МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Кафедра высшей математики

ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Учебно-методическое пособие

Составитель В.И. Зубов

МОСКВА 2007

УДК 517.586

Рецензент
доктор физико-математических наук, профессор В.И. Жук

Функции Бесселя: Учебно-методическое пособие / Сост.: В.И.Зубов. — М.: МФТИ, 2007. — 51 с.

Пособие посвящено изложению основ теории функций Бесселя первого рода. Предназначено для студентов, изучающих соответствующий раздел курса уравнений математической физики. Доказывается свойство ортогональности функций Бесселя, выводятся рекуррентные соотношения, связывающие их. Изучаются корни функций Бесселя. Рассматривается асимптотика поведения функций Бесселя на бесконечности. Приводится пример использования функций Бесселя для решения краевых задач. Излагаемый материал дает возможность студентам быстрее и эффективнее овладеть основами теории функций Бесселя и способствует развитию у студентов навыков использования специальных функций при решении сложных инновационных задач

УДК 517.586

Введение

Большое число самых разнообразных задач, относящихся практически ко всем важнейшим разделам математической физики и призванных ответить на актуальные технические вопросы, связано с применением функций Бесселя. Функции Бесселя широко используются при решении задач акустики, радиофизики, гидродинамики, задач атомной и ядерной физики. Многочисленны приложения функций Бесселя к теории теплопроводности и теории упругости (задачи о колебаниях пластинок, задачи теории оболочек, задачи определения концентрации напряжения вблизи трещин).

Такая популярность функций Бесселя объясняется тем, что решение уравнений математической физики, содержащих оператор Лапласа в цилиндрических координатах, классическим методом разделения переменных приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению, служащему для определения этих функций.

Функции Бесселя названы по имени немецкого астронома Фридриха Бесселя, который в работе 1824 года, изучая движение планет вокруг солнца, вывел рекуррентные соотношения для функций Бесселя $J_\nu(x)$, получил для целых ν интегральное представление функции $J_\nu(x)$, доказал наличие бесчисленного множества нулей функции $J_0(x)$ и составил первые таблицы для функций $J_0(x)$, $J_1(x)$ и $J_2(x)$.

Однако впервые одна из функций Бесселя $J_0(x)$ была рассмотрена еще в 1732 году Даниилом Бернулли в работе, посвященной колебанию тяжелых цепей. Д. Бернулли нашел выражение функции $J_0(x)$ в виде степенного ряда и заметил (без доказательства), что уравнение $J_0(x) = 0$ имеет бесчисленное множество действительных корней.

Следующей работой, в которой встречаются функции Бесселя, была работа Леонарда Эйлера 1738 года, посвященная изучению колебаний круглой мембраны. В этой работе Л. Эйлер нашел для целых ν выражение функции Бесселя $J_\nu(x)$ в виде ряда по степеням x, а в последующих работах распространил это выражение на случай произвольных значений индекса ν. Кроме того, Л. Эйлер доказал, что для ν, равного целому числу с половиной, функции $J_\nu(x)$ выражаются через элементарные функции. Он заметил (без доказательства), что при действительных ν функции $J_\nu(x)$ имеют бесчисленное множество действительных нулей и дал интегральное представление для $J_\nu(x)$. Некоторые исследователи считают, что основные результаты, связанные с функциями Бесселя и их приложениями в математической физике, связаны с именем Л. Эйлера.

§ 1. Дифференциальное уравнение Бесселя

Определение 1. Дифференциальное уравнение вида

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - \nu^2) y(x) = 0, \qquad x > 0, \qquad (1.1)$$

называется *уравнением Бесселя индекса* ν.

В общем случае ν может быть и комплексным. В настоящем пособии ограничимся рассмотрением действительных значений индекса ν и положим для определенности, что $\nu \geq 0$.

В дальнейшем нам придется иметь дело еще с двумя представлениями уравнения Бесселя.

1°. Поделив обе части уравнения (1.1) на $x \neq 0$, получим

$$x y''(x) + y'(x) + (x - \frac{\nu^2}{x}) y(x) = 0,$$

или

$$\left(x y'(x)\right)' + (x - \frac{\nu^2}{x}) y(x) = 0. \qquad (1.2)$$

Представление (1.2) уравнения Бесселя (1.1) называется *уравнением Бесселя в самосопряженном (дивергентном) виде*.

2°. Уравнение Бесселя (1.1) можно преобразовать к виду, не содержащему первой производной. Введем для этого новую функцию $Z(x)$ так, что

$$Z(x) = \sqrt{x}\, y(x) . \qquad (1.3)$$

Имеем

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} Z(x) ;$$

$$x\, y'(x) = \sqrt{x}\, Z'(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}} Z(x) ;$$

$$\left(x\, y'(x)\right)' = \sqrt{x}\, Z''(x) + \frac{1}{4x^{3/2}} Z(x) .$$

Подставив полученное выражение в (1.2), придем к следующему уравнению для функции $Z(x)$:

$$Z''(x) + \left(1 - \frac{4\nu^2 - 1}{4x^2}\right) Z(x) = 0 , \qquad x > 0 . \qquad (1.4)$$

Это уравнение не содержит производной первого порядка. Его часто называют *уравнением Бесселя в приведенном виде*.

§ 2. Решение уравнения Бесселя

Уравнение Бесселя (1.1) есть линейное уравнение второго порядка. Поэтому для его полного интегрирования достаточно знать два его частных линейно независимых решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Известно, что интегралы уравнения Бесселя, вообще говоря, не выражаются через элементарные функции. Поэтому естественно попытаться найти его решения в виде степенного ряда по переменной x. При этом следует учесть, что классический степенной ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

может не привести к цели. Действительно, в теории степенных рядов доказывается, что в области сходимости ряда, в частности, при $x=0$, и сам ряд и все его производные должны иметь конечные значения. Точка $x=0$ является особой точкой дифференциального уравнения Бесселя (1.1), и в данном случае как раз можно подозревать, что при $x=0$ либо сама функция $y(x)$, либо ее производные могут обращаться в бесконечность. Это видно, например, из самого уравнения Бесселя (1.1), если переписать его в таком виде:

$$y''(x)=\frac{(\nu^2-x^2)\,y(x)-x\,y'(x)}{x^2}\,.$$

Вид правой части показывает, что при $x=0$ величина $y''(x)$ должна обращаться в бесконечность, если $y'(0)$ и $y(0)$ имеют конечные значения и, например, либо $y'(0)\neq 0$, либо $y(0)\neq 0$ и $\nu\neq 0$. Поэтому решение уравнения Бесселя (1.1) попытаемся искать в виде обобщенного степенного ряда:

$$y(x)=x^{\beta}\,\psi_{\nu}(x)=x^{\beta}\sum_{p=0}^{\infty}C_p x^p\,, \tag{2.1}$$

причем $C_0\neq 0$.

Проведем формальное дифференцирование ряда (2.1):

$$x\,y'(x)=\beta\,x^{\beta}\sum_{p=0}^{\infty}C_p x^p+x^{\beta}\sum_{p=0}^{\infty}p\,C_p x^p=x^{\beta}\sum_{p=0}^{\infty}(\beta+p)C_p x^p\,.$$

Действуя аналогично предыдущему, получим

$$x\bigl(x\,y'(x)\bigr)'=x^{\beta}\sum_{p=0}^{\infty}(\beta+p)^2 C_p x^p\,. \tag{2.2}$$

Подставим исходное разложение (2.1) и полученное разложение (2.2) в следующее представление уравнения Бесселя:

$$x\bigl(x\,y'(x)\bigr)'+(x^2-\nu^2)\,y(x)=0\,,$$

которое является очевидным следствием дивергентного представления (1.2), и найдем

$$x^{\beta}\sum_{p=0}^{\infty}(\beta+p)^2 C_p x^p+(x^2-\nu^2)\,x^{\beta}\sum_{p=0}^{\infty}C_p x^p=0\,,$$

$$x^{\beta}\left\{\sum_{p=0}^{\infty}\left[(\beta+p)^2-\nu^2\right]C_p x^p+\sum_{p=0}^{\infty}C_p x^{p+2}\right\}=0\ ,$$

$$x^{\beta}\left\{\sum_{p=0}^{\infty}\left[(\beta+p)^2-\nu^2\right]C_p x^p+\sum_{p=2}^{\infty}C_{p-2} x^{p}\right\}=0\ .$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях x, приходим к следующим рекуррентным соотношениям для коэффициентов C_p, $(p=0,1,...)$:

$$\begin{aligned}
&\left(\beta^2-\nu^2\right)\cdot C_0=0\,, && (p=0)\,,\\
&\left((\beta+1)^2-\nu^2\right)\cdot C_1=0\,, && (p=1)\,,\\
&\left((\beta+p)^2-\nu^2\right)\cdot C_p+C_{p-2}=0\,, && (p\ge 2)\,.
\end{aligned}\tag{2.3}$$

Учитывая, что $C_0\neq 0$, из первого равенства в (2.3) (при $p=0$) получим, что $\beta=\pm\nu$.

1°. Построим формальное решение уравнения Бесселя при $\beta=\nu\ge 0$. Система рекуррентных соотношений (2.3) в данном случае преобразуется к системе:

$$\begin{aligned}
&0\cdot C_0=0\,, && (p=0)\,,\\
&(1+2\nu)\cdot C_1=0\,, && (p=1)\,,\\
&p\cdot(2\nu+p)\cdot C_p+C_{p-2}=0\,, && (p\ge 2)\,.
\end{aligned}\tag{2.4}$$

Из соотношений (2.4) следует, что C_0 – произвольное число, что $C_1=0$ и что

$$C_p=-\frac{C_{p-2}}{p\,(p+2\nu)}\,,\qquad (p\ge 2)\,.\tag{2.5}$$

Полученное условие $C_1=0$ и рекуррентное соотношение (2.5) позволяют найти все нечетные коэффициенты ряда (2.1):

$$C_1=C_3=C_5=...=C_{2k+1}=...=0\,.$$

Что касается четных коэффициентов ряда (2.1), то все они пропорциональны C_0 и определяются следующими формулами:

$$C_2 = -\frac{C_0}{2\cdot(2+2\nu)} = -\frac{C_0}{2^2\cdot 1\cdot(1+\nu)}, \qquad (p = 2\cdot 1),$$

$$C_4 = -\frac{C_2}{4\cdot(4+2\nu)} = -\frac{C_2}{2^3\cdot(2+\nu)} =$$

$$= +\frac{C_0}{2^4\cdot 1\cdot 2\cdot(1+\nu)\cdot(2+\nu)}, \qquad (p = 2\cdot 2),$$

$$C_6 = -\frac{C_4}{6\cdot(6+2\nu)} = -\frac{C_4}{2^2\cdot 3\cdot(3+\nu)} =$$

$$= -\frac{C_0}{2^6\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot(1+\nu)\cdot(2+\nu)\cdot(3+\nu)}, \qquad (p = 2\cdot 3),$$

$$C_{2k} = -\frac{C_{2(k-1)}}{2^2\cdot k\cdot(k+\nu)} =$$

$$= \frac{(-1)^k\, C_0}{2^{2k}\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k\cdot(1+\nu)\cdot(2+\nu)\cdot\ldots\cdot(k+\nu)}, \quad (p = 2\cdot k).$$

Справедливость последнего соотношения без труда может быть доказана методом математической индукции. Для того чтобы члены ряда (2.1) имели наиболее простой вид, положим

$$C_0 = \frac{1}{2^\nu\, \Gamma(\nu+1)},$$

где

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\, e^{-t}\, dt, \qquad (s > 0),$$

− «гамма-функция Эйлера».

