Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский Физико-Технический Институт
(государственный университет)

А.В. Ершов

УНИТАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Добавление к лекциям

Долгопрудный
2016

Введение

Вещественными векторными пространствами с наиболее богатой геометрией являются евклидовы пространства. В них можно измерять длины векторов и углы между векторами. Все это возможно благодаря наличию билинейной симметричной положительно определенной формы — евклидовой структуры.

Если рассмотреть комплексное векторное пространство с билинейной симметричной формой на нем, то сразу выясняется, что понятие положительной определенности для нее теряет смысл — любое комплексное число может быть квадратом комплексного числа. Получить положительное действительное число из ненулевого комплексного z можно, взяв вместо квадрата z^2 произведение $z\overline{z}$ на комплексно сопряженное. Возникает мысль рассмотреть аналог билинейных форм, для которых квадратичной формой является сумма квадратов модулей координат (в некотором базисе). Простейшие такие формы в координатах имеют вид

$$x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \ldots + x_n\overline{y}_n.$$

Так мы приходим к понятию полуторалинейной формы.

Такие полуторалинейные формы приводят к комплексным аналогам евклидовых пространств со столь же богатой геометрией, называемым *унитарными* пространствами. Унитарное пространство — это пара, состоящая из (конечномерного, если не оговорено противное) векторного пространства над $\mathbb{C}$ и полуторалинейной эрмитово симметричной положительно определенной формы на нем, которая определяет соответствующее скалярное произведение. Практически все понятия, имеющие смысл для евклидова пространства, имеют его и для унитарного (длина вектора, угол между векторами, ортонормированный базис, ортогональное дополнение к подпространству, самосопряженные преобразования и т.д.). Причем для них верны аналоги теорем для евклидова пространства (неравенства Коши-Буняковского и треугольника, теоремы об ортогональном дополнении, ортогонализация Грама-Шмидта, свойства самосопряженных преобразований и т.п.).

Для удобства читателя мы приведем таблицу, связывающую аналогичные понятия в вещественном (евклидовом) и комплексном (унитарном) случаях.

в вещественном случае	**в комплексном случае**
билинейная форма	полуторалинейная форма
симметричная билинейная форма	эрмитово симметричная полуторалинейная форма
квадратичная форма	эрмитова квадратичная форма
евклидово пространство	унитарное (=эрмитово) пространство
сопряженное преобразование	эрмитово сопряженное преобразование
самосопряженное (=симметричное) преобразование	эрмитово (симметричное) преобразование
ортогональное преобразование	унитарное преобразование

Советы студентам

Значительная часть представленного в данном тексте материала выходит за рамки программы экзамена по Линейной алгебре на первом курсе (особенно это касается замечаний). С другой стороны, ознакомиться с ним все же полезно для лучшего понимания теории евклидовых пространств и операторов в них, так как значительная часть результатов и доказательств в этих двух случаях аналогична.

Требования к подготовке читателя

Предполагается, что читатель знаком с теорией билинейных форм над $\mathbb{R}$ и теорией евклидовых пространств. Наше изложение наиболее близко к [4].

Некоторые обозначения и термины

Векторы обозначаются жирными буквами $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}, \ldots$, координатные столбцы — стрелкой над буквой, обозначающей вектор, т.е. $\overrightarrow{v}$ — координатный столбец вектора $\mathbf{v}$ в некотором базисе; черта сверху $\overline{\lambda}$ или $\overline{A}$ обозначает операцию комплексного сопряжения, примененную к комплексному числу λ или к матрице A с комплексными элементами (в последнем случае все элементы матрицы комплексно сопрягаются). Линейные операторы (=линейные преобразования) мы обозначаем греческими буквами φ или ψ. Спектр оператора = множество его собственных значений. Композиция преобразований обозначается значком $\circ$. $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ обозначает пространство (алгебру) матриц порядка n над полем $\mathbb{K}$. Матрица, транспонированная к матрице A, обозначается A^T. $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ обозначают соответственно вещественную и мнимую части комплексного числа z. id_V обозначает тождественное преобразование векторного пространства V. Оно имеет единичную матрицу E в любом базисе. Символом $\mathcal{L}(V)$ обозначается алгебра линейных операторов на векторном пространстве V.

Все остальные обозначения либо стандартные, либо объясняются в тексте.

О замеченных опечатках и замечаниях по тексту просьба сообщать на e-mail `ershov.andrei@gmail.com`

1 Унитарные пространства

1.1 Полуторалинейные формы

Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{C}$.

Определение 1.1. Функция $f\colon V \to \mathbb{C}$ называется *полулинейной формой* (или полулинейной функцией) на V, если выполнены следующие два условия:

- $f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$;
- $f(\lambda\mathbf{v}) = \overline{\lambda} f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V,\ \lambda \in \mathbb{C}$, где черта в $\overline{\lambda}$ обозначает комплексное сопряжение.

Определение 1.2. Функция $\alpha\colon V \times V \to \mathbb{C}$ называется *полуторалинейной формой* на V, если она линейна по второму аргументу и полулинейна по первому.

Другими словами, полуторалинейная форма α удовлетворяет условиям:

- $\alpha(\lambda\mathbf{u}_1 + \mu\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = \overline{\lambda}\alpha(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + \overline{\mu}\alpha(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}$;

- $\alpha(\mathbf{u},\, \lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2) = \lambda\alpha(\mathbf{u},\, \mathbf{v}_1) + \mu\alpha(\mathbf{u},\, \mathbf{v}_2) \quad \forall \mathbf{u},\, \mathbf{v}_1,\, \mathbf{v}_2 \in V,\ \lambda,\, \mu \in \mathbb{C}$.

Замечание 1.3. В некоторых книгах полуторалинейными формами называют функции, которые наоборот, линейны по первому аргументу и полулинейны по второму.

При перестановке аргументов полуторалинейной формы ее полулинейный и линейный аргументы меняются местами. Поэтому "наивный" способ определить понятие симметричной билинейной формы не проходит. Заметим, что операция комплексного сопряжения также меняет местами линейный и полулинейный аргументы.

Определение 1.4. Полуторалинейная форма $\alpha\colon V \times V \to \mathbb{C}$ называется *эрмитово симметричной* (кратко, эрмитовой), если для любых векторов $\mathbf{u},\, \mathbf{v} \in V$ выполнено следующее тождество:

$$\alpha(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = \overline{\alpha(\mathbf{v},\, \mathbf{u})}. \tag{1}$$

Заметим, что из предыдущего определения мгновенно следует, что соответствующая *эрмитова квадратичная форма*

$$q = q_\alpha\colon V \to \mathbb{C}, \quad q_\alpha(\mathbf{v}) := \alpha(\mathbf{v},\, \mathbf{v})$$

принимает вещественные значения.

Заметим, что соотношения

$$\begin{cases} q(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = q(\mathbf{u}) + \alpha(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) + \alpha(\mathbf{v},\, \mathbf{u}) + q(\mathbf{v}) \\ q(\mathbf{u}+i\mathbf{v}) = q(\mathbf{u}) + i\alpha(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) - i\alpha(\mathbf{v},\, \mathbf{u}) + q(\mathbf{v}) \end{cases} \tag{2}$$

позволяют восстановить α по q. В частности, если $q \equiv 0$, то и $\alpha \equiv 0$.

Здесь можно было бы развить общую теорию эрмитовых форм, в частности, доказать для них аналог теоремы инерции. Мы, однако, делать этого не будем, и ограничимся случаем положительно определенных эрмитовых форм.

