МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Кафедра высшей математики

М. В. Балашов

ДОБАВЛЕНИЕ К ЛЕКЦИЯМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ. 2 СЕМЕСТР

Учебно-методическое пособие

МОСКВА
МФТИ
2015

УДК 517

Рецензент
Доктор физико-математических наук, профессор *Г. Е. Иванов*

Балашов, М. В.
Добавление к лекциям по математическому анализу. 2 семестр: учебно-методическое пособие по курсу *Математический анализ* / М. В. Балашов. – М.: МФТИ, 2015. – 28 с.

Пособие включает некоторые темы по математическому анализу, прочитанные автором студентам 1 курса ФУПМ весной 2015 года. Предназначено для студентов 1 курса МФТИ, а также для преподавателей.

Учебное издание

Балашов Максим Викторович

Добавление к лекциям по математическому анализу. 2 семестр

Учебно-методическое пособие

Редактор: О. П. Котова
Компьютерная верстка: М. В. Балашов
Подписано в печать: 31.08.2015. Формат $60 \times 84^1/_{16}$. Усл. печ. л. 1,75.
Уч.-изд. л. 1,6. Тираж 250 экз. Заказ № 349.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии « Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: polygraph@mipt.ru

Содержание

В методическое пособие вошли некоторые темы, прочитанные автором студентам 1 курса ФУПМ во 2-м семестре 2014-2015 учебного года. В пособие вошел главным образом тот материал, который трудно достижим или отсутствует в стандартных пособиях по математическому анализу, использующихся в МФТИ.

Автор благодарен Г. Е. Иванову за полезные обсуждения.

М. В. Балашов

Июль, 2015 Долгопрудный

1. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Для $\delta > 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ через $U_\delta(x_0)$ мы обозначим открытую δ-окрестность (в евклидовой метрике) точки x_0 из $\mathbb{R}^n$.

Частную производную функции $f : U_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$ по переменной x_i в точке x_0 мы обозначим через $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$ или, короче, через $f_{x_i}(x_0)$.

Для функции $f : U_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$ через $d^k f(x_0)$ мы будем обозначать k-й дифференциал функции f в точке x_0 [1, §9 главы 6], т.е.

$$d^k f(x_0) = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f(x)|_{x=x_0} =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial^{\,k} f(x_0)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} dx_{i_1} \dots dx_{i_k}.$$

Далее, говоря, что существует $d^k f(x_0)$ (см. определение [1, §9 глава 6]), мы будем полагать, что дифференциалы $d^l f(x_0)$ существуют в окрестности точки x_0 для $l = 0, 1, \dots, k-1$. Под $d^0 f(x_0)$ мы подразумеваем $f(x_0)$.

Теорема 1.1. *Пусть $f : U_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$ и существует $d^m f(x_0)$, где $m \geq 1$. Тогда*

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} d^k f(x_0) + o(\|\Delta x\|^m), \;\; \Delta x \to 0.$$

Напомним, что из определения o-малого следует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{o(\|\Delta x\|^m)}{\|\Delta x\|^m} = 0.$

Доказательство. Докажем теорему индукцией по m. При $m = 1$ утверждение вытекает из определения дифференцируемой в точке x_0 функции:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + (f'(x_0), \Delta x) + o(\|\Delta x\|), \;\; \Delta x \to 0,$$

$(f'(x_0), \Delta x)$ — скалярное произведение векторов $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ и $f'(x_0) = (f_{x_1}(x_0), \dots, f_{x_n}(x_0))$.

Допустим, теорема доказана для порядков $1, \dots, m-1$. Докажем ее для порядка m.

Рассмотрим функцию скалярной переменной t:

$$\varphi(t) = f(x_0 + t\Delta x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{m} \frac{t^k}{k!} d^k f(x_0)$$

при $t \in [0, 1]$. Здесь $\Delta x \in U_\delta(0)$. Поскольку

$$\varphi(1) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} d^k f(x_0),$$

то нам нужно доказать, что $\varphi(1) = o(\||\Delta x\|^m)$, $\Delta x \to 0$.

Функция φ дифференцируема по $t \in [0, 1]$ (как функция одной переменной) и $\varphi(0) = 0$. По теореме Лагранжа о среднем получаем, что найдется $t_0 \in (0, 1)$ такое, что

$$|\varphi(1)| = |\varphi(1) - \varphi(0)| = |\varphi'(t_0)| \leq \sup_{t \in (0,1)} |\varphi'(t)|. \tag{1.1}$$

Оценим $|\varphi'(t)|$.

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_0 + t\Delta x)\Delta x_i - \sum_{k=1}^{m} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} d^k f(x_0).$$

Для каждого $i = 1, \dots, n$ для функции $f_{x_i} : U_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$ по условию теоремы существует $d^{m-1} f_{x_i}(x_0)$ и по предположению индукции

$$f_{x_i}(x_0 + t\Delta x) = f_{x_i}(x_0) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{t^k}{k!} d^k f_{x_i}(x_0) + o_i(t^{m-1}\|\Delta x\|^{m-1}), \;\; \Delta x \to 0.$$

Отметим, что функции $o_i(t^{m-1}\|\Delta x\|^{m-1})$ являются o-малыми по $\|\Delta x\|^{m-1}$ равномерно по $t \in (0, 1]$. Действительно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sup_{t \in (0,1]} \frac{o_i(t^{m-1}\|\Delta x\|^{m-1})}{\|\Delta x\|^{m-1}} = \lim_{\Delta x \to 0} \sup_{t \in (0,1]} \frac{o_i(t^{m-1}\|\Delta x\|^{m-1})}{t^{m-1}\|\Delta x\|^{m-1}} \cdot t^{m-1} = 0.$$