Принимая во внимание выбранное значение C_0 и пользуясь следующими известными свойствами гамма-функции:

$$\Gamma(s+1) = s\cdot\Gamma(s), \qquad \Gamma(1) = 1,$$

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (n \text{ – натуральное}),$$

четные коэффициенты ряда (2.1) можно представить в таком виде:

$$C_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{\nu+2k} \cdot k! \cdot (\nu+1) \cdot (\nu+2) \cdot \ldots \cdot (\nu+k) \cdot \Gamma(\nu+1)} =$$

$$= \frac{(-1)^k}{2^{\nu+2k} \cdot \Gamma(k+1) \cdot \Gamma(\nu+k+1)}. \tag{2.6}$$

В результате приходим к построенному формально первому частному решению уравнения Бесселя:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \cdot \tilde{\psi}_\nu(x), \tag{2.7}$$

где

$$\tilde{\psi}_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x). \tag{2.8}$$

Исследуем функциональный ряд (2.8). Для этого рассмотрим следующий степенной ряд в комплексной плоскости:

$$\tilde{\psi}_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(z), \quad z \in C.$$

Последний степенной ряд сходится при всех комплексных значениях z. В этом легко убедиться, воспользовавшись признаком Даламбера. При каждом z таком, что $|z| \le M$, имеем

$$\frac{|u_{k+1}(z)|}{|u_k(z)|} = \frac{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)}{\Gamma(k+2)\,\Gamma(k+\nu+2)} \cdot \frac{|z|^2}{2^2} \le \frac{1}{(k+1)(k+\nu+1)} \cdot \left(\frac{M}{2}\right)^2,$$

и

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|u_{k+1}(z)|}{|u_k(z)|} = q = 0.$$

Так как $q<1$, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ сходится абсолютно для всех $z \in C$ и сходится равномерно в любой ограниченной области комплексной плоскости. Из теории степенных рядов следует, что функция $\widetilde{\psi}_\nu(z)$, порожденная степенным рядом, является целой функцией комплексной переменной z.

Возвращаясь к ряду (2.8), мы можем теперь утверждать, что он порождает бесконечно дифференцируемую функцию $\widetilde{\psi}_\nu(x)$, определенную при $x \geq 0$, и что все наши предыдущие действия, связанные с почленным дифференцированием ряда, были законными. Поэтому функция $J_\nu(x)$, определяемая равенством (2.7), представляет собой решение уравнения Бесселя на полуоси $x>0$, причем это решение ограничено в окрестности точки $x=0$.

Замечание. Отметим особо, что для случая $\nu = 0$ все рассуждения остаются в силе, и в этом случае решение представимо равенством (2.7) с ν, равным нулю.

Определение 2. Функцию $J_\nu(x)$ называют *функцией Бесселя первого рода индекса $\nu \geq 0$ (порядка ν).*

Отметим, что если порядок ν функции Бесселя первого рода оказывается целым числом $n \geq 0$, то в силу равенства $\Gamma(n+k+1) = (n+k)!$ представление функции $J_\nu(x)$ принимает следующий вид:

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

2°. Рассмотрим теперь случай $\beta = -\nu$, т. е. $\beta < 0$. Система (2.3) рекуррентных соотношений здесь выглядит так:

$$0 \cdot C_0 = 0, \qquad (p=0),$$

$$(1-2\nu) \cdot C_1 = 0, \qquad (p=1), \qquad (2.9)$$

$$p \cdot (p-2\nu) \cdot C_p + C_{p-2} = 0\,, \qquad (p \ge 2)\,,$$

и формально может быть получена из системы (2.4) заменой ν на $-\nu$. При решении системы уравнений (2.9) следует выделить три случая.

1) Пусть параметр $\nu > 0$ не равен половине натурального числа. В этом случае все коэффициенты C_p, $p \ge 1$, опять выразятся единственным образом через коэффициент C_0, а именно, все коэффициенты с нечетными индексами обращаются в нуль, а все коэффициенты с четными индексами вычисляются по формуле

$$C_{2k} = -\frac{C_{2k-2}}{2^2 \cdot k \cdot (k-\nu)} = \frac{(-1)^k\, C_0}{2^{2k} \cdot k! \cdot (1-\nu)\,(2-\nu) \cdot \ldots \cdot (k-\nu)}\,,$$
$$(k = 1, 2, \ldots)$$

Выбрав значение коэффициента C_0 специальным (удобным) образом $C_0 = \dfrac{1}{2^{-\nu}\,\Gamma\,(-\nu+1)}$, получим

$$C_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{-\nu+2k}\,\Gamma(k+1)\Gamma(-\nu+k+1)}\,, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)\,. \qquad (2.10)$$

В результате мы приходим ко второму частному решению уравнения Бесселя:

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \cdot \widetilde{\psi}_{-\nu}(x)\,, \qquad (2.11)$$

где

$$\widetilde{\psi}_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\,. \qquad (2.12)$$

Аналогично тому, как это сделано выше, показывается, что ряд (2.12) сходится при всех $x \ge 0$ и порождает бесконечно дифференцируемую функцию $\widetilde{\psi}_{-\nu}(x)$.

Определение 3. Получающаяся в этом случае функция $J_{-\nu}(x)$ называется *функцией Бесселя первого рода отрицательного индекса* $-\nu$ *($-\nu$-го порядка).*

2) Пусть теперь индекс $\nu > 0$ равен половине натурального нечетного числа, т. е. $\nu = n + 1/2$, $(n = 0, 1, \ldots)$. В этом случае все коэффициенты с четными индексами определяются, как и в предыдущем случае, формулой (2.10). Что касается коэффициентов с нечетными индексами, то коэффициенты с индексами от 1 до $(2n-1)$ включительно равны нулю. Коэффициент C_{2n+1} может быть выбран произвольно, а остальные коэффициенты с нечетными индексами, большими $(2n+1)$, однозначно определяются через коэффициент C_{2n+1} с помощью рекуррентных соотношений (2.9). Если мы положим C_{2n+1} равным нулю (самый простой выбор), то для случая $\nu = n + 1/2$ получим частное решение уравнения Бесселя вида (2.11)–(2.12). Это решение является функцией Бесселя первого рода индекса $-(n+1/2)$, т. е. $J_{-(n+1/2)}(x)$.

3) Пусть, наконец, параметр $\nu > 0$ равен натуральному числу n. Соотношения (2.9) позволяют заключить, что все коэффициенты с нечетными индексами равны нулю и что коэффициенты с четными индексами p, $p < 2n$, также равны нулю. Выбрав коэффициенты C_p с четными индексами p, $p = 2k$, $(k \geq n)$ в соответствии с формулами (2.10), найдем, что все рекуррентные соотношения будут выполнены и что частное решение в этом случае представляется в виде (см. (2.11)–(2.12))

$$J_{-n}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Заменив в ряде суммирование по индексу k суммированием по индексу $m = k - n$, получим

$$J_{-n}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{\Gamma(m+n+1)\Gamma(-n+m+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2n}=$$

$$=(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(n+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}.$$

Принимая во внимание соотношение (2.8), найдем, что при натуральном n

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x). \qquad (2.13)$$

3°. При построении частных решений уравнения Бесселя (1.1) с помощью обобщенных рядов мы ввели определение функции Бесселя отдельно для неотрицательных и отрицательных значений индекса ν. Как нетрудно видеть, эти определения можно объединить.

Определение 4. Функция, определяемая равенством

$$J_\nu(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \quad x>0, \qquad (2.14)$$

называется *функцией Бесселя первого рода индекса* ν.
При этом под ν понимается любое действительное число: как целое, так и дробное, как положительное, так и отрицательное.

Уравнение Бесселя − обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Следовательно, его фундаментальная система решений состоит из двух линейно независимых решений. В качестве одного из этих решений можно выбрать функцию $J_\nu(x)$ — функцию Бесселя первого рода индекса $\nu\geq 0$. Она ограничена в окрестности точки $x=0$. Оказывается, что всякое другое решение $Y(x)$ уравнения Бесселя, линейно независимое с $J_\nu(x)$, будет неограниченным в окрестности точки $x=0$. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Всякое решение* $Y(x)$ *уравнения Бесселя (1.1), линейно независимое с его решением* $J_\nu(x)$, $\nu\geq 0$, *в окрестности точки* $x=0$ *неограниченно и имеет вид*

$$Y(x)=\begin{cases} A_1(x)+x^{-\nu}B_1(x), & \text{если} \quad \nu>0, \\ A_2(x)+B_2(x)\ln x, & \text{если} \quad \nu=0. \end{cases}$$

Здесь $A_i(x)$ *и* $B_i(x)$, $(i=1,2)$ − *функции, определенные и ограниченные в точке* $x=0$ *и ее окрестности, и* $B_i(0)\neq 0$.

