Теорема о дифференцировании интеграла Римана, зависящего от параметра

Теорема 1. *Пусть функции $\varphi, \psi : \ [c,d] \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемы, $\varphi \le \psi$ на $[c,d]$.*

Пусть функции $f, \frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на $\overline{G} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \varphi(y) \le x \le \psi(y), \ c \le y \le d\}$,

$$J(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dxdy.$$

Тогда при $y \in [c,d]$

$$\frac{d}{dy}J(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dxdy + f(\psi(y),y)\psi'(y) - f(\varphi(y),y). \tag{1}$$

Доказательство.Шаг 1. Предположим дополнительно, что функции $f, \frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на $[a,b] \times [c,d], \ a < \varphi \le \psi < b$. Тогда утверждение теоремы устанавливается с помощью обычного рассуждения с использованием суперпозиции функций.

Шаг 2. Установим формулу (1) в предположениях теоремы.

Случай 1: $y_0 \in [c,d], \ \varphi(y_0) < \psi(y_0)$. Уменьшая при необходимости отрезок $[c,d]$, можно считать, что $\varphi(y) < \phi(y)$ на $[c,d]$. Рассмотрим последовательность функций

$$J_n(y) = \int\limits_{\varphi(y)+1/n}^{\psi(y)-1/n} f(x,y)dxdy.$$

Применим формулу (1) к J_n и перейдём в ней к пределу при $n \to \infty$, опираясь на теорему о дифференцировании функциональной последовательности.

Случай 2: $y_0 \in [c,d], \ \varphi(y_0) = \psi(y_0)$. В этом случае (1) легко устанавливается непосредственным вычислением производной J с использованием теоремы о среднем для интеграла.