Определение 1.5. Эрмитова форма $\alpha\colon V \times V \to \mathbb{C}$ называется *положительно определенной*, если $q_\alpha(\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{v},\, \mathbf{v}) > 0\ \ \forall \mathbf{v} \in V,\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Рассмотрим пару примеров.

Пример 1.6. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — некоторый базис в V, $\mathbf{v} = \sum v_i\mathbf{e}_i$ — разложение произвольного вектора по нему. Тогда

$$\alpha(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{u}_i v_i, \quad q_\alpha(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} |v_i|^2$$

— положительно определенная эрмитова и соответствующая ей эрмитова квадратичная формы. Такой базис для α называется (естественно) *ортонормированным.* Для любой положительно определенной эрмитовой формы существует ортонормированный базис (см. ниже).

Пример 1.7. Приведем пример бесконечномерного унитарного пространства. Пусть

$$V := \{f\colon [0,\, 1] \to \mathbb{C} \mid f \ \text{ непрерывна}\}$$

— пространство непрерывных комплекснозначных функций на отрезке. Легко проверить, что это — векторное пространство над $\mathbb{C}$, правда, в нем нет конечного базиса. Такие пространства называются *бесконечномерными*. Определим функцию $\alpha\colon V \times V \to \mathbb{C}$ формулой

$$\alpha(f,\, g) := \int_0^1 \overline{f(t)} g(t)\, dt \quad \forall f,\, g \in V.$$

Тогда легко проверить, что α — положительно определенная эрмитова форма на V. В курсе мы не рассматриваем бесконечномерные пространства (за исключением отдельных примеров), но они играют больщую роль в продвинутых разделах математики (в функциональном анализе) и в приложениях в физике (в квантовой теории).

1.2 Базисы и матрицы

Пусть $\alpha\colon V \times V \to \mathbb{C}$ — некоторая полуторалинейная форма на V, а $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — некоторый базис в V. Тогда из определений легко следует, что

$$\alpha(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(\mathbf{e}_i,\, \mathbf{e}_j) \overline{u}_i v_j. \tag{3}$$

Если через $\overrightarrow{v}$ обозначить координатный столбец вектора $\mathbf{v} \in V$ в выбранном базисе, то равенство (3) можно переписать в виде

$$\alpha(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = \overline{\overrightarrow{u}}^T G \overrightarrow{v},$$

где $G = G_\alpha := (\alpha(\mathbf{e}_i,\, \mathbf{e}_j)) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ (матрица, у которой на (i, j)-м месте стоит число $\alpha(\mathbf{e}_i,\, \mathbf{e}_j) \in \mathbb{C}$).

Если $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ — еще один базис в V, причем $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ — матрица перехода к нему от первого базиса, то

$$G' = \overline{C}^T G C \tag{4}$$

— матрица полуторалинейной формы α в новом базисе.

Условие эрмитовой симметрии (1) переписывается при этом в виде

$$\overline{\overrightarrow{u}}^T G \overrightarrow{v} = \overline{\overline{\overrightarrow{v}}^T G \overrightarrow{u}}, \quad \text{т.е.} \quad \overline{\overrightarrow{u}}^T G \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}^T \overline{G}\, \overline{\overrightarrow{u}} = \overline{\overrightarrow{u}}^T \overline{G}^T \overrightarrow{v},$$

и, поскольку это вполнено для любых столбцов $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, то $G = \overline{G}^T$. Матрицы $G \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, удовлетворяющие последнему тождеству, называются *эрмитовыми*. Таким образом, *матрица эрмитовой формы в произвольном базисе эрмитова.*

Легко видеть, что если матрица G эрмитова, то $\det G \in \mathbb{R}$. Имеет место аналог критерия Сильвестра: эрмитова форма положительно определена $\Leftrightarrow$ все главные миноры ее матрицы положительны.

Например, общая эрмитова матрица порядка 2 имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & b+ci \\ b-ci & d \end{pmatrix}$$

($a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{R}$), ее определитель равен $ad-(b^2+c^2)$, она положительно определена тогда и только тогда когда $a > 0$ и $ad - (b^2 + c^2) > 0$. Очевидно, что вещественная часть эрмитовой матрицы симметрична, а мнимая — кососимметрична.

Замечание 1.8. [1] Вообще, эрмитовы матрицы порядка n образуют *вещественное* векторное пространство размерности n^2. Покажем это.

Для этого рассмотрим полулинейный оператор $\sigma\colon \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}),\quad \sigma(A) = \overline{A}^T$. Полулинейность σ означает, что $\sigma(A+B) = \sigma(A) + \sigma(B),\ \sigma(\lambda A) = \overline{\lambda}\sigma(A)\ \ \forall A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}),\ \lambda \in \mathbb{C}$. Кроме того, $\sigma^2 = \mathrm{id}_{\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})}$. Такие полулинейные операторы на комплексном векторном пространстве называются *полулинейными инволюциями*.

Положим

$$V^+ := \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid \sigma(A) = A\}, \quad V^- := \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid \sigma(A) = -A\}.$$

Заметим, что V^+ и V^- — $\mathbb{R}$-линейные векторные подпространства в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ такие, что $V^+ \cap V^- = 0$. Более того, для любой матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ имеет место представление $A = A^+ + A^-$, где $A^+ \in V^+,\ A^- \in V^-$. Точнее,

$$A^+ = \frac{1}{2}(A + \sigma(A)),\ \ A^- = \frac{1}{2}(A - \sigma(A)).$$

Таким образом, $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) = V^+ \oplus V^-$ — разложение в прямую сумму $\mathbb{R}$-линейных пространств.

Кроме того, $\iota\colon V^+ \to V^-,\quad \iota(A) := iA$ — изоморфизм векторных пространств, значит, вещественная размерность пространств V^+ и V^- равна комплексной размерности пространства $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, то есть n^2. Кроме того, $V^- = iV^+$. Значит,

$$\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) = V^+ \oplus iV^+. \tag{5}$$

Легко видеть, что V^+ состоит из эрмитовых матриц. Матрицы из V^- называются *косоэрмитовыми*.

Заметим, что помимо разложения (5) есть также разложение $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \oplus i\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. К нему можно прийти, рассматривая вместо σ другую полулинейную инволюцию $\tau\colon \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}),\quad \tau(A) = \overline{A}$. По довольно прозрачным причинам полулинейные инволюции на комплексном пространстве называют *вещественными структурами*. Соответствующее вещественное подпространство состоит из неподвижных относительно инволюции элементов (ср. характеризацию вещественных чисел в $\mathbb{C}$ как таких, которые остаются на месте при комплексном сопряжении). Таким образом, мы определили две вещественные структуры на $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$: стандартную,[2] для которой роль вещественного подпространства играет $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ и нестандартную, для которой вещественное подпространство образовано эрмитовыми матрицами V^+. Детали см. в [5].

Кстати, заметим, что $V^+ \cap \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ (соотв. $V^- \cap \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$) — подпространство симметрических (соотв. кососимметрических) матриц в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

1.3 Унитарные пространства

Определение 1.9. *Унитарным пространством* называется пара (V, α), состоящая из векторного пространства V над $\mathbb{C}$ и положительно определенной эрмитовой формы α на нем.

[1] Данное замечание выходит за рамки обязательной программы.

[2] подчеркнем, что в произвольном комплексном линейном пространстве нет выделенной вещественной структуры.