Доказательство. Пусть $Y(x)$ − решение уравнения Бесселя (1.1), линейно независимое с решением $J_\nu(x)$, $\nu\geq 0$. Функция Бесселя первого рода $J_\nu(x)$ определена в точке $x=0$ и ограничена в окрестности этой точки. Из выражений (2.7)–(2.8), определяющих эту функцию, следует, что функция $J_\nu(x)$ представима в виде $J_\nu(x)=\left(\dfrac{x}{2}\right)^\nu\cdot\tilde{\psi}_\nu(x)$, что функция $\tilde{\psi}_\nu(x)$ непрерывна при $x\geq 0$ и что $\tilde{\psi}_\nu(0)=\dfrac{1}{\Gamma(\nu+1)}>0$. На основании этого можно заключить, что найдется такое число $\delta>0$, при котором для всех $x\in[0,\delta]$ функция $\tilde{\psi}_\nu(x)$ непрерывна и для нее справедлива оценка

$$\tilde{\psi}_\nu(x)\geq\frac{1}{2\,\Gamma(\nu+1)}>0.$$

Это означает, что для всех $x\in(0,\delta]$, $J_\nu(x)>0$. В соответствии с формулой Остроградского–Лиувилля для определителя Вронского решений уравнения (1.1) имеем

$$Y'(x)\,J_\nu(x)-Y(x)\,J'_\nu(x)\equiv\frac{C}{x}, \qquad x\in(0,\delta],$$

причем в силу линейной независимости этих решений $C\neq 0$. Поделив обе части последнего равенства на $J_\nu^2(x)\neq 0$, получим

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{Y(x)}{J_\nu(x)}\right]\equiv\frac{C}{x\,J_\nu^2(x)}, \qquad x\in(0,\delta]. \tag{2.15}$$

Для любого $x \in (0, \delta]$, путем интегрирования тождества (2.15), придем к следующему выражению для функции $Y(x)$:

$$Y(x) = J_\nu(x) \cdot \left[\frac{Y(\delta)}{J_\nu(\delta)} - \int_x^\delta \frac{C\,dt}{t\, J_\nu^2(t)} \right], \qquad x \in (0, \delta].$$

С учетом (2.7) последнему выражению можно придать такой вид

$$Y(x) = J_\nu(x) \cdot \left[\frac{Y(\delta)}{J_\nu(\delta)} - 2^{2\nu} C \int_x^\delta \frac{t^{-2\nu-1} dt}{\widetilde{\psi}_\nu^2(t)} \right], \qquad x \in (0, \delta].$$

Применим к этому интегралу теорему о среднем значении. В результате получим

$$Y(x) = \frac{Y(\delta)}{J_\nu(\delta)} J_\nu(x) - \frac{2^{2\nu} C}{\widetilde{\psi}_\nu^2(\xi)} J_\nu(x) \int_x^\delta \frac{dt}{t^{2\nu+1}}, \quad x \in (0, \delta], \qquad (2.16)$$

где $\xi = \xi(x) \in (x, \delta)$.

Значение интеграла в (2.16) зависит от величины $\nu \geq 0$:

$$\int_x^\delta \frac{dt}{t^{2\nu+1}} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\nu}\left(\dfrac{1}{x^{2\nu}} - \dfrac{1}{\delta^{2\nu}} \right), & \nu > 0, \\ \ln\delta - \ln x, & \nu = 0. \end{cases}$$

Следовательно, функцию $Y(x)$ можно представить так

$$Y(x) = \begin{cases} A_1(x) + B_1(x)\, x^{-\nu}, & \text{если} \quad \nu > 0 \\ A_2(x) + B_2(x) \ln x, & \text{если} \quad \nu = 0, \end{cases} \qquad (2.17)$$

где

$$A_1(x) = J_\nu(x) \left[\frac{Y(\delta)}{J_\nu(\delta)} + \frac{2^{2\nu-1} C}{\nu \delta^{2\nu} \widetilde{\psi}_\nu^2(\xi)} \right], \quad B_1(x) = -\frac{2^{\nu-1} C}{\nu\, \widetilde{\psi}_\nu^2(\xi)} \widetilde{\psi}_\nu(x),$$

$$A_2(x) = J_0(x) \left[\frac{Y(\delta)}{J_0(\delta)} - \frac{C}{\widetilde{\psi}_0^2(\xi)} \ln\delta \right], \qquad B_2(x) = -\frac{C\, \widetilde{\psi}_0(x)}{\widetilde{\psi}_0^2(\xi)}.$$

Функции $A_1(x)$, $B_1(x)$, $A_2(x)$ и $B_2(x)$ не имеют особенностей в точке $x = 0$, а $B_1(x)$ и $B_2(x)$ не обращаются в нуль на отрезке $[0, \delta]$. Поэтому из равенства (2.16) следует утверждение теоремы.

В разделе 2° настоящего параграфа мы получили и другие частные решения уравнения Бесселя, отличные от функции $J_\nu(x)$.

При индексе ν, не равном целому числу, мы построили решение $J_{-\nu}(x)$, которое, как следует из (2.11)–(2.12), стремится к бесконечности при $x \to 0$. Следовательно, функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ линейно независимы. В этом случае общее решение $y(x)$ уравнения Бесселя имеет вид

$$y(x) = \alpha_1 J_\nu(x) + \alpha_2 J_{-\nu}(x), \tag{2.18}$$

где α_1 и α_2 — произвольные постоянные.

Часто в качестве второго фундаментального решения вместо функции $J_{-\nu}(x)$ выбирают функцию Неймана, которая определяется как конкретная линейная комбинация функций $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$:

$$N_\nu(x) = J_\nu(x)\, ctg\, \pi\nu - \frac{1}{\sin \pi\nu} J_{-\nu}(x). \qquad (2.19$$

Тогда общее решение уравнения Бесселя представимо в виде

$$y(x) = \alpha_1 J_\nu(x) + \alpha_2 N_\nu(x). \tag{2.20}$$

Если индекс ν равен целому числу n, то функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$, как показано выше, линейно зависимы (см. (2.13)), и общее решение уравнения Бесселя нельзя найти с помощью равенства (2.18). Его ищут с помощью равенства (2.20), понимая под $N_\nu(x)$ в этом случае предел при ν, стремящемся к n:

$$N_n(x) = \lim_{\nu \to n} N_\nu(x). \tag{2.21}$$

В аналитической теории дифференциальных уравнений доказывается, что этот предел существует для всех $x > 0$ и что он является решением уравнения Бесселя, линейно независимым с решением $J_\nu(x)$.

Определение 5. Функция $N_\nu(x)$, определяемая соотношениями (2.19), (2.21), называется также *функцией Бесселя второго рода индекса* ν.

§ 3. Линейные зависимости между функциями Бесселя

Найдем соотношения между функциями Бесселя первого рода различных порядков. По определению функции Бесселя $J_\nu(x)$ мы имеем

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}.$$

1°. Разделим функцию $J_\nu(x)$ на x^ν и возьмем от этого частную производную

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{\nu+2k}\,\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{2^\nu\,\Gamma(k+1)\,\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}.$$

Возвращаясь к прежнему суммированию от 0 до ∞ и учитывая, что для натуральных значений k $\Gamma(k+1) = k!$, получим

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{2^\nu\,\Gamma(k+2)\,\Gamma(\nu+k+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} =$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+1+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1+2k} x^{-\nu} =$$

$$= -\frac{1}{x^\nu}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+1+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1+2k} = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}.$$

Таким образом, получается одна из формул, дающих соотношение между функциями Бесселя с разными индексами:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}. \tag{3.1}$$

Ее можно переписать в таком виде:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}}. \tag{3.2}$$

Равенство (3.2) показывает, что дифференцирование дроби $\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}$ с последующим делением на x равносильно увеличению ν на единицу и изменению знака у упомянутой дроби.

Применяя указанное правило m раз, получим формулу, которую символически можно записать так:

$$\frac{d^m}{(x\,dx)^m}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = (-1)^m\,\frac{J_{\nu+m}(x)}{x^{\nu+m}}, \tag{3.3}$$

где употреблено следующее символическое обозначение:

$$\frac{d^m}{(x\,dx)^m}f(x) = \frac{d}{x\,dx}\,\frac{d}{x\,dx}\ldots\frac{d}{x\,dx}f(x).$$

2°. Умножим функцию $J_\nu(x)$ на x^ν и возьмем от этого произведения производную

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2\nu+2k}}{2^{\nu+2k}\,\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2(\nu+k)\,x^{2\nu+2k-1}}{2^{\nu+2k}\,\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)}.$$

Учитывая, что $\Gamma(\nu+k+1) = (\nu+k)\Gamma(\nu+k)$, найдем

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2\nu+2k-1}}{2^{\nu+2k-1}\,\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k)} =$$

$$= x^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu-1+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1+2k} = x^{\nu} J_{\nu-1}(x).$$

Разделив обе части полученного выражения на x, будем иметь

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x^{\nu} J_{\nu}(x)\right) = x^{\nu-1} J_{\nu-1}(x), \tag{3.4}$$

т. е. дифференцирование произведения $x^{\nu} J_{\nu}(x)$ с последующим делением на x равносильно уменьшению ν на единицу у упомянутого произведения.

Применив полученное правило m раз, приходим к формуле

$$\frac{d^m}{(x\,dx)^m}\left(x^{\nu} J_{\nu}(x)\right) = x^{\nu-m} J_{\nu-m}(x). \tag{3.5}$$

3°. Вернемся к формуле (3.1). Найдем производную левой части как производную дроби

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_{\nu}(x)}{x^{\nu}}\right) = \frac{x^{\nu} J'_{\nu}(x) - \nu x^{\nu-1} J_{\nu}(x)}{x^{2\nu}}.$$

По доказанному ранее (см. (3.1)), это выражение равно $-\dfrac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu}}$.