Поэтому

$\varphi'(t) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(f_{x_i}(x_0) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{t^k}{k!} d^k f_{x_i}(x_0) + o_i(\|\Delta x\|^{m-1}) \right) \Delta x_i -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} d^k f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_0)\Delta x_i +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{t^k}{k!} \left(\sum_{i=1}^{n} d^k f_{x_i}(x_0)\Delta x_i \right) + \sum_{i=1}^{n} o_i(\|\Delta x\|^{m-1})\Delta x_i -$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}d^k f(x_0).$$

Заметим, что для любого $i=1,\ldots,n$ верно равенство

$$o_i(\|\Delta x\|^{m-1})\Delta x_i = o(\|\Delta x\|^m), \quad \Delta x \to 0,$$

т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} o_i(\|\Delta x\|^{m-1})\Delta x_i = o(\|\Delta x\|^m),\ \Delta x \to 0.$$

Далее заметим, что, по определению,

$$\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_0)\Delta x_i = df(x_0)$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} d^k f_{x_i}(x_0)\Delta x_i =$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n}\frac{\partial^{\,k+1} f(x_0)}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}\partial x_i}\Delta x_{i_1}\ldots\Delta x_{i_n}\right)\Delta x_i = d^{k+1}f(x_0).$$

Поэтому
$\varphi'(t) =$

$$= df(x_0)+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{t^k}{k!}d^{k+1}f(x_0)-\sum_{k=1}^{m}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}d^k f(x_0)+o(\|\Delta x\|^m) = o(\|\Delta x\|^m)$$

при $\Delta x \to 0$. Теорема доказана. □

Заметим, что в теореме не требуется наличие m-го дифференциала в окрестности точки x_0. Это обстоятельство бывает важным в приложениях, например, в экстремальных задачах (в достаточных условиях экстремума).

2. Об интеграле Римана и его приложениях

2.1. Формула Ньютона—Лейбница

Уточним, когда верна формула Ньютона—Лейбница. Хорошо известный результат [1, теорема 2 §5 главы 7] дает достаточные условия:

если функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрерывна, то функция $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ является первообразной функции f и, в частности, справедлива формула $F(b)-F(a)=\int\limits_a^b f(t)\,dt$.

Теорема 2.2. *Пусть функция $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ — некоторая первообразная f на $[a,b]$. Тогда*

$$F(b)-F(a)=\int\limits_a^b f(t)\,dt.$$

Доказательство. Пусть $\tau=\{x_i\}_{i=1}^I$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$, $x_0=a<x_1<\cdots<x_I=b$, с мелкостью

$$|\tau|=\max_{1\le i\le I}(x_i-x_{i-1}).$$

Тогда

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{I}(F(x_i)-F(x_{i-1})).$$

По теореме Лагранжа о среднем

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),$$

где $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$. Поэтому

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{I}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=\sigma(\tau,f,\xi)$$

(здесь $\sigma(\tau,f,\xi)$ — стандартное обозначение суммы Римана для разбиения τ, функции f и выборки $\xi=\{\xi_i\}_{i=1}^I$). В силу интегрируемости функции f по Риману на отрезке $[a,b]$

$$F(b)-F(a)=\lim_{|\tau|\to 0}\sigma(\tau,f,\xi)=\int\limits_a^b f(t)\,dt.$$

□

Заметим, что наличие первообразной у функции f на отрезке $[a,b]$ не гарантирует выполнения формулы Ньютона—Лейбница. Причина этого кроется в том, что производная может быть функцией, не интегрируемой по Риману на отрезке. Приведем соответствующий пример.

Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ функцию: $F(0)=0$, $F(x)=x^{\frac{3}{2}}\cos\frac{1}{x}$ при $x\in(0,1]$. Имеем

$$F'(0)=\lim_{x\to+0}\frac{x^{\frac{3}{2}}\cos\frac{1}{x}}{x}=0,$$

$$F'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{x}+x^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{x},\quad x\in(0,1].$$

Функция $F'(x)$ определена и конечна на $[0,1]$. Однако легко видеть, что функция $F'(x)$ не ограничена во всякой окрестности нуля (за счет слагаемого $x^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{x}$) и тем самым не интегрируема по Риману на отрезке $[0,1]$.

2.2. Иррациональность числа π

Одним интересным и непосредственным приложением интеграла Римана является возможность доказать, что число π является иррациональным.

Рассмотрим интегралы

$$I_n=\frac{1}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^n\cos t\,dt,\quad n=0,1,2,\ldots.$$

Легко видеть, что $I_0=2$, $I_1=4$ и интегрированием по частям получаем рекуррентную формулу

$$I_n=(4n-2)I_{n-1}-\pi^2 I_{n-2},\quad n\geq 2.$$

Отсюда следует, что $I_n=P_n(\pi^2)$, где P_n — многочлен степени не более n с целыми коэффициентами.

Допустим, что π рационально, то есть $\pi=\frac{p}{q}$, где числа p и q натуральные. Тогда

$$P_n\left(\frac{p^2}{q^2}\right)=\frac{1}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^n\cos t\,dt>0,\tag{2.2}$$

а также

$$\frac{1}{n!}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi^2}{4}-t^2\right)^n\cos t\,dt\leq\frac{2}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1},$$

то есть

$$q^{2n}P_n\left(\frac{p^2}{q^2}\right)\leq\frac{2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}q^{2n}}{n!}.\tag{2.3}$$

В силу (2.2) и свойств многочлена P_n число $q^{2n}P_n\left(\frac{p^2}{q^2}\right)$ натуральное при всяком n.

С другой стороны

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}q^{2n}}{n!}=+0$$

(почему?). Итак, при больших n в формуле (2.3) слева стоит целое положительное число, а справа — число из промежутка $(0,1)$. Противоречие.

Упражнение 1. Определим интегралы

$$I_n(x)=\frac{1}{n!}\int\limits_{-x}^{x}\left(x^2-t^2\right)^n e^t\,dt.$$

Докажите, что $I_n(x)=P_n(x)e^x+Q_n(x)e^{-x}$, где P_n и Q_n — многочлены с целыми коэффициентами степени не более $2n+1$. Покажите, что отсюда вытекает иррациональность e^x для любого рационального числа x.

