить, что многочлен $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k z^k$ с комплексными коэффициентами $c_k \in \mathbb{C}$ имеет степень n, если $c_n \neq 0$.

Лемма 8.4. *(Безу). Пусть $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k z^k$ — многочлен степени n с комплексными коэффициентами $c_k \in \mathbb{C}$ от комплексного переменного z. Тогда если z_0 корень $P(z)$, т.е. $P(z_0) = 0$, то $P(z) = (z - z_0)Q(z)$, где $Q(z)$ — многочлен степени $n - 1$.*

Доказательство. Поделим «уголком» многочлен $P(z)$ на $z - z_0$, получим $P(z) = (z - z_0)Q(z) + R(z)$, где многочлен $R(z)$ — остаток. Поскольку степень $z - z_0$ равна 1, то степень $R(z)$ строго меньше 1, т.е. $R(z) = r \in \mathbb{C}$ — константа. Из равенства $0 = P(z_0) = (z_0 - z_0)Q(z_0) + r$ следует, что $r = 0$. □

Лемма 8.5. *Пусть $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k z^k$ — многочлен степени n с комплексными коэффициентами $c_k \in \mathbb{C}$ от комплексного переменного z. Тогда существует такое комплексное число $z_0 \in \mathbb{C}$, что $\inf\limits_{z\in\mathbb{C}} |P(z)| = |P(z_0)|$.*

Доказательство. В силу неравенства треугольника имеем

$$|P(z)| \geq |c_n| \cdot |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |c_k| \cdot |z|^k = |c_n| \cdot |z|^n \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|c_k|}{|c_n|} \frac{1}{|z|^{n-k}}\right),$$

и поскольку при всех $k \geq 1$

$$\frac{1}{|z|^k} \to 0, \quad |z| \to \infty,$$

то

$$|P(z)| \geq |c_n| \cdot |z|^n \left(1 + o(1)\right), \quad |z| \to \infty.$$

Поэтому найдется такое число $r > 0$, что при всех $|z| > r$ выполнено

$$|P(z)| \geq \frac{1}{2}|c_n| \cdot |z|^n. \tag{8.19}$$

Определим $R = \max\left\{r, \sqrt[n]{\frac{2|P(0)|}{|c_n|}}\right\}$. Если $|z| > R$, то, с учетом определения r из формулы (8.19), имеем

$$|P(z)| \geq \frac{1}{2}|c_n| \cdot |z|^n \geq \frac{1}{2}|c_n| \cdot R^n \geq |P(0)|,$$

т.е.

$$\inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| = \inf_{|z| \leq R} |P(z)|.$$

Поскольку функция $|P(z)|$ непрерывна по z в $\mathbb{C}$, а круг $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ является компактным подмножеством $\mathbb{C}$ (почему?), то по теореме Вейерштрасса найдется точка $z_0 \in \mathbb{C}$, $|z_0| \leq R$, со свойством $|P(z_0)| = \inf\limits_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$. $\square$

Отметим, что модуль не всякого ограниченного снизу многочлена от двух переменных достигает инфимума. Так, многочлен $P(x,y) = x^2 + (xy-1)^2$ обладает свойством $P(x,y) > 0$ для любых вещественных чисел x и y. При этом

$$\inf_{x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}} P(x,y) \leq \lim_{n \to \infty} P\left(\frac{1}{n}, n\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

(почему?), т.е. $\inf\limits_{x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}} P(x,y) = 0$. Этот пример, в частности, показывает, что не всякий многочлен от двух вещественных переменных $P(x,y)$ можно представить как многочлен от комплексной переменной $x + iy$.

Теорема 8.11. *Пусть $P(z)$ — многочлен степени не менее 1 с комплексными коэффициентами. Тогда существует комплексное число $z_0 \in \mathbb{C}$ такое, что $P(z_0) = 0$.*

Доказательство. Пусть степень многочлена n.

В силу леммы 8.5 найдется $z_0 \in \mathbb{C}$ со свойством $|P(z_0)| = \inf\limits_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$. Покажем, что $|P(z_0)| = 0$, а значит, и $P(z_0) = 0$.