Следовательно:

$$\frac{x J'_{\nu}(x) - \nu J_{\nu}(x)}{x^{\nu+1}} = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu}}.$$

Из последнего равенства выразим $J'_{\nu}(x)$:

$$J'_{\nu}(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_{\nu}(x). \tag{3.6}$$

Применив аналогичные преобразования к равенству

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\nu} J_{\nu}(x)\right) = x^{\nu} J_{\nu-1}(x),$$

без труда получим

$$J'_{\nu}(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_{\nu}(x). \tag{3.7}$$

Наконец, складывая равенства (3.6) и (3.7), придем к формуле

$$J'_\nu(x) = \frac{1}{2}\left[J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)\right]. \tag{3.8}$$

Выделим два полезных соотношения, получающихся из предыдущих равенств при конкретных значениях индекса ν. Так, положив в (3.6) $\nu = 0$, будем иметь

$$J'_0(x) = -J_1(x)\,, \tag{3.9}$$

а из (3.4) при $\nu = 1$ следует, что

$$\left(x J_1(x)\right)' = x J_0(x)\,.$$

4°. Сравнивая между собой формулы (3.6) и (3.7) заключаем, что

$$-J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x)\,.$$

Таким образом,

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = 2\frac{\nu}{x} J_\nu(x)\,. \tag{3.10}$$

Соотношение (3.10) есть рекуррентное соотношение между тремя последовательными функциями Бесселя с индексами $\nu - 1$, ν и $\nu + 1$. Оно позволяет, к примеру, выразить все функции Бесселя первого рода целого порядка через функции $J_0(x)$ и $J_1(x)$. Действительно, из (3.10) находим

$$J_\nu(x) = \frac{2\nu - 2}{x} J_{\nu-1}(x) - J_{\nu-2}(x)\,.$$

Отсюда последовательно определяем

$$J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x)\,,$$

$$J_3(x) = \frac{4}{x} J_2(x) - J_1(x) = \frac{4}{x}\left[\frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x)\right] - J_1(x) =$$

$$= \left(\frac{8}{x^2} - 1\right) J_1(x) - \frac{4}{x} J_0(x)\,,$$

$$J_4(x)=\frac{6}{x}J_3(x)-J_2(x)=\left(\frac{48}{x^3}-\frac{8}{x}\right)J_1(x)+\left(-\frac{24}{x^2}+1\right)J_0(x)$$ и

т. д., при этом

$$J_0(x)=1-\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\ldots$$

$$J_1(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{1!\cdot 2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{1}{2!\cdot 3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5-\ldots$$

§ 4. Функции Бесселя, индекс которых равен целому числу с половиной

1°. Рассмотрим сначала простейший случай, когда $\nu=\frac{1}{2}$. Согласно определению функции Бесселя $J_{\frac{1}{2}}(x)$ имеем:

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}+k+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Так как

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{-1/2}dt=\int_0^{\infty} e^{-t}\,d(2\sqrt{t})=2\int_0^{\infty} e^{-\xi^2}d\xi=\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s),$$

то

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2},$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2},$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$\Gamma\left(\frac{2k+3}{2}\right)=\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2k+1}{2}=\sqrt{\pi}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k+1)}{2^{k+1}}.$$

Учитывая также, что для натуральных k $\quad\Gamma(k+1)=k\,!$, получим

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2^{k+1}}{k\,!\sqrt{\pi}\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}=$$

$$=\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!\cdot 2k)\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k+1)}x^{2k+1}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

Ряд в правой части последнего равенства представляет собой разложение функции $\sin x$. Поэтому оказывается справедливым равенство

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\,. \tag{4.1}$$

2°. Рассмотрим теперь случай, когда $\nu=-\dfrac{1}{2}$. Имеем

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(-\frac{1}{2}+k+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Принимая во внимание, что

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}+k+1\right)=\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\frac{2k-1}{2}=\sqrt{\pi}\,\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2^k},$$

получим

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2^k}{k\,!\sqrt{\pi}\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k\,!2k)\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}x^{2k}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}.$$

Ряд, стоящий в правой части последнего равенства, является функцией $\cos x$. Следовательно,

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \tag{4.2}$$

3°. Функции Бесселя, вообще говоря, являются новыми трансцендентными функциями, не выражающимися через элементарные функции. Исключением из этого правила являются функции Бесселя, индекс которых равен целому числу с половиной, т. е. $\nu = \frac{2m+1}{2}$, где m − целое число. Докажем это. Функция Бесселя $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$ (см. (4.1)) представляет собой суперпозицию элементарных функций. Для $m > 0$ применим к ней формулу (3.3) и получим

$$\frac{d^m}{(x\,dx)^m}\left(\frac{J_{\frac{1}{2}}(x)}{x^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{d^m}{(x\,dx)^m}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x\right] = (-1)^m \frac{J_{\frac{1}{2}+m}(x)}{x^{\frac{1}{2}+m}}.$$

Отсюда найдем $J_{\frac{1}{2}+m}(x)$:

$$J_{\frac{1}{2}+m}(x) = (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{\frac{2m+1}{2}} \frac{d^m}{(x\,dx)^m}\left(\frac{\sin x}{x}\right).$$

Функция $\frac{d^m}{(x\,dx)^m}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$, $m > 0$, как нетрудно видеть, является суперпозицией элементарных функций. Следовательно, и функция Бесселя $J_{\frac{1}{2}+m}(x)$, $m \ge 0$, выражается через элементарные функции.

Что касается отрицательных целых m, то аналогичные рассуждения, проведенные с использованием соотношения (3.5), примененного к функции Бесселя $J_{-\frac{1}{2}}(x)$, позволяют получить представление функции $J_{-\frac{1+|m|}{2}}(x)$ вида

$$J_{-\frac{1}{2}-|m|}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot x^{|m|+\frac{1}{2}}\frac{d^{|m|}}{(x\,dx)^{|m|}}\left(\frac{\cos x}{x}\right),$$

откуда опять следует вывод, что $J_{-\frac{1}{2}-|m|}(x)$ − суперпозиция элементарных функций.

Итак, на основании доказанного можно сделать вывод, что функции Бесселя с индексами, равными целому числу с половиной, представляют собой суперпозиции элементарных функций.

§ 5. Ортогональность функций Бесселя

Остановимся на рассмотрении функций Бесселя $J_\nu(x)$ в случае $\nu > -1$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Для любых действительных чисел* $\mu_1 > 0$ *и* $\mu_2 > 0$ *функция Бесселя* $J_\nu(x)$, $\nu > -1$, *удовлетворяет следующему интегральному соотношению:*

$$\int_0^\infty t\,J_\nu(\mu_1 t)\,J_\nu(\mu_2 t)\,dt =$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\mu_1^2-\mu_2^2}\left[\mu_1 J_\nu'(\mu_1)J_\nu(\mu_2)-\mu_2 J_\nu(\mu_1)J_\nu'(\mu_2)\right], & \mu_1\neq\mu_2,\\[2ex] \dfrac{1}{2}\left[J_\nu'(\mu_1)\right]^2-\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\nu^2}{\mu_1^2}\right)\left[J_\nu(\mu_1)\right]^2, & \mu_1=\mu_2.\end{cases}$$

Доказательство. Пусть дана функция Бесселя $J_\nu(x)$, где $\nu > -1$. Она удовлетворяет уравнению Бесселя, записанному в дивергентной форме (1.2).

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dJ_\nu(x)}{dx}\right]+\left(x-\frac{\nu^2}{x}\right)J_\nu(x)=0 .$$

Введем вместо x новую независимую переменную t по правилу $x=\mu_1 t$, $\mu_1>0$. Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться в том, что новая функция $J_\nu(\mu_1 t)$ переменной t удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}\left[t\frac{d\,J_\nu(\mu_1 t)}{dt}\right]+\left(\mu_1^2 t-\frac{\nu^2}{t}\right)J_\nu(\mu_1 t)=0 . \tag{5.1}$$

Ввиду произвольности положительного числа μ_1 можно заключить, что для функции $J_\nu(\mu_2 t)$, $\mu_2>0$ также справедливо равенство

$$\frac{d}{dt}\left[t\frac{d\,J_\nu(\mu_2 t)}{d\,t}\right]+\left(\mu_2^2\, t-\frac{\nu^2}{t}\right)J_\nu(\mu_2 t)=0 . \tag{5.2}$$

Умножим обе части равенства (5.1) на $J_\nu(\mu_2 t)$, а обе части равенства (5.2) — на $J_\nu(\mu_1 t)$ и вычтем одно из другого. В результате получим

$$\frac{d}{d\,t}\left[t\,J_\nu(\mu_1 t)\frac{d\,J_\nu(\mu_2 t)}{d\,t}-t\,J_\nu(\mu_2 t)\frac{d\,J_\nu(\mu_1 t)}{d\,t}\right]=$$

$$=\left(\mu_1^2-\mu_2^2\right)t\;J_\nu(\mu_1 t)\;J_\nu(\mu_2 t) . \tag{5.3}$$

Проинтегрируем соотношение (5.3) по интервалу $(0,1)$ и примем во внимание, что $\dfrac{d\,J_\nu(\mu t)}{d\,t}=\mu J'_\nu(\mu t)$, где $J'_\nu(x)=\dfrac{d\,J_\nu(x)}{d\,x}$. В результате будем иметь

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}\left[t J_\nu(\mu_1 t)\frac{d J_\nu(\mu_2 t)}{dt} - t J_\nu(\mu_2 t)\frac{d J_\nu(\mu_1 t)}{dt}\right]dt =$$

$$= (\mu_1^2 - \mu_2^2)\int_0^1 t J_\nu(\mu_1 t) J_\nu(\mu_2 t)\, dt\,,$$

или

$$\left[t J_\nu(\mu_1 t)\frac{d J_\nu(\mu_2 t)}{dt} - t J_\nu(\mu_2 t)\,\frac{d J_\nu(\mu_1 t)}{dt}\right]\Bigg|_0^1 =$$

$$= (\mu_1^2 - \mu_2^2)\int_0^1 t J_\nu(\mu_1 t) J_\nu(\mu_2 t)\, dt\,. \tag{5.4}$$

Представление (2.14) функции Бесселя позволяет заключить, что при $\mu > 0$ и при $t \to +0$

$$J_\nu(\mu t) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{\mu t}{2}\right)^\nu + O\left(t^{\nu+2}\right),$$

$$\mu t J_\nu'(\mu t) = \frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{\mu t}{2}\right)^\nu + O\left(t^{\nu+2}\right).$$

Поэтому при $t \to +0$

$$\mu_2 t J_\nu(\mu_1 t) J_\nu'(\mu_2 t) - \mu_1 t J_\nu(\mu_2 t) J_\nu'(\mu_1 t) = O\left(t^{2\nu+2}\right).$$

Таким образом, в силу условия $\nu > -1$ левая часть равенства (5.4) при $t = 0$ обращается в нуль, и мы получим

$$(\mu_1^2 - \mu_2^2)\int_0^1 t J_\nu(\mu_1 t) J_\nu(\mu_2 t)\, dt = \mu_2 J_\nu(\mu_1) J_\nu'(\mu_2) - \mu_1 J_\nu(\mu_2) J_\nu'(\mu_1)\,.$$

При $\mu_1 \neq \mu_2$ отсюда заключаем, что

$$\int_0^1 t J_\nu(\mu_1 t) J_\nu(\mu_2 t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\mu_1^2 - \mu_2^2}\left[\mu_1 J_\nu(\mu_2) J_\nu'(\mu_1) - \mu_2 J_\nu(\mu_1) J_\nu'(\mu_2)\right], \tag{5.5}$$

т. е. первое утверждение теоремы 5.1 доказано.