2.3. Формулы Валлиса и Стирлинга

Упражнение 2. Рассмотрите интегралы $I_n=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$. Выведите рекуррентную формулу $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ (где $I_0=\frac{\pi}{2}$, $I_1=1$). Докажите, что

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2.\tag{2.4}$$

Здесь для натурального n через $n!!$ обозначено произведение всех натуральных чисел, меньших или равных n и одной с ним четности, $0!!=1$. Формула (2.4) называется формулой Валлиса.

Выведем теперь формулу Стирлинга, которая дает асимптотику $n!$:

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n(1+\varepsilon_n),\qquad\text{где}\quad\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0.\tag{2.5}$$

Поскольку

$$\ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k \sim \int\limits_0^n \ln x\,dx = n\ln n - n, \quad n\to\infty,$$

то, потенцируя, получаем

$$n! = \alpha_n \frac{n^n}{e^n},$$

где α_n — некоторая последовательность, имеющая больший порядок малости, чем $\frac{n^n}{e^n}$. Вся проблема и состоит в нахождении α_n. Для этого нам потребуется уточнить некоторые оценки с функцией логарифма.

Пусть $x\in(0,1)$. По теореме Лагранжа о среднем найдется число $\xi\in(0,x)$ такое, что

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \frac{2x}{1-\xi^2} > 2x,$$

откуда

$$\ln\frac{1+x}{1-x} > 2x, \qquad \forall x\in(0,1).$$

Следовательно,

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}}\right) > \frac{2}{2n+1}$$

и

$$\left(n+\frac12\right)\ln\left(1+\frac1n\right) > 1,$$

или

$$\left(1+\frac1n\right)^{n+\frac12} > e. \tag{2.6}$$

Рассмотрим последовательность

$$x_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac12}}.$$

Из формулы (2.6) вытекает неравенство

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac1e\left(1+\frac1n\right)^{n+\frac12} > 1,$$

то есть последовательность $\{x_n\}$ неотрицательна и монотонно убывает. Значит, по теореме Вейерштрасса существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \geq 0$.

Покажем, что $a>0$.

Используя теорему Лагранжа о среднем, легко доказать (докажите!), что для всякого $x\in(0,1)$ выполнено неравенство

$$\ln\frac{1+x}{1-x} < 2x + \frac23\frac{x^3}{1-x^2}.$$

Поэтому, взяв $x=\frac{1}{2n+1}$, получаем, что

$$\ln\left(1+\frac1n\right) < \frac{2}{2n+1} + \frac23\frac{\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3}{1-\frac{1}{(2n+1)^2}},$$

$$\left(n+\frac12\right)\ln\left(1+\frac1n\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)}.$$

Отсюда

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac1e\left(1+\frac1n\right)^{n+\frac12} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

Значит,

$$x_n e^{-\frac{1}{12n}} < x_{n+1} e^{\frac{1}{12n(n+1)}-\frac{1}{12n}} = x_{n+1}e^{-\frac{1}{12(n+1)}},$$

то есть последовательность $y_n = x_n e^{-\frac{1}{12n}}$ неотрицательна и монотонно возрастает. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{12n}} = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Но так как $y_n>0$ для всех n, то $a\geq y_1>0$.

Итак, имеем

$$x_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac12}} = a(1+\varepsilon_n), \qquad \varepsilon_n\to 0,$$

откуда

$$n! = \frac{an^{n+\frac12}}{e^n}(1+\varepsilon_n). \tag{2.7}$$

В силу формулы (2.7)

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = \frac{a\sqrt{n}(1+\varepsilon_n)^2}{\sqrt{2}(1+\varepsilon_{2n})}.$$

Применяя формулу Валлиса (2.4), получаем, что

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}a^2\frac{n}{2}\frac{(1+\varepsilon_n)^4}{(1+\varepsilon_{2n})^2} = \frac{a^2}{4},$$

поэтому $a = \sqrt{2\pi}$, и

$$n! = \sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n (1+\varepsilon_n).$$

$\square$

2.4. Интегрируемость суперпозиции функций

Пусть функция $f : [0,1] \to [0,1]$ непрерывна и не постоянная, а $g : [0,1] \to [0,1]$ интегрируема по Риману. Что можно сказать об интегрируемости по Риману функций $f(g(x))$ и $g(f(x))$? Несмотря на казалось бы «симметричную» постановку вопроса, функция $f(g(x))$ интегрируема по Риману, а функция $g(f(x))$ — не обязательно. Докажем это.

Лемма 2.1. *Функция $f(g(x))$ интегрируема по Риману.*

Доказательство. Утверждение сразу вытекает из критерия интегрируемости: функция интегрируема на отрезке тогда и только тогда, когда она ограничена и множество ее точек разрыва имеет Лебегову меру ноль на этом отрезке [2, глава 13, §2.5, с. 193]. Мы дадим доказательство, не использующее этот результат (который не доказывался на лекциях).

Пусть ω_f — модуль непрерывности функции f, т.е.

$$\omega_f(\delta) = \sup_{|x-t|<\delta} (f(x) - f(t)),\ \delta > 0, \quad \omega_f(0) = 0.$$

Легко видеть, что ω_f нестрого монотонно возрастает и не константа (почему?) и $\omega_f : [0,1] \to [0, \omega_f(1)]$. Тогда существует обратная функция ω_f^{-1} к функции ω_f, $\omega_f^{-1} : [0, \omega_f(1)] \to [0,1]$. Уточним, как эта функция устроена. Во-первых, $\omega_f^{-1}(0) = 0$. В случае если функция ω_f имеет разрыв в точке $x_0 \in (0,1]$, то для всех $t \in [f(x_0-0), f(x_0+0)]$ определим ω_f^{-1} по правилу $\omega_f^{-1}(t) = x_0$. Если на промежутке (произвольном: открытом, замкнутом, и т.д.) с концами $x_1, x_2 \in (0,1]$, $x_1 < x_2$, функция ω_f постоянна и равна t_0 (и при $x < x_1$ $f(x) < t_0$, а при $x > x_2$ $f(x) > t_0$), то определим $\omega_f^{-1}(t_0) = x_1$. Заметим, что $\omega_f^{-1}(t) > 0$ для всех $t \in (0, \omega_f(1)]$ и нестрого монотонно возрастает (почему?).