Пусть $U \subset V$ — произвольное подпространство унитарного пространства $(V,\, \alpha)$. Его *ортогональным дополнением* называется подпространство $U^\perp \subset V$, определяемое следующим образом:

$$U^\perp := \{\mathbf{v} \in V \mid \alpha(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = 0 \; \forall \mathbf{u} \in U\}.$$

Заметим, что, несмотря на то, что эрмитова форма α по определению полулинейна по первому аргументу и линейна по второму, определение ортогонального дополнения симметрично по аргументам.

Следующие теоремы яляются аналогами соответствующих теорем для евклидова пространства. Доказательства их также аналогичны.

Предложение 1.10. $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$.

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ — базис в U. Тогда $U^\perp$ задается системой k линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} \alpha(\mathbf{e}_1,\, \mathbf{v}) = 0 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha(\mathbf{e}_k,\, \mathbf{v}) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

(относительно координат неизвестного вектора $\mathbf{v}$). Уравнения (6) линейно независимы, так как из

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{\lambda}_i \alpha(\mathbf{e}_i,\, \mathbf{v}) = 0$$

$(\lambda_i \in \mathbb{C})$ $\forall \mathbf{v} \in V$ следует, что

$$\alpha\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{e}_i,\, \mathbf{v}\right) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

откуда, в силу положительной определенности формы α имеем $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$, а значит все $\lambda_i = 0$.

Значит, ранг системы (6) равен k, и если $n := \dim V$, то размерность пространства решений равна $n - k$, то есть $\dim U^\perp = n - k$. ∎

Теорема 1.11. *Если $U \subset V$ — произвольное подпространство унитарного пространства $(V,\, \alpha)$, то $V = U \oplus U^\perp$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{v} \in U \cap U^\perp$. Тогда $\alpha(\mathbf{v},\, \mathbf{v}) = q_\alpha(\mathbf{v}) = 0$. Так как по условию α положительно определена, то $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Значит, сумма подпространств U и $U^\perp$ в V прямая, $\dim(U + U^\perp) = \dim U + \dim U^\perp = k + n - k = n = \dim V$, и значит $V = U \oplus U^\perp$. ∎

Теорема 1.12. *В любом унитарном пространстве $(V,\, \alpha)$ есть ортонормированный базис.*

Доказательство. Заметим, что для любого подпространства $U \subset V$ пара $(U,\, \alpha|_U)$ — унитарное пространство, где $\alpha|_U$ — ограничение эрмитовой формы α на подпространство $U \subset V$.

Будем доказывать теорему индукцией по $n := \dim V$. Если $n = 1$, то теорема очевидна. Действительно, если $\mathbf{v} \in V$ — произвольный ненулевой вектор, то $q_\alpha(\mathbf{v}) =: a > 0$. Тогда $\{\mathbf{u}\}$ — ортонормированный базис, где $\mathbf{u} := \frac{1}{\sqrt{a}}\mathbf{v}$.

Пусть теорема верна для пространств размерности, не превосходящей $n-1$. Выберем произвольный вектор $\mathbf{u} \in V$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ и положим $U := \langle \mathbf{u} \rangle$. Тогда $V = U \oplus U^{\perp}$ и $\dim U^{\perp} = n-1$; по предположению индукции в $U^{\perp}$ есть ортонормированный базис. Объединяя его с ортонормированным базисом в U, получаем ортонормированный базис в V. ∎

Следствие 1.13. *Для любой положительно определенной эрмитовой матрицы $G \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ существует невырожденная матрица $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ такая, что*

$$\overline{C}^T G C = E.$$

Доказательство. В произвольном базисе n-мерного комплексного пространства V формула

$$\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{\vec{u}} G \vec{v}$$

задает положительно определенную эрмитову форму. Рассмотрим пару (V, α) как унитарное пространство. Согласно предыдущей теореме, в нем существует ортонормированный базис. Пусть C — матрица перехода от исходного базиса к ортонормированному. Теперь все следует из (4) и того, что в ортонормированном базисе матрица положительно определенной эрмитовой формы единичная. ∎

Заметим, что базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ унитарного пространства (V, α) ортонормирован тогда и только тогда, когда матрица формы α в этом базисе единичная. Из (4) следует, что матрица C перехода между двумя ортонормированными базисами в (V, α) удовлетворяет тождеству $\overline{C}^T C = E$. Такие матрицы называются *унитарными* (они аналогичны ортогональным матрицам в вещественном случае). Очевидно, что определитель унитарной матрицы — (вообще говоря) комплексное число, равное 1 по модулю. Сопоставление базису матрицы перехода к нему от фиксированного базиса устанавливает биекцию между ортонормированными базисами в n-мерном унитарном пространстве и унитарными матрицами порядка n.

1.4 Геометрия унитарных пространств

Начиная с этого раздела упростим обозначения: эрмитову форму α из определения унитарного пространства (V, α) (напомним, что она линейна по второму аргументу и полулинейна по первому) будем обозначать круглыми скобками и называть (эрмитовым) *скалярным произведением*, и вместо $q_\alpha(\mathbf{v}) (= \alpha(\mathbf{v}, \mathbf{v}))$ будем писать $|\mathbf{v}|^2$.

Как уже отмечалось во введении, в унитарных пространствах имеют место аналоги неравенств Коши-Буняковского и треугольника. Приведем их доказательства в унитарном случае.

Теорема 1.14. *(Неравенство Коши-Буняковского) Для любых векторов $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ унитарного пространства V имеет место неравенство*

$$|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})|^2 \leq |\boldsymbol{u}|^2 |\boldsymbol{v}|^2, \tag{7}$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ пропорциональны.

Доказательство. Если $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, то $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ линейно зависимы и (7) превращается в равенство. Далее будем считать что $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ имеет место неравенство

$$(\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v},\, \mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 + \overline{\lambda}(\mathbf{v},\, \mathbf{u}) + \lambda(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) + |\lambda|^2|\mathbf{v}|^2 \geq 0. \tag{8}$$

Если $(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = 0$, то (7) очевидно. В противном случае положим $\lambda = \frac{(\mathbf{v},\mathbf{u})}{|(\mathbf{u},\mathbf{v})|}t$, где $t \in \mathbb{R}$. Тогда (8) превратится в неравенство

$$|\mathbf{u}|^2 + 2|(\mathbf{u},\, \mathbf{v})|t + |\mathbf{v}|^2 t^2 \geq 0,$$

верное для любого $t \in \mathbb{R}$. Значит, дискриминант квадратного трехчлена неотрицателен, что равносильно (7).

Доказательство второй части теоремы, касающейся равносильности условий достижения равенства и линейной зависимости векторов, оставим читателю. ■

Замечание 1.15. Если векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ неколлинеарны, то они образуют базис в двумерном подпространстве $\langle \mathbf{u},\, \mathbf{v} \rangle \subset V$ и неравенство Коши-Буняковского (7) (которое в этом случае строгое) превращается в условие положительности определителя матрицы Грама

$$\begin{pmatrix} |\mathbf{u}|^2 & (\mathbf{u},\, \mathbf{v}) \\ \overline{(\mathbf{u},\, \mathbf{v})} & |\mathbf{v}|^2 \end{pmatrix}.$$

Согласно критерию Сильвестра, оно вместе с $|\mathbf{u}|^2 > 0$ равносильно положительной определенности ограничения эрмитова скалярного произведения на подпространство $\langle \mathbf{u},\, \mathbf{v} \rangle \subset V$.

Следствие 1.16. *Для любых двух непрерывных функций $f,\, g\colon [0,\, 1] \to \mathbb{C}$ имеет место неравенство*

$$\left| \int_0^1 \overline{f(t)} g(t)\, dt \right|^2 \leq \int_0^1 |f(t)|^2\, dt \int_0^1 |g(t)|^2\, dt,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда f и g пропорциональны.