Для доказательства справедливости утверждения теоремы 5.1 при $\mu_1=\mu_2$ в равенстве (5.5) перейдем к пределу при $\mu_2\to\mu_1$. Правая часть равенства (5.5) представляет собой дробь, числитель и знаменатель которой при $\mu_2\to\mu_1$ одновременно стремятся к нулю. Для раскрытия этой неопределенности воспользуемся правилом Лопиталя

$$\int\limits_0^1 t\,J_\nu^2(\mu_1 t)\,dt=$$

$$=\lim_{\mu_2\to\mu_1}\left\{\frac{1}{\mu_1^2-\mu_2^2}\left[\mu_1 J_\nu(\mu_2)J'_\nu(\mu_1)-\mu_2 J_\nu(\mu_1)J'_\nu(\mu_2)\right]\right\}=$$

$$=\lim_{\mu_2\to\mu_1}\left\{\frac{\mu_1 J'_\nu(\mu_2)J'_\nu(\mu_1)-J_\nu(\mu_1)J'_\nu(\mu_2)-\mu_2 J_\nu(\mu_1)J''_\nu(\mu_2)}{2\mu_2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[J'_\nu(\mu_1)\right]^2-\frac{1}{2\mu_1}J_\nu(\mu_1)J'_\nu(\mu_1)-\frac{1}{2}J_\nu(\mu_1)J''_\nu(\mu_1)\,. \qquad (5.6)$$

Учитывая, что функция Бесселя $J_\nu(t)$ удовлетворяет уравнению Бесселя (1.1)

$$t^2 J''_\nu(t)+t\,J'_\nu(t)+(t^2-\nu^2)J_\nu(t)=0\,, \qquad (1.1)$$

найдем

$$J''_\nu(t)=-\frac{1}{t}J'_\nu(t)-(1-\frac{\nu^2}{t^2})J_\nu(t)\,.$$

Подставив указанное представление функции $J''_\nu(\mu_1)$ в выражение (5.6), окончательно получим

$$\int\limits_0^1 t\,J_\nu^2(\mu_1 t)\,dt=\frac{1}{2}\left[J'_\nu(\mu_1)\right]^2-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right)\left[J_\nu(\mu_1)\right]^2, \qquad (5.7)$$

что завершает доказательство теоремы 5.1.

Пусть теперь $\mu_1 > 0$ и $\mu_2 > 0$ — не произвольные числа, а вещественные корни уравнения

$$\alpha J_\nu(x) + \beta x J'_\nu(x) = 0\,, \tag{5.8}$$

где α и β – числа такие, что $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. Тогда имеет место теорема 5.2.

Теорема 5.2. *Если* $\mu_1 > 0$ *и* $\mu_2 > 0$ *— положительные корни уравнения (5.7), то для всех* $\nu > -1$

$$\int_0^1 t J_\nu(\mu_1 t) J_\nu(\mu_2 t)\, dt = 0, \quad \text{если } \mu_1 \neq \mu_2,$$

и

$$\int_0^1 t J_\nu^2(\mu_1 t)\, dt = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[J_\nu(\mu_1)\right]^2 \dfrac{\left[\alpha^2 + \beta^2(\mu_1^2 - \nu^2)\right]}{\mu_1^2 \beta^2}, & \beta \neq 0, \\ \dfrac{1}{2}\left[J'_\nu(\mu_1)\right]^2 \dfrac{\left[\alpha^2 + \beta^2(\mu_1^2 - \nu^2)\right]}{\alpha^2} & \alpha \neq 0. \end{cases},$$

если $\mu_1 = \mu_2$.

Доказательство. 1° Согласно теореме 5.1 для любых $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ и $\mu_1 \neq \mu_2$ справедливо равенство (5.5) В частности, оно справедливо и для $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, являющихся корнями трансцендентного уравнения (5.8). То, что $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ — корни уравнения (5.8), означает, что справедливы следующие равенства:

$$\alpha J_\nu(\mu_1) + \beta \mu_1 J'_\nu(\mu_1) = 0\,,$$
$$\alpha J_\nu(\mu_2) + \beta \mu_2 J'_\nu(\mu_2) = 0\,, \tag{5.9}$$

причем числа α и β одновременно не равны нулю. Рассматривая равенства (5.9) как систему линейных алгебраических уравнений относительно α и β, и учитывая, что $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, найдем, что определитель этой системы с необходимостью равен нулю:

$$\begin{vmatrix} J_\nu(\mu_1) & \mu_1 J'_\nu(\mu_1) \\ J_\nu(\mu_2) & \mu_2 J'_\nu(\mu_2) \end{vmatrix} = \mu_2 J_\nu(\mu_1) J'_\nu(\mu_2) - \mu_1 J_\nu(\mu_2) J'_\nu(\mu_1) = 0 .$$

Отсюда следует, что правая часть равенства (5.5) также равна нулю, т. е.

$$\int_0^1 t J_\nu(\mu_1 t) J_\nu(\mu_2 t)\, dt = 0 .$$

В этом случае говорят, что функции $J_\nu(\mu_1 x)$ и $J_\nu(\mu_2 x)$ ортогональны друг другу с весом x на интервале $(0,1)$.

2°. Пусть теперь $\mu_1 = \mu_2$. Если $\beta \neq 0$, то из равенства (5.7) можно выразить $J'_\nu(x)$, а если $\alpha \neq 0$, то можно выразить $J_\nu(x)$. Подставив получившиеся выражения в правую часть соотношения (5.7), мы получим утверждение теоремы при $\mu_1 = \mu_2$.

§ 6. Поведение функций Бесселя при больших значениях аргумента

Выясним, какое асимптотическое поведение функций Бесселя при $x \to +\infty$.

Воспользуемся для этого уравнением Бесселя в приведенной форме (1.4). Функция $Z(x) = \sqrt{x}\, J_\nu(x)$ удовлетворяет уравнению

$$Z''(x) + \left(1 - \frac{4\nu^2 - 1}{4x^2}\right) Z(x) = 0 , \qquad x > 0 . \qquad (1.4)$$

При больших значениях x это уравнение становится похожим на уравнение гармонических колебаний

$$\tilde{z}''(x) + \tilde{z}(x) = 0 , \qquad x > 0 .$$

Общее решение последнего уравнения можно записать в виде

$$\tilde{z}(x) = A \cos(x + \alpha) ,$$

где A — амплитуда, а α — фаза.

Можно ожидать, что решение уравнения (1.4) (полное уравнение для $Z(x)$) при $x \to \infty$ становится близким к решению $\tilde{z}(x) = A\cos(x+\alpha)$.

И в самом деле, рассматривая при $x \to \infty$ член $\left(-\dfrac{4\nu^2-1}{4x^2}\right)Z(x)$ как малое возмущение уравнения гармонических колебаний $\tilde{z}''(x) + \tilde{z}(x) = 0$, можно установить с помощью теории возмущений, что всякое решение уравнения (1.4) для $Z(x)$ имеет при $x \to \infty$ поведение

$$Z(x) = A\cos(x+\alpha) + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

В результате этого получаем, что любое решение уравнения Бесселя имеет поведение

$$y(x) = \frac{A\cos(x+\alpha)}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \qquad \text{при } x \to \infty.$$

Далее возникает следующий вовсе не простой вопрос: каковы величины A и α для функции $J_\nu(x)$. Эти величины были найдены, исходя из некоторого интегрального представления для функции $J_\nu(x)$ с помощью метода “перевала”. Было установлено, что (этого вывода мы не приводим)

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \quad \text{при } x \to \infty. \qquad (6.1)$$

§ 7. Нули функции Бесселя первого рода

Ортогональность функций Бесселя, как мы видели в § 5, связана с нулями функций Бесселя и их производных. Рассмотрим основные свойства нулей функции Бесселя.

Теорема 7.1. *Все нули функций Бесселя простые, кроме, может быть,* $x = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $\mu_0 \neq 0$ есть нуль функции Бесселя $J_\nu(x)$ кратности n $(n \geq 2)$. Учитывая гладкость функции $J_\nu(x)$, отсюда получаем, что $J_\nu(\mu_0) = J'_\nu(\mu_0) = 0$. Согласно единственности решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка (1.1) из условий $J_\nu(\mu_0) = J'_\nu(\mu_0) = 0$ следует, что $J_\nu(x) \equiv 0$, что противоречит представлению (2.7)–(2.8) функции Бесселя первого рода $J_\nu(x)$. Поэтому предположение о кратности нуля μ_0 неверно.

<u>З а м е ч а н и е</u>. Если $\nu > -1$, то у функции $\omega(x) = \alpha J_\nu(x) + \beta x J'_\nu(x)$, $(\alpha^2 + \beta^2) > 0$, также не может быть кратных нулей. В самом деле, предположив, что такой корень существует, и обозначив его через $\mu_1 \neq 0$, можем записать

$$\omega(\mu_1) = \omega'(\mu_1) = 0.$$

Вычислив производную функции $\omega(x)$ в точке μ_1 и исключив из полученного выражения производную $J''_\nu(x)$ с помощью уравнения Бесселя (1.1), мы придем к следующей системе уравнений относительно $J_\nu(\mu_1)$ и $J'_\nu(\mu_1)$:

$$\omega(\mu_1) = \alpha J_\nu(\mu_1) + \beta \mu_1 J'_\nu(\mu_1) = 0,$$
$$\omega'(\mu_1) = \alpha J_\nu(\mu_1) - \beta \mu_1 \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right) J'_\nu(\mu_1) = 0. \qquad (7.1)$$

Определитель этой системы равен $\Delta_0 = \alpha^2 + \beta^2(\mu_1^2 - \nu^2)$.

Если определитель $\Delta_0 \neq 0$, то из системы уравнений (7.1) с необходимостью следует, что $J_\nu(\mu_1) = J'_\nu(\mu_1) = 0$. Последние равенства позволяют заключить, что $J_\nu(x) \equiv 0$. Это утверждение противоречит представлению (2.7)–(2.8), справедливому для функции Бесселя $J_\nu(x)$.

Если же определитель $\Delta_0 = 0$, то согласно теореме 5.2

$$\int\limits_0^1 t\, J_\nu^2(\mu_1 t)\, dt = 0,$$

что опять приводит к неверному выводу о том, что $J_\nu(\mu_1 x) \equiv 0$. Итак, замечание доказано.

Теорема 7.2. *Множество нулей функции Бесселя* $J_\nu(x)$ *не может иметь конечную предельную точку, т. е. все нули функции Бесселя изолированные.*

Доказательство.