Определим

$$h_1(x) = \int_0^x \omega_f^{-1}(t)\,dt, \quad x \in [0, \omega_f(1)],$$

$$h_2(x) = \int_0^x h_1(t)\,dt, \quad x \in [0, \omega_f(1)].$$

Функция h_2 непрерывна, строго возрастает и выпукла ($h_2'(x) = h_1(x)$ и h_1 — возрастающая функция).

По условию $\omega_f(1) \le 1$. Определим функцию $h_3(x) = h_2(x)$ при $x \in [0, \omega_f(1)]$ и

$$h_3(x) = h'_{2-}(\omega_f(1))(x - \omega_f(1)) + h_2(\omega_f(1)), \quad x \in [\omega_f(1), z],$$

где $z \ge \omega_f(1)$ определяется из условия $h_3(z) = 1$. Здесь $h'_{2-}(\omega_f(1))$ — односторонняя производная слева функции h_2 в точке $\omega_f(1)$, см. [3, с. 26].

По построению $h_3 : [0,z] \to [0,1]$, непрерывна, строго возрастает и выпукла. Поэтому обратная функция $w = h_3^{-1}$, $w : [0,1] \to [0,z]$ (более того, отметим, что $w([0,1]) = [0,z]$), возрастает, непрерывна и является вогнутой. Вогнутость вытекает из того, что надграфик функции h_3 — выпуклое множество — является подграфиком функции w. Кроме того, $w(t) \ge \omega_f(t)$ и, по построению, $\lim\limits_{t\to+0} w(t) = 0$ (почему?).

Таким образом, вместо модуля непрерывности f мы можем взять функцию w, которая непрерывна, возрастает и является вогнутой.

Пусть

$$\omega_g([a,b]) = \sup_{x,t\in[a,b]} (g(x) - g(t))$$

— колебание функции g на отрезке $[a,b] \subset [0,1]$. Заметим, что

$$\omega_g([a,b]) \le \omega_g([0,1]) \le 1.$$

В силу критерия интегрируемости [1, теорема 1 §1 главы 7] для любого $\varepsilon \in (0,1)$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения $\tau = \{x_i\}_{i=0}^I$ отрезка $[0,1]$ мелкости $|\tau| < \delta$ и для $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^I \omega_g([x_{i-1}, x_i])\Delta x_i < \varepsilon.$$

Отсюда и в силу возрастания и вогнутости функции w получаем, что

$$w(\varepsilon) \ge w\left(\sum_{i=1}^I \omega_g([x_{i-1}, x_i])\Delta x_i\right) \ge \sum_{i=1}^I w\left(\omega_g([x_{i-1}, x_i])\right)\Delta x_i. \tag{2.8}$$

Поскольку колебание $\omega_{f(g)}([x_{i-1},x_i])$ функции $f(g(x))$ на i-м отрезке разбиения $[x_{i-1},x_i]$ не превосходит $w\left(\omega_g([x_{i-1},x_i])\right)$, то для любого $\varepsilon\in(0,1)$ существует $\delta>0$ такое, что для любого разбиения $\tau=\{x_i\}_{i=0}^I$ мелкости $|\tau|<\delta$, с учетом формулы (2.8), выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{I}\omega_{f(g)}([x_{i-1},x_i])\Delta x_i\le w(\varepsilon),$$

а т.к. $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}w(\varepsilon)=0$, то, в силу [1, теорема 1 §1 главы 7], функция $f(g(x))$ интегрируема по Риману на отрезке $[0,1]$. □

Упражнение 3. Докажите с помощью указанного выше критерия интегрируемости (см. [2, глава 13, §2.5, с. 193]) лемму 2.1. Почему аналогично не удается доказать, что функция $g(f(x))$ интегрируема по Риману?

Лемма 2.2. *Существуют непрерывная функция* $f:[0,1]\to[0,1]$ *и интегрируемая по Риману функция* $g:[0,1]\to[0,1]$ *такие, что функция* $g(f(x))$ *не интегрируема по Риману на отрезке* $[0,1]$.

Доказательство. Пусть $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ — рациональные точки отрезка $[0,1]$. Пусть $\varepsilon\in(0,1)$. Определим множества

$$U_\varepsilon=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left([0,1]\cap\left(r_k-\frac{\varepsilon}{2^{k+1}},r_k+\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)\right),\qquad F_\varepsilon=[0,1]\backslash U_\varepsilon.$$

Множества U_ε, F_ε не измеримы по Жордану (почему?), U_ε открыто в $[0,1]$, F_ε замкнуто в $[0,1]$. Кроме того, суммарная длина интервалов, составляющих U_ε, не более ε.

Пусть $f(x)$ — расстояние от точки x до (компактного) множества F_ε. Заметим, что $f(x)=0$ при $x\in F_\varepsilon$ и $f(x)>0$ при $x\in U_\varepsilon$. Функция f непрерывна (почему?). Определим $g(0)=1$ и $g(x)=0$ при $x\in(0,1]$.

Заметим, что $g(f(x))=1$ при $x\in F_\varepsilon$ и $g(f(x))=0$ при $x\in U_\varepsilon$.