Доказательство. Записать неравенство Коши-Буняковского (7) для примера 1.7. ■

Следствие 1.17. *(Неравенство треугольника) Для любых векторов $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ унитарного пространства V имеет место неравенство $|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}| \leq |\boldsymbol{u}| + |\boldsymbol{v}|$.*

Доказательство следует из цепочки неравенств:

$$(|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2 = |\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| + |\mathbf{v}|^2 \geq |\mathbf{u}|^2 + 2|(\mathbf{u},\, \mathbf{v})| + |\mathbf{v}|^2 \geq |\mathbf{u}|^2 + 2\mathrm{Re}\,(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) + |\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2. \quad ■$$

Замечание 1.18. Если $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ — ненулевые векторы унитарного пространства V, то из неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$0 \leq \frac{|(\mathbf{u},\, \mathbf{v})|}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \leq 1.$$

Таким образом, существует единственный угол φ, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ такой, что

$$\cos\varphi = \frac{|(\mathbf{u},\, \mathbf{v})|}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}.$$

Он называется *углом между векторами* $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. В математической модели квантовой механики $\cos^2\varphi$ имеет смысл вероятности.

2 Линейные преобразования унитарных пространств

Мы уже знаем, что в евклидовом пространстве V благодаря присутствию скалярного произведения каждому линейному оператору $\varphi\colon V \to V$ можно сопоставить его сопряженный $\varphi^*\colon V \to V$, и, соответственно, возникают понятия симметричного, или, что то же, самосопряженного ($\varphi^* = \varphi$), кососимметричного ($\varphi^* = -\varphi$) и ортогонального ($\varphi^{-1} = \varphi^*$) операторов. То же верно и для унитарного пространства, только несколько меняется терминология: самосопряженные называются еще эрмитовыми, аналоги кососимметричных — косоэрмитовыми, ортогональных — унитарными операторами.

2.1 Сопряженное преобразование

Итак, пусть V — унитарное пространство, а $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор на нем.

Определение 2.1. Преобразование $\varphi^*\colon V \to V$ называется *сопряженным* к φ, если оно удовлетворяет тождеству

$$(\varphi(\mathbf{u}),\, \mathbf{v}) = (\mathbf{u},\, \varphi^*(\mathbf{v})) \quad \forall \mathbf{u},\, \mathbf{v} \in V$$

(напомним, что $(\cdot,\cdot)$ обозначает эрмитово скалярное произведение в V).

Во-первых, заметим, что если сопряженное преобразование существует, то оно *единственно*. В самом деле, пусть φ_1, φ_2 — два сопряженных к φ. Тогда $(\mathbf{u},\, (\varphi_1 - \varphi_2)(\mathbf{v})) = 0 \quad \forall \mathbf{u},\, \mathbf{v} \in V$. Фиксируя $\mathbf{v}$, из невырожденности эрмитова скалярного произведения получаем $(\varphi_1 - \varphi_2)(\mathbf{v}) = 0$; поскольку это выполнено для любого $\mathbf{v}$, то $\varphi_1 = \varphi_2$.

Во-вторых, заметим, что сопряженное преобразование *линейно*. В самом деле,

$$(\mathbf{u},\, \varphi^*(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)) = (\varphi(\mathbf{u}),\, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (\varphi(\mathbf{u}),\, \mathbf{v}_1) + (\varphi(\mathbf{u}),\, \mathbf{v}_2) =$$

$$(\mathbf{u},\, \varphi^*(\mathbf{v}_1)) + (\mathbf{u},\, \varphi^*(\mathbf{v}_2)) = (\mathbf{u},\, \varphi^*(\mathbf{v}_1) + \varphi^*(\mathbf{v}_2));$$

поскольку это выполнено для любого $\mathbf{u} \in V$, то $\varphi^*(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \varphi^*(\mathbf{v}_1) + \varphi^*(\mathbf{v}_2)$. Далее,

$$(\mathbf{u},\, \varphi^*(\lambda\mathbf{v})) = (\varphi(\mathbf{u}),\, \lambda\mathbf{v}) = \lambda(\varphi(\mathbf{u}),\, \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u},\, \varphi^*(\mathbf{v})) = (\mathbf{u},\, \lambda\varphi^*(\mathbf{v}))$$

и снова, поскольку это выполнено для любого $\mathbf{u} \in V$, то $\varphi^*(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\varphi^*(\mathbf{v})$.

Существование сопряженного преобразования докажем, используя существование ортонормированных базисов в унитарном пространстве V. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — такой базис. Пусть оператор φ имеет в нем матрицу A. Рассмотрим оператор $\psi\colon V \to V$, который в этом базисе имеет матрицу $B := \overline{A}^T$. Тогда $(\varphi(\mathbf{u}),\, \mathbf{v}) = (\mathbf{u},\, \psi(\mathbf{v}))\ \ \forall \mathbf{u},\, \mathbf{v} \in V$. Действительно, последнее равенство в базисе имеет вид:

$$(\overline{A\overrightarrow{u}})^T\overrightarrow{v} = \overline{\overrightarrow{u}}^T B\overrightarrow{v}$$

и в силу определения B верно для любых столбцов $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$. Таким образом, в качестве φ^* нужно взять линейный оператор, который имеет матрицу $\overline{A}^T$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

Читателю предлагается проверить самостоятельно, что для базиса с матрицей Грама G матрица B сопряженного преобразования φ^* выражается через матрицу A преобразования φ по формуле $B = G^{-1}\overline{A}^T G$.

Далее так же как в случае евклидова пространства доказываются тождества

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*, \;\; (\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*, \;\; \mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_V$$

с единственным отличием $(\lambda\varphi)^* = \overline{\lambda}\varphi^*$, для произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$. В самом деле,

$$(\mathbf{u},\, (\lambda\varphi)^*(\mathbf{v})) = (\lambda\varphi(\mathbf{u}),\, \mathbf{v}) = \overline{\lambda}(\varphi(\mathbf{u}),\, \mathbf{v}) = \overline{\lambda}(\mathbf{u},\, \varphi^*(\mathbf{v})) = (\mathbf{u},\, \overline{\lambda}\varphi^*(\mathbf{v})).$$

Предложение 2.2. *Пусть V — унитарное пространство, $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор на нем, $U \subset V$ — инвариантное относительно φ подпространство. Тогда подпространство $U^\perp \subset V$ инвариантно относительно φ^*.*

Доказательство. Для произвольных $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{v} \in U^\perp$

$$0 = (\varphi(\mathbf{u}),\, \mathbf{v}) = (\mathbf{u},\, \varphi^*(\mathbf{v})) \quad \Rightarrow \quad \varphi^*(\mathbf{v}) \in U^\perp. \quad \blacksquare$$

2.2 Самосопряженные преобразования

Определение 2.3. Оператор $\varphi\colon V \to V$ на унитарном пространстве V называется *самосопряженным* или *эрмитовым*, если он равен своему сопряженному, $\varphi = \varphi^*$.

Из предыдущего следует такой результат:

Предложение 2.4. *Оператор на унитарном пространстве самосопряжен тогда и только тогда, когда его матрица в произвольном ортонормированном базисе эрмитова.*

Из Предложения 2.2 вытекает такое Следствие:

Следствие 2.5. *Ортогональное дополнение к инвариантному подпространству самосопряженного оператора инвариантно.*

Доказательство следующего Предложения в унитарном случае даже проще, чем в евклидовом.