а) Покажем, что точка $x = 0$ является изолированным нулем функции Бесселя $J_\nu(x)$ при $\nu > 0$. Действительно, согласно представлению (2.7)–(2.8):

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \cdot \tilde{\psi}_\nu(x),$$

где функция $\tilde{\psi}_\nu(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k}$ непрерывна при $x \geq 0$ и $\tilde{\psi}_\nu(0) = \dfrac{1}{\Gamma(\nu+1)} > 0$. Следовательно, существует такая окрестность $x = 0$, ни в одной точке которой функция $\tilde{\psi}_\nu(x)$ не обращается в нуль. Отсюда и следует, что $x = 0$ является изолированным нулем функции Бесселя при $\nu > 0$.

б) Предположим теперь, что $\mu \neq 0$ является точкой сгущения нулей функции Бесселя $J_\nu(x)$, где ν — любое действительное число. Это означает, что в любой сколь угодно малой окрестности этой точки есть нуль функции $J_\nu(x)$. В силу непрерывности функции $J_\nu(x)$ заключаем, что $J_\nu(\mu) = 0$. Кроме того, можно построить сходящуюся к точке μ последовательность $\{x_k\}$, состоящую из нулей функции Бесселя. Учитывая гладкость функции $J_\nu(x)$, получим

$$J'_\nu(\mu) = \lim_{k\to\infty} \frac{J_\nu(x_k) - J_\nu(\mu)}{x_k - \mu} = 0 .$$

Таким образом, имеем $J_\nu(\mu) = 0$ и $J'_\nu(\mu) = 0$. Это означает, что μ является нулем кратности два функции $J_\nu(x)$, чего не может быть по теореме 7.1.

Следствие. Из теоремы 7.2 следует, что на любом ограниченном отрезке переменной x функция Бесселя $J_\nu(x)$ (при любом действительном ν) может иметь лишь конечное число нулей.

Ряд результатов, касающихся корней функций Бесселя $J_\nu(x)$, легко следует из замечательной теоремы сравнения, открытой Штурмом. Последняя состоит в следующем. Пусть какой-нибудь интеграл уравнения $y(x) + \varphi(x)\,y(x) = 0$, где $\varphi(x)$ – непрерывная функция, имеет два корня $x = a$ и $x = b$, а непрерывная функция $\psi(x)$ на интервале $a < x < b$ удовлетворяет неравенству $\psi(x) \ge \varphi(x)$, причем на этом интервале существуют точки, в которых $\psi(x) > \varphi(x)$. Тогда любой интеграл уравнения $z''(x) + \psi(x)\,z(x) = 0$ имеет, по крайней мере, один корень на интервале (a, b).

Опираясь на эту теорему сравнения Штурма, докажем утверждение, которое будет использовано в дальнейшем.

Лемма 7.1. *Пусть на интервале* (α, β) *функция* $\psi(x)$ *непрерывна и удовлетворяет неравенствам* $0 \le m < \psi(x) < M$ *. Если функция* $z(x)$ *— решение дифференциального уравнения*

$$z''(x) + \psi(x)\,z(x) = 0 , \qquad x \in (\alpha, \beta) ,$$

а $\mu_1 \in (\alpha, \beta)$ *и* $\mu_2 \in (\alpha, \beta)$ *— два последовательных корня функции* $z(x)$*, то для расстояния* $(\mu_2 - \mu_1) > 0$ *между этими корнями справедливы оценки*

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} < \mu_2 - \mu_1 < \frac{\pi}{\sqrt{m}}. \tag{7.2}$$

Доказательство. Выберем число $a = \sqrt{m}$ и рассмотрим на интервале (α, β) уравнение $y''(x) + a^2 y(x) = 0$. Общий интеграл этого уравнения таков: $y(x) = c_1 \sin ax + c_2 \cos ax$. Любая из этих функций является осциллирующей, и расстояние между ее корнями равно $\frac{\pi}{a}$ (мы предполагаем, что интервал (α, β) достаточно большой, так что $(\beta - \alpha) > 2\frac{\pi}{a}$). По теореме сравнения Штурма между каждыми соседними нулями функции $y(x)$ расположен нуль функции $z(x)$. Отсюда следует, что расстояние между соседними нулями функции $z(x)$ не меньше, чем $\frac{\pi}{a}$. Действительно, предположив противное, т. е. что $(\mu_2 - \mu_1) > \frac{\pi}{a}$, мы можем среди интегралов уравнения $y''(x) + a^2 y(x) = 0$ выбрать тот, два последовательных корня которого x_1 и x_2 принадлежат интервалу (μ_1, μ_2). Это означает, что на интервале (x_1, x_2) функция $z(x)$ не имеет корней и что сделанное предположение $(\mu_2 - \mu_1) > \frac{\pi}{a}$ противоречит теореме сравнения Штурма. Отсюда

$$\mu_2 - \mu_1 < \frac{\pi}{a} < \frac{\pi}{\sqrt{m}}.$$

Аналогично доказывается и второе неравенство из (7.2).

Перейдем теперь к формулировке свойств корней функций Бесселя $J_\nu(x)$. Для этого будем использовать уравнение Бесселя в приведенном виде (1.4). Заметим, что $J_\nu(x)=\sqrt{x}\,Z_\nu(x)$ и что положительные корни функций $J_\nu(x)$ и $Z_\nu(x)$ совпадают.

Теорема 7.3. *Функция Бесселя $J_\nu(x)$ имеет счетное число положительных нулей. Расстояние между двумя последовательными нулями функции $J_\nu(x)$ стремится к π при стремлении x к бесконечности.*

Доказательство. 1°. Функция $Z_\nu(x)$ является интегралом уравнения (1.4)

$$Z''(x)+\left(1-\frac{4\nu^2-1}{4x^2}\right)Z(x)=0, \qquad x>0. \qquad (1.4)$$

Для любого значения ν найдется такое число x_*,

$$x_*=\begin{cases} 0, & |\nu|\le\dfrac{1}{2}, \\ \sqrt{\dfrac{4\nu^2-1}{3}}, & |\nu|>\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

что при $x > x_*$ функция $\psi(x)=\left(1-\dfrac{4\nu^2-1}{4x^2}\right)>\dfrac{1}{4}$.

В соответствии с теоремой сравнения Штурма между любыми двумя соседними нулями функции $y(x)=\sin(x/2)$, являющейся интегралом уравнения $y''(x)+\dfrac{1}{4}y(x)=0$, лежит хотя бы один нуль функции $Z_\nu(x)$. Так как функция $y(x)$ имеет бесконечное число нулей $x_k=2\pi k$, $(k=1,2,\ldots)$, то функция $Z_\nu(x)$ также имеет бесконечное число нулей.

Далее, все нули функции Бесселя $J_\nu(x)$ изолированные (теорема 7.2), поэтому на любом отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ может содержаться лишь конечное число нулей. Отсюда следует первое утверждение теоремы о том, что множество положительных нулей функции $J_\nu(x)$ счетно.

2°. Пусть $|\nu| = \dfrac{1}{2}$. Тогда все соседние нули функций $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin x$ и $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos x$ отстоят друг от друга на расстоянии, равном π.

3°. Пусть $|\nu| < \dfrac{1}{2}$. Для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $x_*(\varepsilon) = \sqrt{\dfrac{1-4\nu^2}{4\varepsilon}}$, что при $x > x_*(\varepsilon)$

$$m = 1 < \psi(x) = 1 - \frac{4\nu^2 - 1}{4x^2} < 1 + \varepsilon = M .$$

Если $\mu_1 > x_*$ и $\mu_2 > x_*$ — два соседних нуля функции $Z_\nu(x)$ (и функции $J_\nu(x)$), то в соответствии с леммой 7.1 имеем

$$\frac{\pi}{\sqrt{1+\varepsilon}} < \mu_2 - \mu_1 < \frac{\pi}{\sqrt{1}} .$$

На основании этих неравенств можно заключить, что расстояние между последовательными нулями функции Бесселя $J_\nu(x)$ при $|\nu| < \dfrac{1}{2}$ меньше, чем π, и стремится к π при неограниченном возрастании значений корней.

4°. Пусть $|\nu| > \dfrac{1}{2}$. Для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $x_*(\varepsilon) = \sqrt{\dfrac{4\nu^2-1}{4\varepsilon}}$, что при $x > x_*(\varepsilon)$

$$m = 1 - \varepsilon < \psi(x) = 1 - \frac{4\nu^2 - 1}{4x^2} < 1 = M .$$

Для любых двух соседних нулей μ_1 и μ_2 функции $J_\nu(x)$ таких, что $\mu_1 > x_*$ и $\mu_2 > x_*$, справедливы неравенства

$$\frac{\pi}{\sqrt{1}} < \mu_2 - \mu_1 < \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon}}.$$

Следовательно, при $|\nu| > \frac{1}{2}$ расстояние между последовательными нулями функции Бесселя $J_\nu(x)$ больше, чем π, и это расстояние стремится к π при удалении нулей от начала координат.

Отметим, что полученный результат о том, что расстояние между соседними нулями функции Бесселя стремится к π по мере их удаления от начала координат, согласуется с асимптотическим представлении (6.1) функции Бесселя $J_\nu(x)$.

Теорема 7.4. *Величина наименьшего положительного нуля функции Бесселя* $J_\nu(x)$, $\nu > 0$, *неограниченно возрастает с ростом числа* ν.

Доказательство. Пусть $\nu_2 > \nu_1 > 0$, и α — наименьший положительный корень функции Бесселя $J_{\nu_2}(x)$. Так как

$$1 - \frac{4\nu_1^2 - 1}{4x^2} > 1 - \frac{4\nu_2^2 - 1}{4x^2},$$

то по теореме сравнения Штурма на интервале $(0, \alpha)$ находится, по крайней мере, один нуль функции $J_{\nu_1}(x)$. В частности, на интервале $(0, \alpha)$ находится наименьший положительный нуль β функции $J_{\nu_1}(x)$. Таким образом, величина наименьшего положительного нуля функции Бесселя $J_\nu(x)$, $\nu > 0$, возрастает с возрастанием числа ν. Нетрудно увидеть, что она возрастает бесконечно при безграничном возрастании ν. Это следует из формулы

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} =$$

$$
=\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left[1-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2}}{1!(\nu+1)}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{4}}{2!(\nu+1)(\nu+2)}-\ldots\right].
$$

Очевидно, что при $\nu>0$ справедлива оценка

$$
\left|1-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2}}{1!(\nu+1)}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{4}}{2!(\nu+1)(\nu+2)}-\ldots\right|\le 1+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2}}{1!(\nu+1)}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{4}}{2!(\nu+1)}+\ldots=
$$

$$
=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!(\nu+1)}=\frac{1}{(\nu+1)}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!}-1\right)=\frac{e^{\frac{x^2}{4}}-1}{(\nu+1)}.
$$

Отсюда заключаем, что для любого заданного значения $x>0$ найдется $\nu_*(x)$ такое,

$$
\nu_*(x)=\max\left(0,\ 2e^{\frac{x^2}{4}}-3\right),
$$

что при $\nu>\nu_*(x)$ на интервале $(0,x)$ функция $J_\nu(x)\ne 0$.

