МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Кафедра высшей математики

М. В. Балашов

ДОБАВЛЕНИЕ К ЛЕКЦИЯМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ 4 СЕМЕСТР

Учебно-методическое пособие
по курсу Математический анализ

МОСКВА
МФТИ
2016

УДК 517

Рецензент
Доктор физико-математических наук, профессор *В. Ж. Сакбаев*

Балашов, М. В.

Добавление к лекциям по математическому анализу. 4 семестр: учебно-методическое пособие по курсу *Математический анализ* / М. В. Балашов. – М. : МФТИ, 2016. – 28 с.

Предназначено для студентов 2 курса МФТИ, а также для преподавателей.

Учебное издание

Балашов Максим Викторович

Добавление к лекциям по математическому анализу. 4 семестр

Учебно-методическое пособие по курсу Математический анализ

Редактор *О. П. Котова.* Корректор *Л. В. Себова.*
Компьютерная верстка *М. В. Балашов.*
Подписано в печать: 17.10.2016. Формат $60 \times 84^1/_{16}$. Усл. печ. л. 1,7.
Уч.-изд. л. 1,6. Тираж 250 экз. Заказ є 422.

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Московский
физико-технический институт (государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru

Содержание

Введение

В методическое пособие вошли некоторые темы, прочитанные автором студентам 2 курса ФУПМ в 4-м семестре (2015 — 2016 учебный год), а также некоторые темы, которые автор планирует читать в дальнейшем в рамках курса «Гармонический анализ» в МФТИ.

Автор благодарен доценту кафедры высшей математики В. В. Редкозубову за пример функции из первого раздела и полезные обсуждения.

М. В. Балашов

Сентябрь, 2016 Долгопрудный

1. Расходимость ряда Фурье в точке для непрерывной функции

В любых достаточных условиях сходимости ряда Фурье функции в точке к значению функции (по стандартной тригонометрической системе) фигурирует некоторое условие, более сильное, чем непрерывность (например, сходимость некоторого интеграла в признаке Дини). Возникает вопрос: верно ли, что для непрерывной функции ряд Фурье может в некоторой точке не сходиться к значению этой функции в данной точке или же вообще расходиться? Оказывается, что ответ на этот вопрос утвердительный. Мы приведем очень простой пример, который принадлежит С.А. Теляковскому и сообщен мне В.В. Редкозубовым.

Рассмотрим при $x \in [0, \pi]$ функцию

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx,$$

где $b_k \geq 0$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. Более точно числа b_k определим позже. По признаку Вейерштрасса функция f непрерывна на отрезке $[0, \pi]$. Продолжим f четно на отрезок $[-\pi, 0]$. Построенная таким образом функция $f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, непрерывная, четная и может быть 2π-периодично продолжена на $\mathbb{R}$.

В силу формулы для n-й частичной суммы ряда Фурье через ядро Дирихле

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \dots + \cos nt = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}},$$

а именно:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \left(f(x+t) + f(x-t)\right) D_n(t)\, dt,$$

получаем, что для построенной нами функции f

$$S_n(f, 0) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(t) D_n(t)\, dt.$$

Рассмотрим подынтегральную функцию

$$f(t)D_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin ktD_n(t).$$

Положим

$$\beta_{k,n} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} b_k \sin ktD_n(t)\, dt.$$

Из равенства

$$\begin{aligned}
&2\sin ktD_n(t) = \\
&= \sin kt + \sum_{m=1}^{n} 2\sin kt \cos mt = \\
&= \sin kt + \sum_{m=1}^{n} (\sin(k+m)t + \sin(k-m)t)
\end{aligned}$$

в случае $k > n$ вытекает, что $2\sin ktD_n(t)$ есть сумма синусов вида $\sin mt$ при натуральных m.

Пусть $k \le n$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\sin kt + \sum_{m=1}^{n} (\sin(k+m)t + \sin(k-m)t) = \\
&= \sin kt + \sum_{m=k+1}^{n+k} \sin mt + \\
&+ \sum_{m=1}^{k} \sin(k-m)t + \sum_{m=k+1}^{n} \sin(m-k)t = \\
&= \sum_{m=k}^{n+k} \sin mt + \sum_{m=1}^{k-1} \sin mt - \sum_{m=1}^{n-k} \sin mt = \\
&= \sum_{m=n-k+1}^{n+k} \sin mt,
\end{aligned} \tag{1}$$

а значит, $2\sin ktD_n(t)$ также есть сумма синусов вида $\sin mt$ при натуральных m.

Заметим, что для всех $m \ge 1$

$$\int\limits_0^{\pi} \sin mt\, dt = -\left.\frac{\cos mt}{m}\right|_0^{\pi} = \frac{1-(-1)^m}{m} \ge 0,$$

поэтому

$$S_n(f,0) \ge \beta_{n,n} = \frac{2}{\pi} b_n \int\limits_0^{\pi} \sin ntD_n(t)\, dt,$$

а в силу (1)

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^\pi 2\sin ntD_n(t)\,dt = \int\limits_0^\pi \left(\sum_{m=1}^{2n}\sin mt\right)\,dt =\\&= \sum_{m=1}^{2n}\tfrac{1-(-1)^m}{m} = \sum_{m=1}^{n}\tfrac{2}{2m-1} = \sum_{m=1}^{n}\tfrac{1}{m-\frac{1}{2}} \geq\\&\geq \int\limits_1^n \tfrac{1}{x}\,dx = \ln n.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$S_n(f,0) \geq \frac{b_n}{\pi}\ln n.$$

Уточним теперь выбор последовательности b_n: при $n = 2^{m^3}$ определим $b_n = \frac{1}{m^2}$, а при $n \neq 2^{m^3}$ положим $b_n = 0$.

Тогда при $n = 2^{m^3}$ имеем

$$S_n(f,0) \geq \frac{1}{\pi}\frac{1}{m^2}\ln 2^{m^3} = \frac{\ln 2}{\pi}m.$$

Таким образом,

$$S_{2^{m^3}}(f,0) \to +\infty, \quad m \to \infty.$$

Ряд Фурье непрерывной 2π-периодической функции f не сходится в точке $x = 0$.

