К изложению О.В. Бесовым темы “РЯДЫ ФУРЬЕ”

Ниже приводится упрощённое (в случае чётного m) доказательство теоремы 24.4.2 из учебника О.В. Бесова “Лекции по математическому анализу”. Оно проводится без рассмотрения сопряжённого ряда Фурье.

Теорема 1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, и пусть 2π-периодическая функция f имеет непрерывные производные до порядка $m-1$ включительно и кусочно-непрерывную производную $f^{(m)}$.*

Тогда ряд Фурье функции f сходится к f равномерно на $\mathbb{R}$ и

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - S_n(x; f)| \le C\frac{\ln n}{n^m} \text{ при } n \ge 2. \tag{9}$$

Доказательство в случае нечётного m то же, что в книге.

Приведём доказательство в случае $m = 2$ методом, применённым при доказательстве теоремы 24.1.2. Будем придерживаться обозначений из доказательства этой теоремы. Представим разность $S_n(x; f) - f(x)$ в виде (24.2.4). Положив $M_2 := \max_{\mathbb{R}} |f''|$, с помощью дважды применённой теоремы Лагранжа о конечных приращениях, имеем

$$|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)| = |(f(x+t)-f(x))-(f(x)-f(x-t))| = |(f'(\xi+t)-f'(\xi))t| \le M_2t^2.$$

Тогда

$$\frac{d^2}{dt^2}g_x(t) = \frac{f''(x+t)+f''(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}} - 2(f'(x+t)-f'(x-t))\frac{\cos\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}} - (f(x+t)+f(x-t)-2f(x))\frac{\sin^2\frac{t}{2}+2\cos^2\frac{t}{2}}{8\sin^3\frac{t}{2}},$$

$$|g_x(t)| \le \frac{\pi}{2}M_2t, \qquad \left|\frac{d}{dt}g_x(t)\right| \le CM_2, \qquad \left|\frac{d^2}{dt^2}g_x(t)\right| \le CM_2\frac{1}{t}.$$

Отсюда $|I_n| \le CM_2\delta^2$.

Для оценки J_n дважды применим интегрирование по частям. Получаем

$$\pi J_n = -g_x(t)\frac{\cos(n+\frac{1}{2})t}{n+\frac{1}{2}}\Bigg|_\delta^\pi - \frac{d}{dt}g_x(t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{(n+\frac{1}{2})^2}\Bigg|_\delta^\pi + \int_\delta^\pi \frac{d^2}{dt^2}g_x(t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2}t)}{(n+\frac{1}{2})^2}dt,$$

откуда

$$|J_n| \le CM_2\delta\frac{1}{n} + CM_2\frac{1}{n^2} + CM_2\ln\frac{1}{\delta}\frac{1}{n^2}.$$

Полагая $\delta = \frac{1}{n}$, приходим к утверждению теоремы для случая $m = 2$, т.е. к оценке

$$|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx| \le C\frac{\ln n}{n^2} \quad \forall n \ge 2.$$

Из этой оценки и из (8) получаем утверждение теоремы для всех чётных m так же, как ранее получили утверждение теоремы для всех нечётных m.

Замечание 1. *Этот текст размещён на сайте*

$$https://mipt.ru/education/chair/mathematics/study/uchebniki/besov_RF.pdf$$