<u>Следствие.</u> Функции Бесселя $J_\nu(x)$, $\nu>0$ и $J_{\nu+1}(x)$ не могут иметь общего нуля. В самом деле, при любом целом положительном m справедливо следующее равенство, получаемое с помощью рекуррентного соотношения (3.10):

$$
J_{\nu+m}(x)=f(x)J_\nu(x)+F(x)J_{\nu+1}(x),
$$

где $f(x)$ и $F(x)$ — известные функции. Если бы при некотором $\mu>0$ оказалось, что $J_\nu(\mu)=J_{\nu+1}(\mu)=0$, то при любом достаточно большом m оказалось бы, что и $J_{\nu+m}(\mu)=0$. Это противоречит утверждению теоремы 7.4.

Теорема 7.5. *Между двумя последовательными положительными нулями функции Бесселя* $J_\nu(x)$, $\nu > 0$ *находится один и только один корень функции Бесселя* $J_{\nu+1}(x)$ *и, наоборот.*

Доказательство. Пусть $\nu > 0$ и $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ — два последовательных нуля функции Бесселя $J_\nu(x)$. Воспользуемся соотношением (3.1):

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}. \qquad (3.1)$$

Функция $\dfrac{J_\nu(x)}{x^\nu}$ гладкая на отрезке $[\mu_1, \mu_2]$ и обращается в нуль на концах отрезка. По теореме Ролля, найдется точка $\xi \in (\mu_1, \mu_2)$ такая, что производная этой функции обращается в точке ξ в нуль, т. е.

$$\left.\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)\right|_{x=\xi} = 0.$$

Из (3.1) следует, что точка ξ является нулем функции $J_{\nu+1}(x)$, т. е. $J_{\nu+1}(\mu) = 0$. Итак, между двумя соседними нулями функции $J_\nu(x)$ лежит по крайней мере один корень функции $J_{\nu+1}(x)$.

Если воспользоваться соотношением (3.4)

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)\right) = x^{\nu+1} J_\nu(x),$$

то аналогично доказывается, что между двумя соседними нулями функции $J_{\nu+1}(x)$ лежит, по крайней мере, один корень функции $J_\nu(x)$.

Сопоставляя два полученных утверждения, убеждаемся в том, что положительные нули функций $J_\nu(x)$ и $J_{\nu+1}(x)$ разделяют друг друга, т. е. между двумя положительными нулями функции $J_\nu(x)$ находится один и только один корень функции $J_{\nu+1}(x)$ и, наоборот.

Для приближенного вычисления первых положительных корней $\mu_1^{(\nu)}$, $\mu_2^{(\nu)}, \ldots$ функции Бесселя $J_\nu(x)$ можно применить формулу Мак-Магона

$$\mu_k^{(\nu)} = \alpha - \frac{(4\nu^2 - 1)}{8\alpha} - \frac{4(4\nu^2 - 1)(28\nu^2 - 31)}{3 \cdot (8\alpha)^3},$$

где ради краткости положено $\alpha = \dfrac{\pi}{4}(2\nu - 1 + 4k)$.

Для вычисления положительных корней функции Бесселя $J_\nu(x)$ с большими номерами пользуются асимптотическим представлением (6.1) функции Бесселя и получают

$$\mu_k^{(\nu)} = \frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{2}\nu + \pi k.$$

На рис. 1 представлены графики функций Бесселя $J_0(x)$, $J_1(x)$ и $J_2(x)$.

§ 8. О разложении функций в ряды Фурье–Бесселя

Раньше было установлено, что функции Бесселя $J_\nu(x)$ при $\nu > -1$ обладают свойством ортогональности, которое в применении к ним выражается равенством

$$\int_0^1 x J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x)\, dx = 0, \tag{8.1}$$

где α и β — два положительных корня функции $J_\nu(x)$, отличные друг от друга. Если $\alpha = \beta$, то равенство (8.1) заменяется другим:

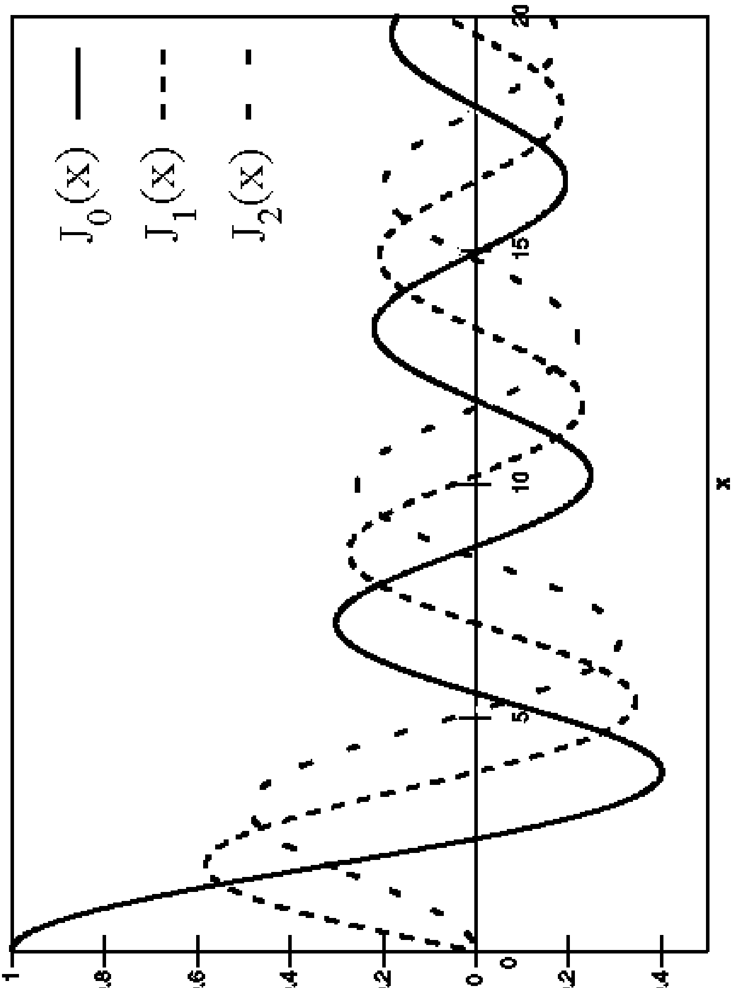

Рис. 1

$$\int_0^1 x J_\nu^2(\alpha x)\,dx = \frac{J_\nu'^2(\alpha)}{2}. \qquad (8.2)$$

Равенство (8.1) дает возможность находить коэффициенты особого разложения какой-нибудь функции $f(x)$ по функциям Бесселя, которое имеет вид

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_\nu(\mu_m x). \qquad (8.3)$$

Здесь $0 < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4 \ldots$ — положительные нули функции $J_\nu(x)$, занумерованные в порядке их возрастания.

Предположим, что разложение (8.3) существует и что ряд в правой части этого равенства сходится на отрезке $[0,1]$ равномерно. Тогда помножим обе части равенства (8.3) на $xJ_\nu(\mu_k x)$ и в правой части проведем почленное интегрирование. Таким образом, получается соотношение

$$\int_0^1 x f(x) J_\nu(\mu_k x)\,dx = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_0^1 x J_\nu(\mu_m x) J_\nu(\mu_k x)\,dx. \qquad (8.4)$$

В силу равенства (8.1) в правой части (8.4) равны нулю все те слагаемые, где $m \neq k$. Поэтому равенство (8.4) перепишется в таком виде:

$$\int_0^1 x f(x) J_\nu(\mu_k x)\,dx = a_k \int_0^1 x J_\nu^2(\mu_k x)\,dx = a_k \frac{J_\nu'^2(\mu_k)}{2}.$$

Отсюда получается следующее выражение:

$$a_k = \frac{2}{J_\nu'^2(\mu_k)} \int_0^1 x f(x) J_\nu(\mu_k x)\,dx. \qquad (8.5)$$

Разложение (8.3), в котором коэффициенты a_m определяются с помощью формулы (8.5), называется разложением функции $f(x)$ в ряд Фурье–Бесселя. Подобные разложения встречаются при исследовании многих вопросов.

Предыдущие рассуждения были основаны на двух гипотезах: предполагалось, что разложение такого вида для данной функции существует и что оно равномерно сходящееся, или, по крайней мере, что почленное интегрирование ряда, какое требовалось по ходу дела, законно. Для произвольной функции $f(x)$ справедливость этих гипотез непосредственно не видна. Поэтому предыдущих рассуждений недостаточно, чтобы установить справедливость разложения функций в ряд Фурье–Бесселя.

Ниже без доказательства приводятся теоремы о разложении функций в ряды Фурье по функциям Бесселя. Эти теоремы уточняют общую теорему Стеклова о разложении функции в ряд Фурье по собственным функциям для частного случая, когда собственными функциями являются функции Бесселя.

Теорема 8.1. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[0, l]$ *и имеет абсолютно интегрируемую на* $(0, l)$ *производную. Тогда ряд Фурье этой функции по функциям Бесселя* $J_\nu\left(\frac{\mu_k}{l}x\right)$ $(\nu \geq 0)$ *сходится равномерно к* $f(x)$ *на всяком отрезке* $[\delta, l-\delta]$ *где* $0 < \delta < \frac{l}{2}$. *Если* $f(l)=0$, *то сходимость будет равномерной на всяком отрезке* $[\delta, l]$. *(Здесь* μ_k *— положительные корни уравнения* $J_\nu(x)=0$*).*

Замечание. Утверждение теоремы 8.1 справедливо также в случае, когда μ_k — положительные корни уравнения (5.7)

$$\alpha J_\nu(x) + \beta x J'_\nu(x) = 0,$$

если дополнительно потребовать, чтобы $\nu = -\frac{\alpha}{\beta}$ и опустить условие $f(l)=0$.