2. Тригонометрические ряды и ряды Фурье

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx. \tag{2}$$

Пусть последовательность b_k монотонно убывает к нулю (и тем самым $b_k \geq 0$ при всех k), а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}$ сходится. Покажем, что ряд (2) есть ряд Фурье своей суммы $S(x)$.

Прежде всего заметим, что на любом отрезке $[\delta,\pi]$, $\delta \in (0,\pi)$, ряд (2) сходится равномерно по признаку Дирихле, а значит, $S(x)$ непрерывна на отрезке $[\delta,\pi]$ при любом сколь угодно малом $\delta > 0$.

Пусть A_m, B_m — коэффициенты Фурье функции $S(x)$, которая нечетна.

$$B_m = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(\sum_{k=1}^\infty b_k \sin kx\right)\sin mx\,dx =$$
$$= \lim_{\delta\to+0} \frac{2}{\pi}\int\limits_\delta^\pi \sum_{k=1}^\infty b_k \sin kx \sin mx\,dx =$$
$$= \lim_{\delta\to+0} \frac{1}{\pi}\left(\sum_{k=1,\ k\neq m}^\infty b_k\ \frac{\sin(k-m)x}{k-m}\Big|_\delta^\pi + b_m(\pi-\delta) + \sum_{k=1}^\infty b_k\ \frac{\sin(k+m)x}{k+m}\Big|_\delta^\pi\right) =$$
$$= \lim_{\delta\to+0} \frac{1}{\pi}\left(-\sum_{k=1,\ k\neq m}^\infty b_k \frac{\sin(k-m)\delta}{k-m} + b_m(\pi-\delta) + \sum_{k=1}^\infty b_k \frac{\sin(k+m)\delta}{k+m}\right). \tag{3}$$

Поскольку в силу условия примера 1 ряды $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{b_k}{k\pm m}$ сходятся абсолютно (из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{b_k}{k}$), то ряд в правой части формулы (3) сходится равномерно, и предел при $\delta\to+0$ есть значение этого ряда в точке $\delta=0$, т.е. $B_m = b_m$.

Для нахождения A_m проведите аналогичные вычисления самостоятельно, воспользовавшись равенством

$$A_m = \lim_{\delta\to+0}\left(\left(\int\limits_{-\pi}^{-\delta} + \int\limits_\delta^\pi\right)\left(\sum_{k=1}^\infty b_k \sin kx \cos mx\,dx\right)\right),$$

и покажите, что выражение в правой части имеет предел 0.

Отметим, что, например, ряд

$$\sum_{k=2}^\infty \frac{\sin kx}{\ln^2 k} \tag{4}$$

является рядом Фурье своей суммы.

Пример 2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=2}^\infty \frac{\sin kx}{\ln k}. \tag{5}$$

Покажем, что для любой кусочно-непрерывной функции ряд (5) не является ее рядом Фурье.

От противного, допустим, f — кусочно-непрерывная функция на отрезке $[-\pi,\pi]$, ряд Фурье которой есть ряд (5). Тогда по теореме об интегрировании ряда Фурье [1, теорема 2, § 4, с. 117] имеем

$$\int\limits_0^x f(t)\,dt = \frac{A_0}{2} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k}\cos kx,$$

причем ряд в правой части сходится при всех x. Здесь $A_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi(x)\,dx$, где $\Phi(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$. При $x = 0$ получаем

$$0 = \frac{A_0}{2} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k},$$

что противоречит расходимости ряда $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k}$ (по интегральному признаку). Противоречие показывает, что допущение существования такой кусочно-непрерывной функции неверно.

Можно доказать, что тригонометрический ряд (5) не является рядом Фурье никакой абсолютно интегрируемой функции.

Упражнение 1. Докажите, что ряд (5) не является рядом Фурье своей суммы.

Утверждение упражнения 1 особенно интересно сопоставить с примером (4) тригонометрического ряда, который является рядом Фурье своей суммы.

Пример 3. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{\frac{2}{3}}}.$$

Этот ряд сходится при всех x, обозначим его сумму $S(x)$. Докажем, что $S(x) \in RL_2[-\pi,\pi]$.

Как и в предыдущих примерах, легко видеть, что функция $S(x)$ непрерывна на любом отрезке вида $[\delta,\pi]$, $\delta \in (0,\pi)$. Нам остается показать, что несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{\pi} S^2(x)\,dx$$

сходится.

Имеем
$$\int\limits_0^\pi S^2(x)\,dx = \lim_{\delta\to+0}\int\limits_\delta^\pi S^2(x)\,dx.$$

В силу равномерной сходимости нашего тригонометрического ряда на отрезке $[\delta,\pi]$ при $\delta>0$, интеграл
$$\int\limits_\delta^\pi S^2(x)\,dx$$
есть предел по $N\to\infty$ интегралов
$$\int\limits_\delta^\pi \left(\sum_{k=1}^N \frac{\sin kx}{k^{\frac{2}{3}}}\right)^2\,dx$$
(откуда это вытекает?).

Имеем
$$\left(\sum_{k=1}^N \frac{\sin kx}{k^{\frac{2}{3}}}\right)^2 = \sum_{k=1}^N \frac{\sin^2 kx}{k^{\frac{4}{3}}}+$$
$$+\sum_{k=1}^N\sum_{k<m}^N \frac{2\sin kx\sin mx}{k^{\frac{2}{3}}m^{\frac{2}{3}}} =$$
$$=\sum_{k=1}^N \frac{1-\cos 2kx}{2k^{\frac{4}{3}}}+$$
$$+\sum_{k=1}^N\sum_{k<m}^N \frac{\cos(m-k)x-\cos(m+k)x}{k^{\frac{2}{3}}m^{\frac{2}{3}}}.$$

Слагаемое
$$\sum_{k=1}^N \frac{1-\cos 2kx}{2k^{\frac{4}{3}}}$$
есть частичная сумма абсолютно и равномерно сходящегося (по x) ряда и при интегрировании по отрезку $[\delta,\pi]$ дает абсолютно и равномерно сходящийся ряд (по параметру δ, при всех значениях параметра).