Пусть $\tau=\{x_i\}_{i=0}^I$ — произвольное разбиение отрезка $[0,1]$ мелкости менее $\frac{\varepsilon}{10}$, $w_{g(f)}([x_{i-1},x_i])$ — колебание функции $g(f)$ на отрезке $[x_{i-1},x_i]$. Рассмотрим сумму

$$\sum_{i=1}^{I}w_{g(f)}([x_{i-1},x_i])\Delta x_i.$$

На каждом из отрезков разбиения τ есть рациональное число, поэтому $[x_{i-1},x_i]\cap U_\varepsilon\ne\emptyset$ для всех i. Следовательно суммарная длина отрезков разбиения, в которые попадают точки как из U_ε, так и из F_ε, не менее $1-\varepsilon$. Колебание функции $g(f)$ на таком отрезке равно 1. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{I}w_{g(f)}([x_{i-1},x_i])\Delta x_i\ge{\sum}'w_{g(f)}([x_{i-1},x_i])\Delta x_i\ge1-\varepsilon$$

(штрих у суммы означает, что суммирование ведется по таким i, что $[x_{i-1},x_i]\cap U_\varepsilon\ne\emptyset$ и $[x_{i-1},x_i]\cap F_\varepsilon\ne\emptyset$). Отсюда вытекает [1, теорема 1 §1 главы 7], что функция $g(f)$ не интегрируема по Риману на отрезке $[0,1]$. □

3. Числовые ряды

3.1. Ряды с положительными членами. Монотонность

Ряды с положительными членами, которые удовлетворяют условию монотонности $a_{k+1}\le a_k$ для всех k, являются важным объектом исследования. Например, именно для этих рядов выполняется интегральный признак сходимости [1, теорема 4 §2 главы 9].

Мы приведем еще несколько примеров, где монотонность знакопостоянного ряда позволяет получать важные результаты.

Пример 3.1. Пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{n}a_k$$

состоит из положительных слагаемых и $a_{k+1}\le a_k$ для всех k. Тогда $a_k=o\left(\frac{1}{k}\right)$, $k\to\infty$ (т.е. $\lim\limits_{k\to\infty}ka_k=0$).

Доказательство. По критерию Коши сходимости числового ряда для всякого $\varepsilon>0$ найдется номер N_ε такой, что при любых $m>n\ge N_\varepsilon$ выполнено неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{m}a_k<\varepsilon.$$

Кроме того, $\sum\limits_{k=n+1}^{m}a_k\ge(m-n)a_m$.

Взяв $m=2n$, получаем $na_{2n}<\varepsilon$, т.е. $2na_{2n}<2\varepsilon$ для всех $n\ge N_\varepsilon$.

Взяв $m=2n+1$, получаем $(2n+1)a_{2n+1}\frac{n+1}{2n+1}<\varepsilon$ для всех $n\ge N_\varepsilon$, или $(2n+1)a_{2n+1}<\frac{2n+1}{n+1}\varepsilon<2\varepsilon$. Итак, $ka_k\to0$. □

Легко видеть, что без условия монотонности порядок убывания a_k в предыдущем примере может быть любым.

Пусть $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим ряд с $a_n = \frac{1}{n^2}$, при $n \neq m^k$ для любого натурального m, $a_{m^k} = \frac{1}{m^{1+\varepsilon}}$. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n \neq m^k} \frac{1}{n^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{1+\varepsilon}},$$

т.е. ряд с общим членом a_n сходится. Однако

$$a_{m^k} = \left(\frac{1}{m^k}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{k}}.$$

За счет выбора малого $\varepsilon > 0$ и большого натурального k показатель $\frac{1+\varepsilon}{k}$ может быть сделан сколь угодно малым.

Упражнение 1. Пусть $a_k > 0$ и $a_{k+1} \leq a_k$ для всех k. Пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$$

сходится. Докажите, что $a_k = o\left(\frac{1}{\ln k}\right)$, $k \to \infty$. *Указание.* Рассмотрите $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_k$, $x \in [a_k, a_{k+1})$, и, пользуясь интегральным признаком, сведите задачу к нахождению асимптотики $f(x)$, $x \to +\infty$.

При исследовании рядов часто используются простые оценки, например, неравенства о средних.

Пример 3.2. Пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

сходится. Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{k}$$

сходится.

Доказательство. Используя неравенство

$$\frac{|a_k|}{k} \leq \frac{1}{2}\left(a_k^2 + \frac{1}{k^2}\right)$$

и условие примера, получаем сходимость рассматриваемого ряда по признаку сравнения. □

Пример 3.1 позволяет решить в некотором смысле обратную задачу.

Пример 3.3. Пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{k}}$$

сходится, $a_k > 0$ и $a_{k+1} \leq a_k$ для всех k. Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

также сходится.

Доказательство. Из условия примера вытекает, что члены ряда $\frac{a_k}{\sqrt{k}}$ образуют монотонно убывающую к нулю последовательность положительных чисел. В силу примера 3.1

$$\frac{a_k}{\sqrt{k}} = \frac{\varepsilon_k}{k},$$

где последовательность ε_k бесконечно малая. Отсюда

$$a_k^2 = \frac{\varepsilon_k^2}{k} \leq \frac{\varepsilon_k}{k} = \frac{a_k}{\sqrt{k}}$$

при достаточно больших номерах k. Ряд с общим членом a_k^2 сходится по признаку сравнения. □

3.2. Произведение числовых рядов

Пусть есть два числовых ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \qquad \text{и} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Произведением этих рядов называется ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n, \qquad \text{где} \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}. \tag{3.9}$$

Данное определение оправдано тем, что если мы рассмотрим степенные ряды $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, формально (т.е. как выражения с конечными суммами, не заботясь о вопросах сходимости) перемножим их и упорядочим слагаемые полученного ряда по возрастанию степеней z, то у результирующего ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m\right)$$

коэффициент c_n будет устроен точно так, как в формуле (3.9).