Теорема 8.2. *Если* $f(x)$ *непрерывна и дважды дифференцируема на отрезке* $[0, l]$ *и* $f(0)=f'(0)=0$, $\alpha f(l)+\beta l f'(l)=0$, *то ее ряд Фурье по функциям Бесселя* $J_\nu\left(\frac{\mu_k}{l}x\right)$ *порядка* $\nu \ge 0$ *сходится равномерно к* $f(x)$ *на отрезке* $[0,l]$. *(Здесь* μ_k — *положительные корни уравнения* $\alpha J_\nu(x) + \beta x J'_\nu(x) = 0$ *).*

§ 9. Применение функций Бесселя при решении задач

Многие задачи, возникающие в различных областях науки и техники, математически формулируются как задачи нахождения функции, удовлетворяющей некоторому заданному дифференциальному уравнению с частными производными и дополнительным краевым условиям. Одним из методов решения таких задач является метод разделения переменных. Основная идея этого метода состоит в поиске решения задачи в виде суммы (конечной или бесконечной) специальных частных решений дифференциального уравнения. Всякое из частных решений должно иметь специальную структуру: оно должно представлять собой произведение функций, каждая из которых зависит только от одной независимой переменной. Для определения функций одной переменной при этом возникают обыкновенные дифференциальные уравнения. Если при формулировке задачи используются полярные или цилиндрические координаты, то одним из упомянутых обыкновенных дифференциальных уравнений оказывается уравнение Бесселя (1.1).

Рассмотрим задачу о малых поперечных колебаниях однородной круглой мембраны радиуса R, закрепленной по краям, под действием начального возмущения. Математически эта задача формулируется так.

Пусть D — круг радиуса R, т. е. $D = \{x = (x_1, x_2) : |x| < R\}$. Требуется найти функцию

$$u(t,x) \in C^2\big(D \times (0,\infty)\big) \cap C^1\big(\overline{D} \times [0,\infty)\big),\ |u(t,k)| < \infty,$$

удовлетворяющую уравнению

$$u_{tt} = a^2 \Delta_x u \,, \qquad (x,t) \in \left(D \times (0,\infty)\right), \tag{9.1}$$
начальным условиям
$$u(0,x) = u_0(x)\,, \qquad u_t(0,x) = u_1(x) \qquad x \in \overline{D}\,, \tag{9.2}$$
и однородным граничным условиям первого рода
$$u(t,x)\big|_{\partial D} \equiv 0\,, \qquad t \ge 0\,. \tag{9.3}$$
Здесь $u_0(x) \in C^1\left(\overline{D}\right)$, $u_1(x) \in C\left(\overline{D}\right)$, и выполняются условия согласования
$$u_0(x)\big|_{\partial D} = 0\,, \qquad u_1(x)\big|_{\partial D} = 0\,.$$
Если перейти к полярным координатам (r,φ)
$$x = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,, \qquad r \ge 0\,, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi\,,$$
и к новой функции $w(t,r,\varphi) = u[t, x(r,\varphi)]$, то смешанная задача (9.1)–(9.3) запишется следующим образом:
$$w_{tt} = a^2\left(w_{rr} + \frac{1}{r}w_r + \frac{1}{r^2}w_{\varphi\varphi}\right), \tag{9.4}$$
$$0 \le r < R\,, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi\,, \qquad t > 0\,,$$
$$w(0,r,\varphi) = w_0(r,\varphi)\,, \qquad w_t(0,r,\varphi) = w_1(r,\varphi)\,, \tag{9.5}$$
$$0 \le r < R\,, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi\,,$$
$$w(t,R,\varphi) = 0\,, \tag{9.6}$$
$$0 \le \varphi < 2\pi\,, \qquad t \ge 0\,,$$
и при $0 \le r < R$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $t \ge 0$ должно выполняться
$$\left|w(t,r,\varphi)\right| < \infty\,, \qquad w_0(R,\varphi) = 0\,, \quad w_1(R,\varphi) = 0\,,$$
$$w(t,r,\varphi + 2\pi) = w(t,r,\varphi)\,.$$

Условие ограниченности $|w| < \infty$ является естественным следствием физической постановки задачи, а условие периодичности по φ является следствием условия однозначности решения.

Для решения задачи (9.4)–(9.6) применим метод разделения переменных. Ищем решение уравнения (9.4) в виде произведения двух функций
$$w(t,r,\varphi) = T(t) \cdot V(r,\varphi)\,.$$

Подставив это представление в уравнение (9.4), получим

$$T'' \cdot V = a^2 \cdot T \cdot \left(V_{rr} + \frac{1}{r} V_r + \frac{1}{r^2} V_{\varphi\varphi} \right).$$

Разделяя переменные, будем иметь

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{1}{V} \left(V_{rr} + \frac{1}{r} V_r + \frac{1}{r^2} V_{\varphi\varphi} \right) = -\lambda\ . \tag{9.7}$$

В равенстве (9.7) левая часть зависит только от t, а правая часть — только от r, φ. Следовательно, общая величина этих выражений есть некоторая постоянная $-\lambda$ (эту постоянную выберем не положительной, чтобы удовлетворить граничным условиям). В результате приходим к системе уравнений для функций $T(t)$ и $V(r, \varphi)$:

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0\,, \qquad t > 0\,, \tag{9.8}$$

$$V_{rr} + \frac{1}{r} V_r + \frac{1}{r^2} V_{\varphi\varphi} + \lambda r = 0\,, \quad 0 \le r < R\,, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi\,. \tag{9.9}$$

Общее решение уравнения (9.8) находится без труда.

Будем искать такие решения уравнения (9.9), которые являются 2π-периодические по φ (т. е. $V(r, \varphi) = V(r, \varphi + 2\pi)$), которые ограничены в круге (т. е. $|V(r, \varphi)| < \infty$) и которые удовлетворяют краевому условию $V(R, \varphi) = 0$. Эти решения также будем искать методом разделения переменных, а именно положим

$$V(r, \varphi) = \Phi(\varphi) \cdot Z(r)\,.$$

Подстановка этого представления в (9.9) дает

$$\Phi''(\varphi) + \nu^2 \Phi(\varphi) = 0\,, \tag{9.10}$$

$$Z''(r) + \frac{1}{r} Z'(r) + \left(\lambda - \frac{\nu^2}{r^2} \right) Z(r) = 0\,. \tag{9.11}$$

Условие 2π-периодичности функции $V(r, \varphi)$ приводит к тому, что функция $\Phi(\varphi)$ также должна быть 2π-периодической. Это возможно лишь при $\nu = n$ – целом. Поэтому общий интеграл уравнения (9.10) есть

$$\Phi(\varphi) = \widetilde{A}_n \cos n\varphi + \widetilde{B}_n \sin n\varphi\,, \qquad n \text{ – целое.}$$

Уравнение (9.11) имеет теперь вид

$$Z''(r)+\frac{1}{r}Z'(r)+\left(\lambda-\frac{n^2}{r^2}\right)Z(r)=0. \qquad (9.11')$$

Введем новую независимую переменную $x=\sqrt{\lambda}r$ и новую функцию $y(x)=y(\sqrt{\lambda}r)=Z(r)$. Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению Бесселя:

$$y''(x)+\frac{1}{x}y'(x)+\left(1-\frac{n^2}{r^2}\right)y(x)=0. \qquad (9.12)$$

Общее решение уравнения Бесселя (9.12) имеет вид

$$y(x)=c_1J_n(x)+c_2Y_n(x).$$

Условие ограниченности функции $V(r,\varphi)$ требует, чтобы решения уравнения Бесселя также выбирались ограниченными. Поэтому $y(x)=c_1J_n(x)$. Отсюда $Z(r)=c_1J_n(\sqrt{\lambda}r)$.

Краевое условие $V(R,\varphi)=0$ приводит к характеристическому уравнению для определения числа λ:

$$V(R,\varphi)=0,$$

$$Z(R)=0,$$

$$J_n(\sqrt{\lambda}R)=0.$$

Следовательно, $\sqrt{\lambda}\cdot R=\mu_k^{(n)}$, $(k=1,2,\ldots)$ – k-й положительный корень функции Бесселя первого рода целого индекса n.

Для числа λ получаем

$$\lambda_k^{(n)}=\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}\right)^2, \qquad (n=0,1,2,\ldots;\quad k=1,2,\ldots).$$

Таким образом, функции $Z_{nk}(r)=J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r\right)$ являются ограниченными решениями уравнения (9.11), обращающимися в нуль при $r=R$.

Подытоживая все, полученное выше, можно заключить, что функции

$$w_{nk}(t,r,\varphi)=\left[A_{nk}\cos\left(\frac{a\mu_k^{(n)}}{R}t\right)+B_{nk}\sin\left(\frac{a\mu_k^{(n)}}{R}t\right)\right]\cos n\varphi\cdot J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r\right)+$$

$$+\left[C_{nk}\cos\left(\frac{a\mu_k^{(n)}}{R}t\right)+D_{nk}\sin\left(\frac{a\mu_k^{(n)}}{R}t\right)\right]\sin n\varphi\cdot J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r\right),$$

$$(n=0,1,2,\ldots;\quad k=1,2,\ldots)$$

являются ограниченными решениями уравнения (9.4), удовлетворяющие условиям гладкости и граничному условию.

Решение задачи (9.4)–(9.6) ищется в виде формального ряда

$$w(t,r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}w_{nk}(t,r,\varphi).$$

Неизвестные коэффициенты разложения A_{nk}, B_{nk}, C_{nk}, D_{nk} определяются в результате разложения функций $w_0(r,\varphi)$ и $w_1(r,\varphi)$ по системе функций

$$\left\{J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r\right)\cos n\varphi,\ J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r\right)\sin n\varphi\right\}.$$

Список литературы

1. *Кузьмин Р.О.* Бесселевы функции. Л.-М.: ГРОЛ, 1935.
2. *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974.
3. *Коренев Б.Г.* Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971.
3. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
4. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
5. *Уроев В.М.* Уравнения математической физики. М.: ИФ «Яуза», 1998.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебно-методическое пособие

ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Составитель: *ЗУБОВ Владимир Иванович*

Редактор *В.А. Дружинина.* Корректор *О.П. Котова.*

Подписано в печать 01.05.2007. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Усл. печ л. 3,2. Уч.- изд. л. 3,0. Тираж 300 экз.

Заказ № ф- .

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский физико-технический институт (государственный университет)
Отдел автоматизированных издательских систем.“ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ”
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9