Предложение 2.6. *Все собственные значения самосопряженного оператора φ на унитарном пространстве V вещественны.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ — собственное значение оператора φ. Тогда существует $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ такой, что $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Тогда

$$\overline{\lambda}(\mathbf{v},\, \mathbf{v}) = (\lambda\mathbf{v},\, \mathbf{v}) = (\varphi(\mathbf{v}),\, \mathbf{v}) = (\mathbf{v},\, \varphi(\mathbf{v})) = (\mathbf{v},\, \lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{v},\, \mathbf{v}).$$

Так как $(\mathbf{v},\, \mathbf{v}) \neq 0$, то $\lambda = \overline{\lambda}$. $\blacksquare$

Следствие 2.7. *Все корни характеристического многочлена $\chi_A(t) = \det(tE - A)$ эрмитовой матрицы A вещественны.*

Заметим, что всякая симметричная вещественная матрица эрмитова. Поэтому все корни ее характеристического многочлена вещественны. Тем самым мы получаем еще одно (третье в этом курсе) доказательство теоремы о том, что самосопряженный оператор в евклидовом пространстве имеет вещественный спектр.[3] Напомним, что этот результат был сложной частью доказательства теоремы о том, что всякий самосопряженный оператор в евклидовом пространстве диагонализируется в некотором ортонормированном базисе.

Следующая теорема является аналогом соответствующей теоремы для евклидового случая.

Теорема 2.8. *(Теорема о каноническом виде эрмитового оператора). Линейный оператор φ в унитарном пространстве V самосопряжен $\Leftrightarrow$ он диагонализируется в некотором ортонормированном базисе и имеет вещественный спектр.*

Доказательство. Если оператор диагонализируется в ортонормированном базисе и имеет вещественный спектр, то его матрица в этом базисе диагональная с вещественными элементами на диагонали, значит она эрмитова. Мы уже знаем, что если оператор имеет эрмитову матрицу в некотором ортонормированном базисе, то он самосопряжен.

Обратно, пусть φ самосопряжен. Тогда, как мы уже выяснили, он имеет вещественный спектр. Существование ортонормированного базиса в V из его собственных векторов будем доказывать индукцией по $\dim V$. Если $\dim V = 1$, то существование ортонормированного базиса очевидно. Пусть теорема верна для пространств размерности, не превосходящей $\dim V - 1$. Пусть $\mathbf{v}$ — произвольный собственный вектор оператора φ в V (любое линейное преобразование в комплексном пространстве имеет собственый вектор). Без ограничения общности можно предположить, что его длина равна 1. Подпространство $\langle \mathbf{v} \rangle \subset V$ инвариантно относительно φ. Значит, его ортогональное дополнение $\langle \mathbf{v} \rangle^\perp \subset V$ тоже инвариантно. Заметим, что $\dim \langle \mathbf{v} \rangle^\perp = n-1$ и $V = \langle \mathbf{v} \rangle \oplus \langle \mathbf{v} \rangle^\perp$ — разложение в ортогональную прямую сумму. Кроме того, $\langle \mathbf{v} \rangle^\perp$ — унитарное пространство, а ограничение $\varphi|_{\langle \mathbf{v} \rangle^\perp}$ оператора φ на него — самосопряженный оператор на $\langle \mathbf{v} \rangle^\perp$. По предположению индукции в $\langle \mathbf{v} \rangle^\perp$ существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\varphi|_{\langle \mathbf{v} \rangle^\perp}$. Добавляя к нему нормированный вектор $\mathbf{v}$, получаем искомый ортонормированный базис в V из собственных векторов оператора φ. ■

Заметим, что если λ — некоторое собственное значение оператора φ, то соответствующее собственное подпространство V_λ является линейной оболочкой собственных векторов из построенного в предыдущей теореме ортонормированного базиса, которые отвечают собственному значению λ. Таким образом, если $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — все попарно различные собственные значения φ, то V раскладывается в *ортогональную* прямую сумму собственных подпространств, $V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$. Ортогональность собственных векторов самосопряженного оператора, отвечающих разным собственным значениям, легко проверить непосредственно: пусть $\varphi(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}, \quad \varphi(\mathbf{v}) = \mu \mathbf{v}, \quad \lambda \neq \mu$; тогда

$$\lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \varphi(\mathbf{v})) = \mu(\mathbf{u}, \mathbf{v});$$

так как $\lambda \neq \mu$, то $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$.

Из предыдущей теоремы получаем следующее следствие.

Следствие 2.9. *Для любой эрмитовой матрицы A существует унитарная матрица U такая, что матрица $A' = U^T A U$ диагональна с вещественными элементами на диагонали.*

[3] неявно мы при этом используем операцию комплексификации, о которой можно почитать в [6, 4].

Далее аналогично евклидовому случаю устанавливается биекция в унитарном пространстве между эрмитовыми формами и эрмитовыми операторами. Используя доказанные теоремы об эрмитовых операторах, доказывается существование ортонормированного базиса, в котором данная эрмитова форма имеет диагональный вид с вещественными числами на главной диагонали. Далее аналогично евклидовому случаю рассматривается задача о паре эрмитовых форм, одна из которых знакоопределена. Мы не будем делать это подробно, поскольку читатель, знакомый с евклидовым случаем, легко восстановит детали.

2.3 Унитарные преобразования

Пусть V — унитарное пространство с эрмитовым скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$.

Определение 2.10. Линейный оператор $\varphi\colon V \to V$ называется *унитарным*, если для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

$$(\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}). \tag{9}$$

Замечание 2.11. В силу (2) вместо (9) достаточно потребовать чтобы φ сохранял соответствующую эрмитову квадратичную форму.

Из определения сразу следует, что унитарный оператор является линейным изоморфизмом пространства V на себя (изоморфизмы на себя называют еще *автоморфизмами*). В самом деле, так как V конечномерно, то достаточно проверить условие $\ker\varphi = 0$. Пусть $\mathbf{v} \in \ker\varphi,\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Тогда

$$0 = (\varphi(\mathbf{v}), \varphi(\mathbf{v})) = (\mathbf{v}, \mathbf{v}) \neq 0$$

— противоречие.

Таким образом, для унитарного оператора $\varphi\colon V \to V$ существует обратный линейный оператор φ^{-1}. Покажем, что φ^{-1} тоже унитарен, то есть $(\varphi^{-1}(\mathbf{u}), \varphi^{-1}(\mathbf{v})) = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Пусть $\mathbf{u}' := \varphi^{-1}(\mathbf{u}),\ \mathbf{v}' := \varphi^{-1}(\mathbf{v})$. Тогда

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\varphi(\mathbf{u}'), \varphi(\mathbf{v}')) = (\mathbf{u}', \mathbf{v}') = (\varphi^{-1}(\mathbf{u}), \varphi^{-1}(\mathbf{v})).$$

Легко видеть, что композиция унитарных операторов является унитарным оператором, линейный оператор, обратный унитарному унитарен, тождественный оператор унитарен. Значит, унитарные операторы на унитарном пространстве V образуют группу относительно операции композиции, называемую *унитарной* и обозначаемую $\mathrm{U}(V)$. Она является подгруппой в $\mathrm{GL}(V)$ — группе всех обратимых линейных операторов на пространстве V относительно операции композиции — и состоит в точности из тех преобразований, которые сохраняют фиксированное эрмитово скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$.