Теорема 3.3. *Пусть ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *абсолютно сходится, ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ *сходится и* $A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, $B = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, *где* c_n *задается формулой (3.9), сходится к* AB.

Доказательство. Пусть $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n} a_k B_{n-k} = A_n B + \sum_{k=0}^{n} a_k (B_{n-k} - B).$$

Поскольку $A_n B \to AB$, $n \to \infty$, то для доказательства теоремы достаточно показать, что $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k (B_{n-k} - B) \to 0$ при $n \to \infty$.

Определим последовательность $\beta_n = B_n - B$, $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть $C > 0$ такое число, что $|\beta_n| \le C$ для всех n.

Заметим, что в новых обозначениях

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (B_{n-k} - B) = \sum_{k=0}^{n} a_k \beta_{n-k}.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть N — такое натуральное число, что для всякого $n > N$

$$\sum_{k=N+1}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

(существование N вытекает из абсолютной сходимости ряда с общим членом a_k и критерия Коши).

Пусть M — такое натуральное число, что $|\beta_s| < \varepsilon$ при всех $s > M$.

Выберем $n > N + M$ произвольно. Имеем

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k \beta_{n-k}\right| \le \sum_{k=0}^{N} |a_k| \cdot |\beta_{n-k}| + \sum_{k=N+1}^{n} |a_k| \cdot |\beta_{n-k}|.$$

Пусть $A_1 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$, тогда при $0 \le k \le N$ получаем, что $n - k > M$ и

$$\sum_{k=0}^{N} |a_k| \cdot |\beta_{n-k}| \le \sum_{k=0}^{N} \varepsilon |a_k| \le \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon |a_k| = \varepsilon \cdot A_1.$$

Для второй суммы получаем оценку

$$\sum_{k=N+1}^{n} |a_k| \cdot |\beta_{n-k}| \le \sum_{k=N+1}^{n} C|a_k| \le C\varepsilon.$$

Итак, при $n > N + M$ имеем оценку

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k \beta_{n-k}\right| \le (A_1 + C)\,\varepsilon.$$

□

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{1+k}}.$$

Этот ряд сходится по признаку Лейбница. Сходимость не абсолютная. Пусть $a_k = b_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{1+k}}$ для всех k. Рассмотрим произведение рядов с общими членами a_k и b_k:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n, \qquad \text{где} \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1 + n + k(n-k)}}.$$

$$|c_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{1 + n + k(n-k)}} \ge \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\frac{n}{2} + 1} = \frac{2n+2}{n+2} > 1.$$

Ряд с общим членом c_n расходится (так как c_n не стремится к 0).

4. Равномерная сходимость

4.1. Примеры плохого поведения функциональных последовательностей и рядов

Приведем примеры, которые показывают, что переставлять операцию предела с другими операциями в случае функциональной последовательности или ряда нельзя.

Пример 4.4. Пусть $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для любого $x \in [0,1]$, где $f(1) = 1$, $f(x) = 0$, $x \in [0,1)$. Имеем $\lim\limits_{x\to 1-0} \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, но $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to 1-0} x^n = 1$.

Пример 4.5. Пусть $a_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x)$, $x \in [0,1]$. При $x \in (0,1]$ имеем сумму геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = 1 + x^2.$$

Однако при $x = 0$ получаем $a_n(0) = 0$ и сумма ряда соответственно тоже 0. Итак, сумма ряда непрерывных (и бесконечно дифференцируемых) слагаемых разрывна в нуле.

Пример 4.6. Пусть $f_n(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$, $x \in [0,1]$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0$. Однако $f_n'(x) = -\sqrt{n}\sin nx$, и при $x \neq 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) \neq f'(x) = 0$ (почему?). Таким образом, $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)' \neq \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Пример 4.7. Пусть $f_n(x) = n^2 x(1-x^2)^n$, $x \in [0,1]$. Легко видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ для всех $x \in [0,1]$. Поскольку

$$\int_0^1 x(1-x^2)^n\,dx = \frac{1}{2n+2},$$

то

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{n^2}{2n+2} \to +\infty, \quad n \to \infty.$$

Однако

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\,dx = 0.$$

Если в качестве $f_n(x)$ взять $nx(1-x^2)^n$, то

$$\int_0^1 nx(1-x^2)^n\,dx = \frac{n}{2n+2} \to \frac{1}{2}, \quad n \to \infty,$$

но, как и выше,

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\,dx = 0.$$

Таким образом,

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\,dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

4.2. Связь равномерной и поточечной сходимости.

Хорошо известно, что из равномерной сходимости функциональной последовательности (или ряда) на некотором множестве вытекает поточечная сходимость на том же множестве. Обратное не верно. Действительно, например, последовательность из примера 4.4 сходится поточечно, но не равномерно на отрезке $[0,1]$ (почему?).

Мы приведем несколько примеров, когда из поточечной сходимости функциональной последовательности все-таки вытекает ее равномерная сходимость.

Теорема 4.4. *Пусть множество $E \subset \mathbb{R}$ компактно, а $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность функций, непрерывных на E. Пусть $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ для всех $x \in E$ и $f(x)$ — непрерывная на E функция. Пусть $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ для всех натуральных n и для всех $x \in E$. Тогда последовательность $f_n(x)$ равномерно на множестве E сходится к $f(x)$.*

Доказательство. Положим $g_n(x) = f_n(x) - f(x) \geq 0$ для всех n и $x \in E$. Функции $g_n(x)$ непрерывны на E, $g_n(x) \geq g_{n+1}(x)$ и $g_n(x) \to 0$ на E.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из поточечной сходимости g_n к нулю для всякого $x \in E$ найдется номер $n(x)$ такой, что $0 \leq g_{n(x)}(x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Из непрерывности g_n и монотонности вытекает, что найдется открытое множество $U(x)$, $x \in U(x)$, такое, что

$$0 \leq g_n(t) < \varepsilon, \qquad \forall n > n(x), \quad \forall t \in U(x).$$