Допустим противное: $|P(z_0)| > 0$. Определим $Q(z) = \frac{P(z+z_0)}{P(z_0)}$. Тогда легко видеть, что $Q(z) = 1 + c_k z^k + \cdots + c_n z^n$, где $k \geq 1$ и $c_k \neq 0$, и $|Q(z)| \geq \inf\limits_{z \in \mathbb{C}} |Q(z)| = |Q(0)| = 1$. Обозначим

$$R(z) = \sum_{m=k+1}^{n} c_m z^m.$$

Пусть φ_k — аргумент комплексного числа c_k. Определим точки:

$$z(r) = re^{-\frac{i}{k}\varphi_k + \frac{i\pi}{k}}, \quad r > 0.$$

Тогда

$$Q(z(r)) = 1 + |c_k| e^{i\varphi_k} r^k e^{-i\varphi_k + i\pi} + R(z(r)),$$

где

$$\lim_{r \to +0} \frac{|R(z(r))|}{r^k} = 0.$$

В результате

$$Q(z) = 1 - r^k |c_k| + R(z(r)), \qquad |R(z(r))| = o(r^k), \quad r \to +0.$$

Поэтому найдется такое $\delta > 0$, что при $r \in (0, \delta)$ выполнено неравенство $|R(z(r))| \leq \frac{1}{2} r^k |c_k|$. Выбирая произвольное число $r \in (0, \delta)$, $r < \frac{1}{\sqrt[k]{|c_k|}}$, получаем, что $1 - r^k |c_k| > 0$ и

$$|Q(z(r))| \leq 1 - r^k |c_k| + |R(z(r))| \leq 1 - \frac{1}{2} r^k |c_k| < 1.$$

Итак, нашлась точка $z(r)$ для некоторого $r > 0$, указанного выше, такая, что $|Q(z(r))| < 1 = |Q(0)| = \inf\limits_{z \in \mathbb{C}} |Q(z)|$. Противоречие показывает, что допущение $|P(z_0)| > 0$ неверно. $\square$

Из леммы 8.4 и теоремы 8.11 следует основная теорема алгебры.

Теорема 8.12. *(Основная теорема алгебры). Пусть $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k z^k$, $c_n \neq 0$, — многочлен с комплексными коэффициентами. Тогда*

$$P(z) = c_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k),$$

где $\{z_k\}_{k=1}^n$ — *комплексные корни* $P(z)$.

Обсудим теперь, где расположены корни многочлена.

Теорема 8.13. *Пусть* $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k z^k$ — *многочлен с комплексными коэффициентами и* $c_n = 1$. *Пусть* $M = \max\limits_{1 \le k \le n-1} |c_k|$. *Тогда все корни* $P(z)$ *содержатся в круге*

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le M + 1\}.$$

Доказательство. Имеем оценку

$$|P(z)| \ge |z|^n - M \sum_{k=0}^{n-1} |z|^k = |z|^n - M \frac{1 - |z|^n}{1 - |z|}.$$

Зафиксируем $\alpha \in (0, 1)$. Легко проверить, что при

$$|z| > \frac{M + 1 - \alpha}{1 - \alpha}$$

выполнено неравенство

$$|z|^n - M \frac{1 - |z|^n}{1 - |z|} > \alpha |z|^n,$$

а значит, при $|z| > \frac{M+1-\alpha}{1-\alpha}$ выполнено неравенство $|P(z)| \ge \alpha |z|^n > 0$, т.е. корней нет.

Если $|z| > M + 1$, то в силу равенства

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{M + 1 - \alpha}{1 - \alpha} = M + 1$$

найдется $\alpha \in (0, 1)$ такое, что $|z| > \frac{M+1-\alpha}{1-\alpha}$. Последнее, как мы видели выше, означает, что при данном z выполнено неравенство $|P(z)| \ge \alpha |z|^n > 0$, т.е. $P(z) \ne 0$. Итак, корни могут содержаться только в круге $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le M + 1\}$. $\square$

Литература

1. Иванов Г. Е., Лекции по математическому анализу. Часть 1, М.: МФТИ, 2011. 317 с.