Более общо, можно определить понятие унитарного отображения между разными унитарными пространствами. Любое унитарное отображение инъективно. Если оно сюръективно, то оно — унитарный изоморфизм. Легко проверить (используя существование ортонормированных базисов), что два унитарных пространства унитарно изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые размерности. В частности, любые два унитарных пространства данной размерности изоморфны. В частности, они изоморфны пространству $\mathbb{C}^n$ со скалярным произведением $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^n \overline{u}_k v_k$.

Легко видеть, что условие (9) равносильно условию $\varphi^* = \varphi^{-1}$. Для матрицы оператора в ортонормированном базисе оно превращается в условие $\overline{U}^T = U^{-1}$. Таким образом, *унитарный оператор в ортонормированном базисе имеет унитарную матрицу*. Верно и обратное: *оператор, матрица которого в некотором ортонормированном базисе унитарного пространства унитарна, является унитарным.*

В частности, множество всех унитарных матриц данного порядка n является группой по умножению. Она обозначается $\mathrm{U}(n)$. Выбор ортонормированного базиса в n-мерном унитарном пространстве V задает изоморфизм группы $\mathrm{U}(V)$ на $\mathrm{U}(n)$.

Заметим, что определитель унитарной матрицы (унитарного оператора) — комплексное число, модуль которого равен 1.

Получим теперь канонический вид унитарного преобразования $\varphi\colon V \to V$.

Предложение 2.12. *Если $U \subset V$ является φ-инвариантным, то и $U^\perp \subset V$ является φ-инвариантным.*

Доказательство. Заметим, что $\varphi|_U\colon U \to U$ — унитарный (в частности, биективный) оператор на U. Значит, для любого $\mathbf{u} \in U$ $\exists \mathbf{u}' \in U$ такой, что $\varphi(\mathbf{u}') = \mathbf{u}$. Выберем произвольный $\mathbf{v} \in U^\perp$. Тогда

$$(\mathbf{u},\, \varphi(\mathbf{v})) = (\varphi(\mathbf{u}'),\, \varphi(\mathbf{v})) = (\mathbf{u}',\, \mathbf{v}) = 0. \quad \blacksquare$$

Предложение 2.13. *Если λ — собственное значение унитарного оператора φ, то $|\lambda| = 1$ (заметим, что λ, вообще говоря, комплексное число).*

Доказательство. Пусть $\mathbf{v} \in V$ — собственный вектор φ с собственным значением λ. Тогда

$$(\mathbf{v},\, \mathbf{v}) = (\varphi(\mathbf{v}),\, \varphi(\mathbf{v})) = |\lambda|^2(\mathbf{v},\, \mathbf{v}).$$

Так как $(\mathbf{v},\, \mathbf{v}) \neq 0$, то $|\lambda|^2 = 1$. $\blacksquare$

Теорема 2.14. *Оператор $\varphi\colon V \to V$ является унитарным тогда и только тогда, когда он диагонализируется в ортонормированном базисе и имеет спектр, лежащий на единичной окружности в $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что диагональная матрица с комплексными числами на главной диагонали, равными по модулю единице, унитарна.

Обратное утверждение (существование ортонормированного базиса из собственных векторов) будем доказывать индукцией по $\dim V$. Если $\dim V = 1$, то утверждение очевидно. Пусть $\dim V > 1$. Пусть $\mathbf{v}$ — собственный вектор унитарного преобразования φ (любое линейное преобразование в комплексном пространстве имеет собственый вектор). Без ограничения общности можно считать, что вектор $\mathbf{v}$ нормирован. Подпространство $\langle \mathbf{v} \rangle \subset V$ инвариантно, а значит инвариантно и его ортогональное дополнение $\langle \mathbf{v} \rangle^\perp$. По предположению индукции в $\langle \mathbf{v} \rangle^\perp$ существует требуемый базис для унитарного оператора $\varphi|_{\langle \mathbf{v} \rangle^\perp}$. Добавляя к нему нормированный вектор $\mathbf{v}$, получаем требуемый базис в V для φ. $\blacksquare$

Заметим, что легко доказать непосредственно, что собственные подпространства унитарного преобразования, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны. В самом деле, пусть $\varphi(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u},\ \varphi(\mathbf{v}) = \mu\mathbf{v},\ \ \lambda \neq \mu$. Тогда

$$(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = (\varphi(\mathbf{u}),\, \varphi(\mathbf{v})) = \overline{\lambda}\mu(\mathbf{u},\, \mathbf{v}).$$

Так как $\overline{\lambda}\mu \neq 1$ (здесь наряду с условием $\lambda \neq \mu$ мы используем $|\lambda| = 1 = |\mu|$), то $(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = 0$.

2.4 Заключительные замечания

Замечание 2.15. Читатель, несомненно, заметил общее свойство эрмитовых и унитарных преобразований: и те, и другие диагоализируются в некотором ортонормированном базисе. Они являются частными случаями так называемых *нормальных* преобразований унитарного пространства, которые могут быть описаны двумя равносильными способами:

- это операторы, диагонализируемые в ортонормированном базисе;
- это операторы, коммутирующие со своим сопряженным.

Доказательство равносильности этих условий см. например в [6].

Замечание 2.16. Заметим также, что эрмитовы и унитарные операторы играют важную роль в математической модели квантовой механики. Точнее, первые отвечают наблюдаемым (таким как импульс, энергия или спин), а вторые описывают симметрии квантовой системы и ее эволюцию во времени, см. например [6].

Замечание 2.17. Есть важная связь между эрмитовыми, косоэрмитовыми и унитарными операторами и матрицами. Как уже отмечалось, унитарные матрицы образуют группу по умножению. Эрмитовы и косоэрмитовы матрицы группы по умножению не образуют, они являются векторными пространствами над $\mathbb{R}$, переходящими друг в друга при умножении на i. Однако пространство косоэрмитовых матриц замкнуто относительно другой операции — взятия коммутатора. Получающаяся при этом структура называется *алгеброй Ли.* Она тесно связана с группой унитарных матриц, в частности, экспонента косоэрмитовой матрицы является унитарной матрицей.

Замечание 2.18. Заметим, что унитарная матрица с вещественными элементами является ортогональной и любая ортогональная является в этом смысле унитарной. Поэтому корни характеристического многочлена ортогональной матрицы лежат на единичной окружности в $\mathbb{C}$.

Замечание 2.19. Наконец, заметим, что для операторов в унитарном пространстве V имеет место полярное разложение. А именно, любой оператор φ можно представить в виде произведения неотрицательного (положительного для невырожденного φ) эрмитова и унитарного. Оно аналогично представлению комплексных чисел в показательной форме $z = re^{i\alpha}$, где $r,\ \alpha \in \mathbb{R},\ r \geq 0$. При этом первому множителю отвечают неотрицательные эрмитовы операторы, а второму — унитарные. Доказательство аналогично евклидовому случаю.

3 Добавление: связь унитарной, ортогональной и симплектической структур

Эрмитово скалярное произведение на V определяет евклидову и симплектическую структуру на овеществлении $V_{\mathbb{R}}$. В результате на овеществлении $V_{\mathbb{R}}$ унитарного пространства определены три связанные между собой структуры: комплексная, евклидова и симплектическая. Это приводит к тому, что подгруппы в $\mathrm{GL}(V_{\mathbb{R}})$, сохраняющие соответствующие структуры, тоже оказываются связанными между собой. Данный раздел посвящен описанию этих важных и глубоких связей. Излагаемую теорию мы иллюстрируем простейшим примером 3.5, к которому, возможно, имеет смысл обращаться в процессе чтения.