Рассмотрим интеграл от суммы
$$\sum_{k=1}^N\sum_{k<m}^N \frac{\cos(m-k)x}{k^{\frac{2}{3}}m^{\frac{2}{3}}},$$

т.е.
$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{k<m}^{N}\frac{\sin(m-k)\delta}{(m-k)k^{\frac{2}{3}}m^{\frac{2}{3}}}.$$
Ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k<m}^{\infty}\frac{1}{(m-k)k^{\frac{2}{3}}m^{\frac{2}{3}}}$$
сходится абсолютно, т.к. его сходимость в силу интегрального признака одновременна со сходимостью
$$\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{k+1}^{\infty}\frac{1}{(x-k)k^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}}\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{2}{3}}}\int\limits_{k+1}^{\infty}\frac{dx}{(x-k)x^{\frac{2}{3}}}$$
(почему?). Разобьем интеграл на части
$$\int\limits_{k+1}^{\infty}\frac{dx}{(x-k)x^{\frac{2}{3}}}=$$
$$=\int\limits_{k+1}^{2k}\frac{dx}{(x-k)x^{\frac{2}{3}}}+\int\limits_{2k}^{\infty}\frac{dx}{(x-k)x^{\frac{2}{3}}}.$$
Имеем оценки
$$\int\limits_{k+1}^{2k}\frac{dx}{(x-k)x^{\frac{2}{3}}}=$$
$$=\int\limits_{1}^{k}\frac{dt}{t(t+k)^{\frac{2}{3}}}\le\frac{\ln k}{k^{\frac{2}{3}}},$$
$$\int\limits_{2k}^{\infty}\frac{dx}{(x-k)x^{\frac{2}{3}}}=$$
$$=\int\limits_{k}^{\infty}\frac{dt}{t(t+k)^{\frac{2}{3}}}\le\int\limits_{k}^{\infty}\frac{dt}{t^{\frac{5}{3}}}=\frac{3}{2}\frac{1}{k^{\frac{2}{3}}}.$$
Итак,
$$\int\limits_{k+1}^{\infty}\frac{dx}{(x-k)x^{\frac{2}{3}}}\le\frac{\ln k}{k^{\frac{2}{3}}}+\frac{3}{2k^{\frac{2}{3}}}.$$

Из абсолютной сходимости следует равномерная сходимость по δ (на $\mathbb{R}$) ряда
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k<m}^{\infty}\frac{\sin(m-k)\delta}{(m-k)k^{\frac{2}{3}}m^{\frac{2}{3}}}.$$

Аналогично доказывается, что ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k<m}^{\infty}\frac{\sin(m+k)\delta}{(m+k)k^{\frac{2}{3}}m^{\frac{2}{3}}}$$
также сходится равномерно по $\delta \in \mathbb{R}$.

Таким образом, интеграл
$$\int\limits_{\delta}^{\pi} S^2(x)\,dx$$
есть непрерывная по δ функция (как сумма равномерно сходящихся рядов) и, значит,
$$\int\limits_{0}^{\pi} S^2(x)\,dx = \lim_{\delta\to+0}\int\limits_{\delta}^{\pi} S^2(x)\,dx \in \mathbb{R}.$$

3. Равномерная сходимость ряда Фурье

Напомним, что подмножество $S \subset X$ нормированного пространства X называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует *конечное* число элементов $\{s_i\}_{i=1}^{N} \subset S$ таких, что для всякого $s \in S$ найдется номер $i = i(s) \in \{1,\dots,N\}$ такой, что $\|s - s_i\| < \varepsilon$.

Теорема 1. *Пусть $E \subset [-\pi,\pi]$, $f \in C^*[-\pi,\pi]$ и выполнено условие*
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta \in (0,\pi)\ \forall x \in E \qquad \int\limits_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{2\sin\frac{t}{2}}\right| dt < \varepsilon. \qquad (6)$$
Тогда $S_n(f,x) \rightrightarrows f(x)$, $n\to\infty$, $x \in E$.

Напомним, что $C^*[-\pi,\pi]$ есть пространство непрерывных вещественных функций, у которых значения в точках π и $-\pi$ совпадают.

Доказательство. Продолжим функцию f 2π-периодично на $\mathbb{R}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и соответствующее $\delta > 0$ из условия (6). Покажем, что множество функций

$$\varphi_x(t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{2\sin\frac{t}{2}}, \quad x \in E,\ t \in [\delta, \pi],$$

вполне ограничено. В силу равномерной непрерывности f на отрезке $[-\pi, \pi]$ существует $\sigma > 0$, что для всех $x, y \in [-\pi, \pi] : |x - y| < \sigma$ выполнено неравенство

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \cdot \sin\frac{\delta}{2}. \tag{7}$$

Выберем σ-сеть $\{x_i\}_{i=1}^N$ множества E, получим, что для любого $x \in E$ найдется число x_i такое, что $|x - x_i| < \sigma$, поэтому

$$|\varphi_x(t) - \varphi_{x_i}(t)| = \frac{|f(x+t) - f(x) - f(x_i + t) + f(x_i)|}{2\sin\frac{t}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{|f(x+t) - f(x_i + t))| + |f(x) - f(x_i)|}{2\sin\frac{t}{2}} < \varepsilon$$

независимо от t. Итак, $\{\varphi_{x_i}(t)\}_{i=1}^N$ — ε-сеть множества $\{\varphi_x(t)\}_{x\in E}$ в норме пространства $C[-\pi, \pi]$.

Из сходимости $S_n(f, x_i) \to f(x_i)$ при всех i (по признаку Дини) вытекает, что найдется $M \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|S_n(f, x_i) - f(x_i)| < \varepsilon \tag{8}$$

при $n > M$ и при всех i.