Поскольку множество E компактно, то найдется конечное подмножество его точек $\{x_k\}_{k=1}^{N}$ со свойством

$$E \subset U(x_1) \cup U(x_2) \cup \dots \cup U(x_N)$$

(почему?). Полагая $M = \max\{n(x_1), \dots, n(x_N)\}$, получаем, что

$$0 \leq g_n(t) < \varepsilon, \qquad \forall n > M, \quad \forall t \in E.$$

Это и означает равномерную сходимость f_n к f на E. $\square$

Заметим, что непрерывность $f(x)$ существенна, это показывает пример 4.4. Компактность E также существенна. Действительно, пусть $E=(0,1)$, $f_n(x)=x^n$. Тогда $f_n(x)\to 0$ для всех x, все условия теоремы 4.4 (кроме компактности E) выполнены. Однако f_n не сходится равномерно к 0 (почему?).

Упражнение 2. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций, монотонных на отрезке $[a,b]$. Пусть f_n поточечно на отрезке $[a,b]$ сходится к непрерывной функции f. Докажите, что последовательность f_n равномерно на отрезке $[a,b]$ сходится к f.

Заметим также, что равномерная сходимость ряда никак не связана с его абсолютной сходимостью.

Пример 4.8. Пусть $E=(0,1)$. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, где

$$a_n(x)=\begin{cases} 0, & x\in\left(0,\frac{1}{n+1}\right),\\ \sin^2\frac{\pi}{x}, & x\in\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right],\\ 0, & x\in\left(\frac{1}{n+1},1\right).\end{cases}$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится абсолютно на E к функции $\sin^2\frac{\pi}{x}$. Однако равномерной сходимости нет (почему?).

Упражнение 3. Привести пример функционального ряда, который на множестве E сходится равномерно, но ни в какой точке множества E не сходится абсолютно.

4.3. Многочлены Бернштейна

Лемма 4.3.

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=1.$$

Доказательство. Бином Ньютона.

Лемма 4.4. *Для всякого* $x\in\mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nx)^2 x^k(1-x)^{n-k}\le\frac{n}{4}.$$

Доказательство. Рассмотрим тождество

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k=(1+z)^n. \tag{4.10}$$

Продифференцируем (4.10) по z и умножим на z:

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k z^k=nz(1+z)^{n-1}. \tag{4.11}$$

Продифференцируем (4.11) по z и умножим на z:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2C_n^k z^k=nz(1+nz)(1+z)^{n-2}. \tag{4.12}$$

Положим в (4.10), (4.11) и (4.12) $z=\frac{x}{1-x}$ и умножим полученные равенства на $(1-x)^n$:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=1, \tag{4.13}$$

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^k(1-x)^{n-k}=nx, \tag{4.14}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=nx(1-x+nx). \tag{4.15}$$

Умножим (4.13) на n^2x^2, (4.14) — на $-2nx$, (4.15) — на 1 и сложим их, получим

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=nx(1-x)\le\frac{n}{4},$$

так как $x(1-x)\le\frac14$.

Определение 4.1. Пусть функция f задана на отрезке $[0,1]$. Многочлен

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

называтся многочленом Бернштейна функции f.

Теорема 4.5. *(С.Н. Бернштейн). Если функция f непрерывна на отрезке $[0,1]$, то последовательность многочленов $B_n(x)$ равномерно на отрезке $[0,1]$ сходится к $f(x)$.*

Доказательство. Определим $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$. Пусть задано число $\varepsilon>0$. В силу равномерной непрерывности f на отрезке $[0,1]$ (теорема Кантора) подберем $\delta>0$ так, чтобы $|f(x)-f(t)|<\varepsilon$ для всех $x,t\in[0,1]$ таких, что $|x-t|<\delta$.

Зафиксируем произвольный $x \in [0,1]$. Поскольку в силу леммы 4.3

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f(x) x^k (1-x)^{n-k},$$

то

$$|B_n(x) - f(x)| \le \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k}.$$

Разобьем числа $k \in \overline{0,n}$ на множества I и J так, что $k \in I$, если $|\frac{k}{n} - x| < \delta$, а $k \in J$ в противном случае, т.е. при $|\frac{k}{n} - x| \ge \delta$.

Если $k \in I$, то $|f(\frac{k}{n}) - f(x)| < \varepsilon$ и по лемме 4.3

$$\sum_{k \in I} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le \varepsilon \sum_{k \in I} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le \varepsilon.$$

Если $k \in J$, то $\frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2} \ge 1$, откуда в силу леммы 4.4

$$\begin{aligned} &\sum_{k \in J} \left| f(x) - f\left(\tfrac{k}{n}\right) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le \\ &\le \tfrac{2M}{n^2\delta^2} \sum_{k \in J} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le \\ &\le \tfrac{2M}{n^2\delta^2} \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le \tfrac{M}{2n\delta^2}. \end{aligned}$$

Итак, найдется натуральное N, что для любого $n > N$ выполнено неравенство $M/(2n\delta^2) < \varepsilon$, откуда получаем оценку $|B_n(x) - f(x)| < \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2} < 2\varepsilon$ для любого $x \in [0,1]$, что и требовалось доказать.

Отметим, что многочлены Бернштейна обладают многими замечательными свойствами. Так, если непрерывная функция f возрастает на $[0,1]$, то и $B_n(x)$ возрастает. Если непрерывная функция f выпукла, то и $B_n(x)$ — выпуклая функция. Любознательные студенты могут попробовать доказать эти свойства в качестве упражнений.

Упражнение 4. Пусть функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывная. Докажите, что существует последовательность многочленов $p_n(x)$, равномерно на отрезке $[a,b]$ сходящаяся к функции f.