Комплексное векторное пространство V — это абелева группа, для которой определена операция умножения на комплексные числа

$$\mathbb{C} \times V \to V, \quad (\lambda, \mathbf{v}) \mapsto \lambda\mathbf{v}, \tag{10}$$

удовлетворяющая известным аксиомам. Ограничение (10) на подполе вещественных чисел $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ определяет на V структуру вещественного векторного пространства. Это вещественное векторное пространство, полученное из комплексного пространства V называется *овеществлением* V и обозначается $V_{\mathbb{R}}$. В частности, если $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — некоторый $\mathbb{C}$-базис в V, то в качестве $\mathbb{R}$-базиса в $V_{\mathbb{R}}$ можно взять $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, i\mathbf{e}_1, \dots, i\mathbf{e}_n\}$.

Всякий $\mathbb{C}$-линейный оператор $\varphi\colon V \to V$ тем более является $\mathbb{R}$-линейным, и, значит, определяет некоторый оператор $\varphi_{\mathbb{R}}\colon V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$. Заметим, что если φ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ имел матрицу $A + Bi$, то $\varphi_{\mathbb{R}}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, i\mathbf{e}_1, \dots, i\mathbf{e}_n\}$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Заметим также, что сопоставление $\varphi \mapsto \varphi_{\mathbb{R}}$ определяет гомоморфизм

$$\vartheta\colon \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V_{\mathbb{R}}) \tag{12}$$

$\mathbb{R}$-алгебр с единицей. Нетрудно проверить, что $\det \vartheta(C) = |\det C|^2 \ \ \forall C \in \mathcal{L}(V)$.

Умножение на i в V задает в $V_{\mathbb{R}}$ некоторый линейный оператор, который мы обозначим J. То есть, по определению, $i\mathbf{v} = J(\mathbf{v})$ для любого $\mathbf{v} \in V$. Ясно, что $J^2 = -\mathrm{id}_{V_{\mathbb{R}}}$. Этот оператор называется *комплексной структурой* в $V_{\mathbb{R}}$ (подробнее см. в [6], см. также [1]). В базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, i\mathbf{e}_1, \dots, i\mathbf{e}_n\}$ он имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Предложение 3.1. *$\mathbb{R}$-линейный оператор $\psi\colon V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$ происходит из некоторого $\mathbb{C}$-линейного оператора φ на V (то есть имеет вид $\varphi_{\mathbb{R}}$) тогда и только тогда, когда он коммутирует с J.*

Доказательство. Доказать это предложение можно двумя способами. Во-первых, легко проверить, что вещественная матрица порядка $2n$ коммутирует с матрицей (13) тогда и только тогда, когда она имеет вид (11).

Во-вторых, выкладка

$$\psi((a+bi)\mathbf{v}) = a\psi(\mathbf{v}) + b\psi(i\mathbf{v}) = a\psi(\mathbf{v}) + b\psi(J(\mathbf{v})) =$$

$$a\psi(\mathbf{v}) + bJ(\psi(\mathbf{v})) = a\psi(\mathbf{v}) + bi\psi(\mathbf{v})$$

показывает, что условие коммутирования с J — необходимое и достаточное условие того, чтобы $\mathbb{R}$-линейный оператор был $\mathbb{C}$-линейным. ■

Как уже отмечалось, эрмитова форма на комплексном пространстве определяет пару вещественно билинейных форм на его овеществлении — симметричную и кососимметричную, к определению и изучению которых мы сейчас переходим.

Пусть α — эрмитова форма на комплексном пространстве V. Положим

$$\beta(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) := \operatorname{Re}\alpha(\mathbf{u},\, \mathbf{v}), \ \ \gamma(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) := \operatorname{Im}\alpha(\mathbf{u},\, \mathbf{v}),$$

где Re и Im обозначают соответственно вещественную и мнимую части комплексного числа. Тогда β и γ задают вещественные билинейные функции на $V_{\mathbb{R}}$. Более того, имеют место следующие результаты:

Предложение 3.2. *(i) Форма β симметрична, а γ кососимметрична, причем обе они инвариантны относительно оператора J, то есть*

$$\beta(J\boldsymbol{u},\, J\boldsymbol{v}) = \beta(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}), \quad \gamma(J\boldsymbol{u},\, J\boldsymbol{v}) = \gamma(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v});$$

(ii) β и γ связаны следующими соотношениями:

$$\beta(\boldsymbol{u},\, J\boldsymbol{v}) = -\gamma(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}); \quad \gamma(\boldsymbol{u},\, J\boldsymbol{v}) = \beta(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v});$$

(iii) любая пара связанных соотношениями (ii) форм β, γ на $V_{\mathbb{R}}$, первая из которых симметрична, а вторая — кососимметрична, определяет эрмитову форму α на V по формуле

$$\alpha(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}) = \beta(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v}) + i\gamma(\boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v});$$

(iv) форма α положительно определена тогда и только тогда, когда форма β положительно определена.

Доказательство. Проверку $\mathbb{R}$-билинейности форм β и γ оставим читателю. Из представления $\alpha(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = \beta(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) + i\gamma(\mathbf{u},\, \mathbf{v})$ и эрмитовой симметрии α выводится симметричность β и кососимметричность γ. J-инвариантность β и γ следует из равенства $\alpha(i\mathbf{u},\, i\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u},\, \mathbf{v})\ \ \forall \mathbf{u},\, \mathbf{v} \in V$.

Тождества пункта (ii) выводятся из $\mathbb{C}$-линейности α по второму аргументу, точнее, из равенства $\alpha(\mathbf{u},\, i\mathbf{v}) = i\alpha(\mathbf{u},\, \mathbf{v})$.

Эрмитовость формы, определенной в (iii), проверяется непосредственно. В частности, условия J-инвариантности форм β и γ следуют из тождеств пункта (ii) и симметричности (кососимметричности) β (соотв. γ).

Утверждение пункта (iv) следует из равенства $\alpha(\mathbf{v},\, \mathbf{v}) = \beta(\mathbf{v},\, \mathbf{v})$, верного для любого $\mathbf{v} \in V$ (то есть равенства соответствующих квадратичных форм), которое, в свою очередь, следует из кососимметричности γ. ■

Следствие 3.3. *В прежних обозначениях, если α положительно определена и $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ — ортонормированный базис для α, то $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n, i\boldsymbol{e}_1, \ldots, i\boldsymbol{e}_n\}$ является ортонормированным базисом для β и симплектическим для γ (последнее означает, что γ имеет в нем матрицу $I_{2n} := \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$).*

Наоборот, если U — $2n$-мерное вещественное пространство с симметричной положительно определенной формой β и невырожденной кососимметрической формой γ, а также базисом $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_{n+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{2n}\}$, ортонормированным для β и симплектическим для γ, то, введя на U комплексную структуру с помощью оператора

$$J\colon U \to U, \quad J(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_{n+j}, \ \ 1 \le j \le n, \ \ J(\boldsymbol{e}_j) = -\boldsymbol{e}_{j-n}, \ \ n+1 \le j \le 2n,$$

и скалярное произведение $\alpha(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \beta(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + i\gamma(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$, получим комплексное пространство V такое, что $U = V_{\mathbb{R}}$, с положительно определенной эрмитовой формой α, для которой $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ является ортонормированным $\mathbb{C}$-базисом в V.

Доказательство получается простой проверкой с помощью Предложения 3.2. ∎

Гомоморфизм ϑ (см. (12)) в фиксированном базисе задает инъективный гомоморфизм $\mathbb{R}$-алгебр $\theta\colon \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{R})$ и, так как он переводит обратимые матрицы в обратимые, инъективный гомоморфизм (вложение) групп $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$, а значит и $\mathrm{U}(n) \to \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$. Данные группы мы отождествим с их образами в $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$.