Фиксируем $x \in E$, а также число x_i такое, что $|x - x_i| < \sigma$ и $|\varphi_x(t) - \varphi_{x_i}(t)| < \varepsilon$ для всех $t \in [\delta, \pi]$.

$$|S_n(f, x) - f(x)| \leq$$
$$\leq |S_n(f, x) - S_n(f, x_i)| + |S_n(f, x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)|.$$

Из неравенства $|x - x_i| < \sigma$ имеем $|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon$, а

$$\begin{aligned}
&|S_n(f, x) - S_n(f, x_i)| \leq \\
&\leq \int\limits_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{2\sin\frac{t}{2}} \right| dt + \int\limits_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x_i+t) - f(x_i)}{2\sin\frac{t}{2}} \right| dt + \\
&+ \left| \frac{1}{\pi} \int\limits_{\delta}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x) - f(x_i+t) + f(x_i)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t\, dt \right|.
\end{aligned} \tag{9}$$

Первые два члена в правой части последней формулы не превосходят ε в силу условия (6), а третий член с учетом оценки (7) не более $\frac{1}{2}\varepsilon$. Таким образом, с учетом оценки (8) из формулы (9) вытекает оценка

$$|S_n(f,x) - f(x)| < 3\varepsilon, \quad \forall x \in E,\ \forall n > M.$$

$\square$

Упражнение 2. Докажите, что теорема верна при замене $C^*[-\pi,\pi]$ на $C[-\pi,\pi]$.

На самом деле теорема остается верной, если вместо непрерывности функции f на отрезке $[-\pi,\pi]$ требовать ее абсолютную интегрируемость (остальные условия теоремы должны быть выполнены). Однако доказательство этого факта выходит за рамки нашего пособия. Подробности можно найти в [2].

4. Равенство параллелограмма

Если линейное вещественное пространство E евклидово, то норму в E принято определять по правилу $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, $\forall x \in E$. Проверьте, что из аксиом скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ вытекают аксиомы введенной нормы. В частности, для любых элементов x, y пространства E выполняется *равенство параллелограмма:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{10}$$

Равенство означает, что если мы построим параллелограмм с вершинами в точках 0, x, y, $x+y$, то сумма квадратов длин его сторон $(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2)$ равна сумме квадратов длин его диагоналей, то есть $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$.

Замечательным является тот факт, что равенство (10) для любых элементов линейного вещественного нормированного пространства E означает, что пространство E евклидово, а скалярное произведение можно ввести, например, по формуле

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2), \quad \forall x,y \in E. \tag{11}$$

Теорема 2 *(фон Нейман). Пусть E — линейное вещественное нормированное пространство, причем для любых элементов x и y из E выполняется формула (10). Тогда пространство E евклидово, причем скалярное произведение может быть определено по формуле (11).*

Доказательство. Определим скалярное произведение по формуле (11). Непрерывность по каждому аргументу, симметричность и свойство $\sqrt{(x,x)} = \|x\|$ (для всякого $x \in E$) очевидно. Также очевидно, что $(x,x) \geq 0$ при всех $x \in E$ и равенство нулю возможно лишь при $x = 0$. Осталось показать линейность по первому аргументу.

Пусть x, y и z — произвольные элементы E. Из равенства параллелограмма

$$2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y+z\|^2 + \|x-y+z\|^2,$$

вытекают равенства

$$\begin{aligned}&\|x+y+z\|^2 = 2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x-y+z\|^2 = \\ &= 2\|y+z\|^2 + 2\|x\|^2 - \|y-x+z\|^2\end{aligned}$$

(второе равенство получается из первого заменой $x \leftrightarrow y$). Беря полусумму двух последних равенств, получаем

$$\begin{aligned}&\|x+y+z\|^2 = \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x+z\|^2 + \|y+z\|^2 - \\ &-\tfrac{1}{2}\|x-y+z\|^2 - \tfrac{1}{2}\|y-x+z\|^2.\end{aligned} \tag{12}$$

Заменяя в последней формуле $z \leftrightarrow -z$, находим

$$\begin{aligned}&\|x+y-z\|^2 = \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x-z\|^2 + \|y-z\|^2 - \\ &-\tfrac{1}{2}\|x-y-z\|^2 - \tfrac{1}{2}\|y-x-z\|^2.\end{aligned} \tag{13}$$

Заметим, что, учитывая формулы (12) и (13),

$$\begin{aligned}&(x+y,z) = \tfrac{1}{4}\left(\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2\right) = \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2\right) + \tfrac{1}{4}\left(\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\right) = \\ &= (x,z) + (y,z).\end{aligned}$$

Итак, доказана формула

$$(x+y,z) = (x,z) + (y,z) \tag{14}$$

для всех $x, y, z \in E$.

Покажем, что для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ и для всяких $x, y \in E$ выполнено равенство $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$. Это завершит доказательство.

Если $\lambda = -1$ или $\lambda = 0$, то равенство $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ вытекает из формулы (11).

Пусть $\lambda = \frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathbb{N}$. Положим $x_1 = \frac{1}{q}x$. Тогда получаем, что

$$q(\lambda x, y) = q(px_1, y),$$

с учетом формулы (14)

$$q(px_1, y) = p(qx_1, y) = p(x, y).$$

Итак,

$$q(\lambda x, y) = p(x, y), \qquad \text{т.е.} \quad (\lambda x, y) = \lambda(x, y), \ \left(\lambda = \frac{p}{q}\right).$$

Для фиксированных $x, y \in E$ непрерывная функция $t \to \frac{1}{t}(tx, y)$ равна (x, y) при $t \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, а значит (в силу непрерывности), и для всех $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. $\square$

Упражнение 3*. Пусть пространство E — линейное комплексное нормированное пространство (поле скаляров $\mathbb{C}$). Пусть для любых элементов $x, y \in E$ выполняется равенство (10). Тогда скалярное произведение в E можно определить по формуле

$$(x, y) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2 \tag{15}$$

(i — мнимая единица). Докажите, что формула (15) действительно задает скалярное произведение, в частности выполнено $(ix, y) = i(x, y)$ и $(x, y) = \overline{(y, x)}$ для всех $x, y \in E$. Здесь $\overline{a + ib} = a - ib$ для всех $a, b \in \mathbb{R}$.