4.4. Пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции (пример Вейерштрасса)

Теорема 4.6. *Существует непрерывная функция $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, которая не дифференцируема ни в одной точке $x > 0$.*

Доказательство. Пусть $\varphi(x) = |x|$ при $x \in [-1,1]$. Доопределим φ для всякого $x \in \mathbb{R}$ по 2-периодичности: $\varphi(x+2) = \varphi(x)$. Полученная функция φ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Положим

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x).$$

Поскольку $\varphi(x) \in [0,1]$ для всех x, то ряд в определении функции f равномерно сходится по признаку Вейерштрасса и имеет непрерывные слагаемые. По [1, теорема 2 §3 главы 10] сумма этого ряда — $f(x)$ — непрерывна по x.

Покажем, что для любой точки $x > 0$ функция f не дифференцируема.

Зафиксируем вещественное число $x > 0$ и натуральное число m. Существует натуральное число k такое, что

$$k \le 4^m x \le k+1.$$

Положим $a_m = 4^{-m}k$, $b_m = 4^{-m}(k+1)$. Рассмотрим числа $4^n b_m$ и $4^n a_m$.

Если $n > m$, то оба указанные числа — четные целые и разность $4^n b_m - 4^n a_m$ есть четное целое число. Если $n = m$, то оба числа $4^n b_m$, $4^n a_m$ целые и $4^n b_m - 4^n a_m = 1$. Если $n < m$, то между числами $4^n b_m$ и $4^n a_m$ не лежит ни одно целое число. Отсюда

$$|\varphi(4^n b_m) - \varphi(4^n a_m)| = \begin{cases} 0, & n > m, \\ 4^{n-m}, & n \le m. \end{cases}$$

Из определения f и из предыдущей формулы получаем

$$f(b_m) - f(a_m) = \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\varphi(4^n b_m) - \varphi(4^n a_m)\right),$$

следовательно

$$|f(b_m) - f(a_m)| \ge \left(\frac{3}{4}\right)^m - \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n 4^{n-m} = \left(\frac{3}{4}\right)^m - \frac{3^m - 1}{2 \cdot 4^m} > \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^m.$$

Отсюда вытекает оценка

$$\left| \frac{f(b_m) - f(a_m)}{b_m - a_m} \right| \ge \frac{3^m}{2}.$$

В силу теоремы [3, теорема 4.1] дифференцируемость функции f в точке x означала бы, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f(b_m) - f(a_m)}{b_m - a_m} = f'(x) \in \mathbb{R}.$$

Неограниченность последовательности $\left|\frac{f(b_m)-f(a_m)}{b_m-a_m}\right|$ означает, что функция f не дифференцируема в точке x. □

Упражнение 5. Докажите, что функция f из теоремы 4.6 не дифференцируема в любой точке $x \in \mathbb{R}$.

5. Степенные ряды

Напомним, что в граничных точках круга сходимости степенной ряд может как сходиться, так и расходиться. Равномерная же сходимость гарантированно имеет место на любом компакте, который содержится в круге сходимости. Тем не менее сходимость степенного ряда в граничной точке круга сходимости позволяет сделать более сильное утверждение о множество его равномерной сходимости.

Теорема 5.7. *Пусть степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $c_n \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$, *сходится в точке* z_0 *и точка* z_0 *является граничной точкой круга сходимости этого ряда. Тогда сходимость ряда на отрезке* $[0, z_0]$ *равномерная.*

Доказательство. Пусть $z_t = tz_0$, $t \in [0,1]$. В силу линейной связи между z_t и t достаточно доказать, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n t^n \tag{5.16}$$

равномерно по $t \in [0,1]$ сходится.

Применим признак Абеля [1, теорема 7 §2 главы 10]. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ не зависит от t и, значит, равномерно сходится по $t \in [0,1]$. Последовательность $\{t^n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно не возрастает и равномерно ограничена, так как $t^n \in [0,1]$ для всех n и $t \in [0,1]$. По признаку Абеля равномерной сходимости ряд (5.16) равномерно сходится по $t \in [0,1]$. □

Теорема 5.8. *Пусть* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = B$ *(где* $A, B \in \mathbb{R}$*) и* $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. *Если ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ *сходится к* C, *то* $C = AB$.

Доказательство. Рассмотрим степенные ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n$. Множество $t \in [0,1]$ содержится в замыкании круга сходимости каждого из этих рядов. Из определения произведения рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m\right), \tag{5.17}$$

и в силу абсолютной сходимости на множествах вида $[0, t_0]$, $t_0 \in (0,1)$ (почему эти типы сходимости имеют место на $[0, t_0]$?), по теореме 3.3 равенство (5.17) имеет место для всех $t \in [0,1)$.

В силу теоремы 5.7 все ряды в формуле (5.17) сходятся равномерно по $t \in [0,1]$, а значит, их суммы непрерывны по $t \in [0,1]$. Переходя к пределу $t \to 1-0$ и пользуясь непрерывностью сумм рядов, получаем $C = AB$. □

Заметим, что теперь у нас в распоряжении есть три теоремы о сходимости произведения числовых рядов. Первая теорема — теорема 3 о произведении абсолютно сходящихся рядов из [1, с. 256]. При этом порядок слагаемых вида $a_i b_j$ можно менять как угодно. Вторая теорема 3.3 гарантирует сходимость произведения двух рядов, один из которых сходится абсолютно, а второй — условно. Теорема 5.8 при условии сходимости двух рядов и ряда, являющегося их произведением, гарантирует равенство суммы ряда-произведения произведению сумм двух исходных рядов.

Литература

1. *Иванов Г. Е.* Курс лекций по математическому анализу. Интергралы. Ряды. Ч. 1. М.: МФТИ, 2010. 317 с.

2. *Яковлев Г. Н.* Курс лекций по математическому анализу. Ч. 2. М.: Физматлит, 2004. 332 с.

3. *Балашов М. В.* Добавление к лекциям по математическому анализу. 1 семестр. М.: МФТИ, 2015. 34 с.