5. Теорема Фейера в RL_1

Хорошо известно, что для любой 2π-периодической непрерывной функции f (т.е. для $f \in C^*[-\pi, \pi]$) последовательность сумм Фейера

$$\sigma_{n+1}(f, x) = \frac{S_0(f, x) + S_1(f, x) + \dots + S_n(f, x)}{n + 1} \tag{16}$$

(здесь $S_n(f, x)$ — n-я частичная сумма ряда Фурье функции f в точке x) равномерно сходится к $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Оказывается, что такое же утверждение можно доказать для абсолютно интегрируемых функций.

Теорема 3. *Пусть $f \in RL_1[-\pi,\pi]$, и обозначим для краткости $\sigma_n(f) = \sigma_{n+1}(f,x)$, см. (16). Тогда*

$$\|f - \sigma_n(f)\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sigma_{n+1}(f,x)|\, dx \to 0, \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Поскольку функция f абсолютно интегрируема, то коэффициенты Фурье, а значит и суммы Фейера, определены корректно.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Продолжим f 2π-периодично на $\mathbb{R}$. В силу плотности $C^*[-\pi,\pi]$ в $RL_1[-\pi,\pi]$ относительно $\|\cdot\|_1$-нормы [1, лемма 2, § 9, с. 135], найдется такая функция $g \in C^*[-\pi,\pi]$, что

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon. \tag{17}$$

Из формулы (16)

$$\sigma_{n+1}(f,x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_{n+1}(t)\, dt,$$

где функция

$$F_{n+1}(t) = \frac{1 - \cos(n+1)t}{4\pi(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}$$

есть ядро Фейера. Тогда

$$\|\sigma_n(f) - f\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) F_{n+1}(t)\, dt \right| dx.$$

Из неравенства треугольника получаем, что

$$\|\sigma_n(f) - f\|_1 \le \|f - g\|_1 + \|g - \sigma_n(g)\|_1 + \|\sigma_n(f) - \sigma_n(g)\|_1. \tag{18}$$

Из неравенство $\|g - \sigma_n(g)\|_1 \le 2\pi \|g - \sigma_n(g)\|_C$ и теоремы Фейера для непрерывных функций вытекает $\|g - \sigma_n(g)\|_1 \le 2\pi\|g - \sigma_n(g)\|_C \to 0$ при $n \to \infty$ (проверьте!). Значит, найдется номер N_ε такой, что при всех $n > N_\varepsilon$ выполнено неравенство

$$\|g - \sigma_n(g)\|_1 < \varepsilon. \tag{19}$$

Оценим третье слагаемое в правой части формулы (18):

$$\begin{aligned}
&\|\sigma_n(f) - \sigma_n(g)\|_1 = \\
&= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - g(x+t)) F_{n+1}(t)\, dt \right| dx \le \\
&\le \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - g(x+t)|\, dx \left| \int\limits_{-\pi}^{\pi} F_{n+1}(t)\, dt \right| = \\
&= \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - g(x+t)|\, dx.
\end{aligned}$$

В силу 2π-периодичности функций f и g интеграл в правой части предыдущей оценки не зависит от t и равен

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\, dx = \|f - g\|_1 < \varepsilon$$

с учетом условия (17). Вспоминая (19), получаем, что

$$\|\sigma_n(f) - f\|_1 < 3\varepsilon$$

при всех $n > N_\varepsilon$. □

В качестве приложения доказанной теоремы решим задачу. Пусть функции $f, g \in RL_1[-\pi, \pi]$ имеют одинаковые коэффициенты Фурье $\{a_k, b_k\}$. Тогда эти функции неразличимы как элементы пространства $RL_1[-\pi, \pi]$, т.е. $\|f - g\|_1 = 0$.

Действительно, из равенства коэффициентов Фурье вытекает, что $\sigma_n(f) = \sigma_n(g) = \sigma_n$, поэтому

$$\|f - g\|_1 \le \|f - \sigma_n\|_1 + \|g - \sigma_n\|_1 \to 0$$

при $n \to \infty$. Значит, $\|f - g\|_1 = 0$.

Упражнение 4. Пусть $f \in RL_2[-\pi, \pi]$. Верно ли, что последовательность сумм Фейера $\sigma_n(f)$ сходится к f в смысле нормы RL_2?

6. Теорема Мюнца

В начале 20 века Г. Мюнц получил замечательный результат о том, каким необходимым и достаточным условиям обязана удовлетворять система степеней в $C[0, 1]$, чтобы быть в этом пространстве полной. Мы воспроизведем его в этом разделе.

Для начала определим через $P(e_1, \ldots, e_k)$ параллелепипед, натянутый на векторы $e_1, \ldots, e_k$. Пусть также $[e_1, \ldots, e_k]$ есть линейная оболочка векторов $e_1, \ldots, e_k$.

Лемма 1. *Пусть даны линейно независимые векторы $e_1, \ldots, e_k$ в евклидовом пространстве. Тогда k-мерный объем параллелепипеда $P(e_1, \ldots, e_k)$ (мера Жордана множества $P(e_1, \ldots, e_k)$ как множества из $\mathbb{R}^k$) есть*

$$\mu_k P(e_1, \ldots, e_k) = \sqrt{\det ||(e_i, e_l)||}.$$

Здесь через $||(e_i, e_l)||$ обозначена матрица, у которой (i,l)-й элемент есть скалярное произведение (e_i, e_l), $i, l \in \overline{1,k}$.

Доказательство. В линейной оболочке $[e_1, \ldots, e_k]$, которая изоморфна $\mathbb{R}^k$, с помощью процесса ортогонализации рассмотрим новый ортонормированный базис $f_1, \ldots, f_k$; при этом имеет место равенство $[e_1, \ldots, e_k] = [f_1, \ldots, f_k]$. Тогда $e_i = \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_{ij} f_j$ для всех $i \in \overline{1,k}$. Отсюда по формуле замены переменных

$$\mu_k P(e_1, \ldots, e_k) = \det A,$$

где $A = ||\alpha_{ij}||$, $i, j \in \overline{1,k}$. Поскольку

$$(e_i, e_l) = \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} f_j, \sum_{j=1}^{k} \alpha_{lj} f_j \right) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} \alpha_{lj} = (AA^T)_{il},$$

то $AA^T = ||(e_i, e_l)||$, и $\det(AA^T) = (\det A)^2 = \det ||(e_i, e_l)||$, что и требовалось доказать.

Определитель квадратной матрицы A будем обозначать через $\det A$ или через $|A|$.

Лемма 2. *Пусть в евклидовом пространстве заданы линейно независимые векторы e, $e_1, \ldots, e_k$. Пусть*

$$\varrho = \inf\{\|e - x\| \mid x \in [e_1, \ldots, e_k]\}.$$

Тогда

$$\varrho^2 = \begin{vmatrix} (e,e) & (e,e_1) & \ldots & (e,e_k) \\ (e_1,e) & (e_1,e_1) & \ldots & (e_1,e_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_k,e) & (e_k,e_1) & \ldots & (e_k,e_k) \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} (e_1,e_1) & \ldots & (e_1,e_k) \\ (e_1,e_1) & \ldots & (e_1,e_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_k,e_1) & \ldots & (e_k,e_k) \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Из элементарных свойств меры Жордана следует, что $\mu_{k+1} P(e, e_1, \ldots, e_k) = \varrho \cdot \mu_k P(e_1, \ldots, e_k)$. С учетом леммы 1 получаем требуемое равенство.

Лемма 3. *Пусть*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1+1} & \frac{1}{a_1+b_2+1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_k+1} \\ \frac{1}{a_2+b_1+1} & \frac{1}{a_2+b_2+1} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_k+b_1+1} & \frac{1}{a_k+b_2+1} & \cdots & \frac{1}{a_k+b_k+1} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\det A = \frac{\prod\limits_{1 \le i < j \le k} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod\limits_{1 \le i,j \le k} (a_i + b_j + 1)}.$$

Доказательство. Вычтем k-ю строку матрицы A из 1-й, ..., $(k-1)$-й строк. В результате получим матрицу

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{a_k - a_1}{(a_1+b_1+1)(a_k+b_1+1)} & \frac{a_k - a_1}{(a_1+b_2+1)(a_k+b_2+1)} & \cdots & \frac{a_k - a_1}{(a_1+b_k+1)(a_k+b_k+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_k - a_{k-1}}{(a_{k-1}+b_1+1)(a_k+b_1+1)} & \frac{a_k - a_{k-1}}{(a_{k-1}+b_2+1)(a_k+b_2+1)} & \cdots & \frac{a_k - a_{k-1}}{(a_{k-1}+b_k+1)(a_k+b_k+1)} \\ \frac{1}{a_k+b_1+1} & \frac{1}{a_k+b_2+1} & \cdots & \frac{1}{a_k+b_k+1} \end{pmatrix}$$

такую, что $\det A_1 = \det A$. Легко видеть, что

$$\det A_1 = \frac{\prod\limits_{1 \le i \le k-1} (a_k - a_i)}{\prod\limits_{1 \le j \le k} (a_k + b_j + 1)} \det A_2,$$

где

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{(a_1+b_1+1)} & \frac{1}{(a_1+b_2+1)} & \cdots & \frac{1}{(a_1+b_k+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(a_{k-1}+b_1+1)} & \frac{1}{(a_{k-1}+b_2+1)} & \cdots & \frac{1}{(a_{k-1}+b_k+1)} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычтем у матрицы A_2 k-й столбец из 1-го, 2-го, ..., $(k-1)$-го столбцов.

Получим матрицу

$$A_3 = \begin{pmatrix} \frac{b_k-b_1}{(a_1+b_1+1)(a_1+b_k+1)} & \frac{b_k-b_2}{(a_1+b_2+1)(a_1+b_k+1)} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{b_k-b_1}{(a_{k-1}+b_1+1)(a_{k-1}+b_k+1)} & \frac{b_k-b_2}{(a_{k-1}+b_2+1)(a_{k-1}+b_k+1)} & \cdots & \frac{1}{a_{k-1}+b_k+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

с $\det A_3 = \det A_2$. С учетом определения всех матриц A_i, $1 \le i \le 3$, получаем

$$\det A = \frac{\prod\limits_{1\le i\le k-1}(a_k-a_i)(b_k-b_i)}{\prod\limits_{1\le j\le k}(a_k+b_j+1)(a_j+b_k+1)} \times$$

$$\times \det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1+1} & \frac{1}{a_1+b_2+1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{k-1}+1} \\ \frac{1}{a_2+b_1+1} & \frac{1}{a_2+b_2+1} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{k-1}+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{k-1}+b_1+1} & \frac{1}{a_{k-1}+b_2+1} & \cdots & \frac{1}{a_{k-1}+b_{k-1}+1} \end{pmatrix}.$$

Повторяя изложенное выше рассуждение еще $(k-1)$ раз, получаем утверждение леммы.

Лемма 4. *Пусть дана возрастающая последовательность натуральных чисел* $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$. *Пусть натуральное число* $n \ne p_k$ *для всех натуральных* k. *Тогда два условия эквивалентны:*
1) $\varrho(x^n, [x^{p_1}, \dots, x^{p_k}]) \to 0$ *при* $k \to \infty$ *в смысле метрики* $RL_2[0,1]$*;*
2) $\sum\limits_{k\ge 1} \frac{1}{p_k} = +\infty$.

Доказательство. Без ограничения общности $n < p_1$. Из лемм 2 и 3 и из определения скалярного произведения в пространстве $RL_2[0,1]$ через интеграл вида $(x^m, x^n) = \int\limits_0^1 x^{m+n}\,dx = \frac{1}{m+n+1}$ получаем, что

$$\varrho^2(x^n, [x^{p_1}, \dots, x^{p_k}]) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{k}(p_j-n)^2}{\prod\limits_{j=1}^{k}(n+p_j+1)^2},$$

т.е.

$$\varrho(x^n,[x^{p_1},\ldots,x^{p_k}])=\frac{\prod\limits_{j=1}^{k}(p_j-n)}{\prod\limits_{j=1}^{k}(n+p_j+1)}=\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{2n+1}{p_j+n+1}\right).$$

Как хорошо известно, стремление к нулю последовательности

$$\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{2n+1}{p_j+n+1}\right)$$

при $k\to\infty$ равносильно выполнению предельного соотношения

$$\sum_{j=1}^{k}\ln\left(1-\frac{2n+1}{p_j+n+1}\right)\to-\infty,\qquad k\to\infty$$

(почему?). Последнее в силу признака сравнения равносильно тому, что

$$-\sum_{j=1}^{k}\frac{2n+1}{p_j+n+1}\to-\infty,$$

или же $\sum\limits_{k\geq1}\frac{1}{p_k}=+\infty$, что и требовалось доказать.

Теорема 4 *(Мюнц). Пусть $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Система степенных функций $\{x^{p_k}\}_{k=1}^{\infty}$ полна в $RL_2[0,1]$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{k\geq1}\frac{1}{p_k}=+\infty$.*

Доказательство. Из теоремы 2 [2, Т. 2, гл. 14, § 7.3] легко следует, что система $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ полна в $RL_2[0,1]$. Утверждение теоремы следует из леммы 4, согласно которой любую степень x^n можно приблизить с любой точностью в метрике $RL_2[0,1]$ линейной комбинацией элементов системы степенных функций $\{x^{p_k}\}$ в том и только в том случае, когда $\sum\limits_{k\geq1}\frac{1}{p_k}=+\infty$.

Теорема 5 *(Мюнц). Пусть $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, $p_0=0$. Система степенных функций $\{x^{p_k}\}_{k=0}^{\infty}$ полна в $C[0,1]$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{k\geq1}\frac{1}{p_k}=+\infty$.*

Отметим, что наличие степени $p_0=0$ означает, что в системе степеней $\{x^{p_k}\}_{k=0}^{\infty}$ есть константа (ибо $x^0=1$).

Доказательство. Зафиксируем $f \in C[0,1]$. Пусть $P(x)$ — многочлен, приближающий f с точностью $\varepsilon > 0$ в $C[0,1]$.

Тогда по теореме 5 существует многочлен

$$Q_0(x) = \sum_{l=1}^{k} a_l x^{p_l - 1}$$

такой, что

$$\|P' - Q_0\|_{RL_2} < \varepsilon \quad \left(\text{так как } \sum_{k \geq 2} \frac{1}{p_k - 1} = +\infty\right).$$

Пусть $Q(x) = P(0) + \int\limits_0^x Q_0(t)\,dt$. Тогда

$$\begin{aligned} |P(x) - Q(x)| &= \left|\int\limits_0^x P'(t)\,dt - \int\limits_0^x Q_0(t)\,dt\right| \leq \\ &\leq \int\limits_0^x |P'(t) - Q_0(t)|\,dt \leq \sqrt{\int\limits_0^x |P'(t) - Q_0(t)|^2\,dt}\sqrt{\int\limits_0^x dt} \leq \\ &\leq \|P' - Q_0\|_{RL_2} < \varepsilon, \quad \forall x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Но многочлен $Q(x)$ имеет вид

$$Q(x) = P(0)x^0 + \sum_{l=1}^{k} \frac{a_l}{p_l} x^{p_l}$$

и $\|f - Q\|_C \leq \|f - P\|_C + \|P - Q\|_C < 2\varepsilon$.

Ясно, что условие наличия константы в системе степеней (иначе, наличие $p_0 = 0$) необходимо. Если предположить, что $\sum\limits_{k \geq 1} \frac{1}{p_k} < +\infty$, то из леммы 6 получаем, что существует натуральное n такое, что

$$\varrho(x^n, [x^{p_1}, \ldots, x^{p_k}]) \not\to 0, \quad k \to \infty,$$

в RL_2. Выделяя подпоследовательность из последовательности $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ (которую снова обозначим через $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$), можно без ограничения общности считать, что найдется $\varepsilon_0 > 0$, для которого

$$\varrho(x^n, [x^{p_1}, \ldots, x^{p_k}]) \geq \varepsilon_0, \quad \forall\, k.$$

Пусть $P_k(x) \in [x^{p_1}, \ldots, x^{p_k}]$ — тот многочлен, для которого выполнено равенство

$$\varrho(x^n, [x^{p_1}, \ldots, x^{p_k}]) = \|x^n - P_k(x)\|_{RL_2}$$

(почему такой многочлен $P_k(x)$ существует?).

Поскольку для любого многочлена $P(x) \in [x^{p_1}, \dots, x^{p_k}]$

$$\varepsilon_0^2 \leq \|x^n - P_k(x)\|^2_{RL_2} \leq \|x^n - P(x)\|^2_{RL_2} \leq \|x^n - P(x)\|^2_C,$$

то при условии $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{1}{p_k} < +\infty$ система $\{1, x^{p_k}\}_{k=1}^{\infty}$ не обладает свойством полноты в $C[0,1]$.

7. Равенство Парсеваля в S и теорема Котельникова

В данном разделе мы рассмотрим некоторые свойства преобразования Фурье функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

$$F[f](y) \equiv \hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (v.p.) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iyx}\, dx,$$

а также обратного преобразования Фурье:

$$F^{-1}[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (v.p.) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iyx}\, dx.$$

Интегралы понимаются в смысле главного значения $((v.p.))$, для функции $f \in RL_1(\mathbb{R})$ интегралы понимаются в несобственном смысле.

Обозначим, как обычно, через S пространство Шварца, т.е. пространство бесконечно дифференцируемых функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, обладающих свойством

$$\lim_{|x|\to +\infty} x^m f^{(k)}(x) = 0$$

для любых $m, k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Лемма 5. *Пусть $f, g \in S$; $x \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) \hat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+y) \hat{g}(y)\, dy. \qquad (20)$$

Доказательство. Интегралы имеют смысл, т.к. $f, g \in S$, а значит, $\hat{f}, \hat{g} \in S$ (почему?). Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi = \\ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-i\xi y}\,dy\right]e^{ix\xi}\,d\xi.$$

В силу [2, § 4.5, с. 106], интегралы можно поменять местами, поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)e^{-i\xi(y-x)}\,d\xi\right]f(y)\,dy = \\ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{g}(y-x)f(y)\,dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{g}(y)f(x+y)\,dy.$$

□

Если в формуле (20) положить $x = 0$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\hat{f}(\xi)\,d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{g}(y)f(y)\,dy.$$

Если в последней формуле заменить $g \in S$ на $\hat{g} \in S$, то (с учетом равенства $\hat{\hat{g}} = g$)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)\,d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(y)\,dy,$$

а значит, и

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)\overline{g(y)}\,dy. \tag{21}$$

В формуле (21) $\overline{w}$ означает комплексное сопряжение числа $w \in \mathbb{C}$.

Взяв в формуле (21) $g = f \in S$, получаем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^2 \, dy. \tag{22}$$

Формула (22) называется равенством Парсеваля. Равенство Парсеваля (22) означает, что скалярное произведение элементов $f, g \in S$, задаваемое по формуле

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\overline{g(\xi)} \, d\xi,$$

задает изометрию между S и $F[S]$.

Упражнение 5. Пусть $f, g \in S$. Тогда сверткой функций f и g называется функция

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y) \, dy.$$

Докажите, что

$$\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\hat{f} \cdot \hat{g}, \quad \widehat{(f \cdot g)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f} * \hat{g}.$$

Рассмотрим теперь функцию $f \in S$ со специальным свойством: носитель ее преобразования Фурье $\operatorname{supp}\hat{f}$ содержится в отрезке $[-\Omega, \Omega]$, где $\Omega > 0$. Таким образом, $\hat{f}(x) = 0$ при $|x| \geq \Omega$. Будем говорить, что у такой функции f *финитный спектр.*

Функции с финитным спектром — важный с физической точки зрения объект. Действительно, во многих практических задачах нас интересует ограниченный набор спектральных характеристик. Например, человек слышит звук в примерном диапазоне акустических колебаний от 20 Гц до 20 кГц; видит в диапазоне электромагнитных волн примерно от 390 ТГц до 790 ТГц и т.д.

Поэтому для приложений бывает важно описать сигнал через его (финитный) спектральный «портрет».

Теорема 6 *(Котельников). Пусть функция $f \in S$ имеет финитный спектр:* $\operatorname{supp}\hat{f} \subset [-\Omega, \Omega]$. *Тогда*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} f\left(\frac{\pi}{\Omega}k\right) \frac{\sin\left(\Omega\left(t - \frac{\pi}{\Omega}k\right)\right)}{\Omega\left(t - \frac{\pi}{\Omega}k\right)}. \tag{23}$$

Формула (23) показывает, что для восстановления функции с финитным спектром достаточно знать лишь дискретный набор значений $\{f\,(kT)\}_{k=-\infty}^{k=+\infty}$, где $T=\frac{\pi}{\Omega}$. Формулу (23) часто называют формулой Котельникова.

Доказательство. Разложим функцию $\hat{f}(\omega)$ на отрезке $[-\Omega,\Omega]$ в ряд Фурье по системе экспонент

$$\{e^{i\frac{\pi\omega}{\Omega}k}\}_{k=-\infty}^{+\infty}.$$

Имеем

$$\hat{f}(\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k(\hat{f})e^{i\frac{\pi\omega}{\Omega}k}$$

(почему в предыдущей формуле равенство?), где с учетом формулы для обратного преобразования Фурье

$$c_k(\hat{f})=\frac{1}{2\Omega}\int\limits_{-\Omega}^{\Omega}\hat{f}(\omega)e^{-i\frac{\pi\omega}{\Omega}k}\,d\omega=\frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega}f\left(-\frac{\pi}{\Omega}k\right).$$

Подставляя коэффициенты $c_k(\hat{f})$ в ряд Фурье для $\hat{f}$, получаем (опять с учетом формулы для обратного преобразования Фурье и финитности спектра f)

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\Omega}^{\Omega}\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2\Omega}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{\pi}{\Omega}k\right)e^{i\omega t-i\frac{\pi\omega}{\Omega}k}\right)d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\Omega}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{\pi}{\Omega}k\right)\int\limits_{-\Omega}^{\Omega}e^{i\omega t-i\frac{\pi\omega}{\Omega}k}\,d\omega$$

(почему законно переставить сумму и интеграл?).

С учетом равенства

$$\int\limits_{-\Omega}^{\Omega}e^{i\omega t-i\frac{\pi\omega}{\Omega}k}\,d\omega=\frac{2}{t-\frac{\pi}{\Omega}k}\sin\left(t-\frac{\pi}{\Omega}k\right)$$

мы приходим к формуле (23). □

Упражнение 6. Условие $f \in S$ является избыточным в теореме 6. Попытайтесь заменить его на более слабое условие и докажите соответственно более сильный вариант теоремы 6.

Список литературы

1. *Иванов Г. Е.* Курс лекций по математическому анализу. Ч. 2. М.: МФТИ, 2011. 187 с.

2. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. М.: Физматлит, 2004. 332 с.