Тем самым группа $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ содержит следующие подгруппы: $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, а также

$$\mathrm{O}(2n) = \{A \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) \mid A^T A = E\}$$

и

$$\mathrm{Sp}(2n) = \{A \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) \mid A^T I_{2n} A = I_{2n}\},$$

сохраняющие билинейные формы β и γ из предыдущего Следствия. Как эти подгруппы связаны между собой?

Предложение 3.4. *Пересечение всех трех подгрупп $\mathrm{O}(2n)$, $\mathrm{Sp}(2n)$ и $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ совпадает с пересечением любых двух из них и совпадает с $\mathrm{U}(n)$. То есть*

$$\mathrm{U}(n) = \mathrm{O}(2n) \cap \mathrm{Sp}(2n) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{O}(2n) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{Sp}(2n).$$

Доказательство. Воспользуемся предыдущим Следствием. Ясно, что пересечение всех трех групп $\mathrm{O}(2n)$, $\mathrm{Sp}(2n)$ и $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ совпадает с $\mathrm{U}(n)$, так как последняя группа состоит из комплексно-линейных преобразований, сохраняющих эрмитову форму α, а значит ее вещественную β и мнимую γ части.

Пусть $\varphi \in \mathrm{O}(2n) \cap \mathrm{Sp}(2n)$, докажем, что тогда $\varphi \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. В самом деле,

$$\beta(\varphi(\mathbf{u}), \varphi(J(\mathbf{v}))) = \beta(\mathbf{u}, J(\mathbf{v})) = -\gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) =$$

$$-\gamma(\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})) = \beta(\varphi(\mathbf{u}), J(\varphi(\mathbf{v}))).$$

В силу обратимости φ, любой вектор из V имеет вид $\varphi(\mathbf{u})$, где $\mathbf{u} \in V$, откуда из невырожденности β получаем $\varphi(J(\mathbf{v})) = J(\varphi(\mathbf{v}))\ \ \forall \mathbf{v} \in V\ \Rightarrow\ \varphi \circ J = J \circ \varphi$. Теперь по Предложению 3.1 получаем, что $\varphi \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Пусть $\varphi \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{O}(2n)$, тогда

$$\varphi \circ J = J \circ \varphi \quad \text{и} \quad \beta(\varphi(\mathbf{u}),\, \varphi(\mathbf{v})) = \beta(\mathbf{u},\, \mathbf{v})\ \ \forall \mathbf{u},\, \mathbf{v} \in V_{\mathbb{R}}.$$

Проверим, что такое φ сохраняет и γ. Действительно, положим $\mathbf{v} = J(\mathbf{v}')$. Тогда

$$\gamma(\varphi(\mathbf{u}),\, \varphi(\mathbf{v})) = \gamma(\varphi(\mathbf{u}),\, \varphi(J(\mathbf{v}'))) = \gamma(\varphi(\mathbf{u}),\, J(\varphi(\mathbf{v}'))) =$$

$$\beta(\varphi(\mathbf{u}),\, \varphi(\mathbf{v}')) = \beta(\mathbf{u},\, \mathbf{v}') = -\beta(\mathbf{u},\, J(\mathbf{v})) = \gamma(\mathbf{u},\, \mathbf{v}).$$

Тогда в силу первого пункта $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{O}(2n) \subset \mathrm{U}(n)$. Обратное включение очевидно.

Последнее равенство доказывается аналогично. ■

Пример 3.5. Пусть V — одномерное пространство над полем $\mathbb{C}$ с выбранным базисом $\{\mathbf{e}\}$. Тогда $V_{\mathbb{R}}$ — двумерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, в котором выбранному в V базису отвечает базис $\{\mathbf{e},\, i\mathbf{e}\}$. Линейное преобразование $\varphi\colon V \to V$ в базисе $\{\mathbf{e}\}$ имеет матрицу (λ), $\lambda \in \mathbb{C}$. Если $\lambda = a + bi$, $a,\, b \in \mathbb{R}$, то $\theta(\lambda) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. В частности, комплексная структура J в базисе $\{\mathbf{e},\, i\mathbf{e}\}$ пространства $V_{\mathbb{R}}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Если вектор $\mathbf{v} \in V$ в базисе $\{\mathbf{e}\}$ имел координату $v = v_1 + iv_2$, то соответствующий ему вектор из $V_{\mathbb{R}}$ в базисе $\{\mathbf{e},\, i\mathbf{e}\}$ имеет координатный столбец $(v_1,\, v_2)^T$.

Если $\{\mathbf{e}\}$ — ортонормированный базис для положительно определенной эрмитовой формы α на V, то

$$\alpha(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = \bar{\mathbf{u}}\,\mathbf{v} = (u_1 - iu_2)(v_1 + iv_2) = u_1v_1 + u_2v_2 + i(u_1v_2 - u_2v_1).$$

В базисе $\{\mathbf{e},\, i\mathbf{e}\}$ пространства $V_{\mathbb{R}}$ формы β и γ записываются в виде:

$$\beta(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = u_1v_1 + u_2v_2; \quad \gamma(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = u_1v_2 - u_2v_1,$$

то есть указанный базис является ортонормированным для β и симплектическим для γ.

Заметим, что $J(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$, поэтому

$$\beta(\mathbf{u},\, J(\mathbf{v})) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -u_1v_2 + u_2v_1 = -\gamma(\mathbf{u},\, \mathbf{v}),$$

etc.

Проверим теперь последнее Предложение непосредственно. Заметим, что $\mathrm{U}(1) = \{e^{ix} \mid x \in \mathbb{R}\}$. Кроме того, $\theta(e^{ix}) = \theta(\cos x + i \sin x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$, и, значит, $\theta(\mathrm{U}(1)) = \mathrm{SO}(2)$.

Кроме того,

$$\mathrm{Sp}(2) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid A^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}.$$

Имеем:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & a \\ -d & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & ad-bc \\ bc-ad & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \det A = 1.$$

Таким образом, $\mathrm{Sp}(2) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Теперь легко видеть, что $\mathrm{O}(2) \cap \mathrm{Sp}(2) = \mathrm{SO}(2) = \theta(\mathrm{U}(1))$.

Кроме того,

$$\theta(\mathrm{GL}_1(\mathbb{C})) = \{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a^2 + b^2 \neq 0 \}.$$

Поэтому $\theta(\mathrm{GL}_1(\mathbb{C})) \cap \mathrm{Sp}(2) = \{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a^2 + b^2 = 1 \} = \mathrm{SO}(2)$.

Наконец, $\theta(\mathrm{GL}_1(\mathbb{C})) \cap \mathrm{O}(2) = \mathrm{SO}(2)$, так как $\det \theta(A) > 0 \ \ \forall A \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$.

Замечание 3.6. Из рассмотренного примера видно, что в $\mathbb{R}^2$ комплексная структура однозначно определяется заданием метрики (=евклидовой структуры) и ориентации. А именно, J есть поворот на угол $\frac{\pi}{2}$ в положительном направлении. Благодаря этому факту использование комплексных координат при решении ряда задач на плоскости столь эффективно.

В пространствах большей размерности это уже не так. Рассмотрим, например, важный для физики случай $\mathbb{R}^4$. Допустим, мы фиксировали стандартные метрику и ориентацию. Комплексная структура J (которая a priori представляет собой оператор (матрицу) $J \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ такой, что $J^2 = -\mathrm{id}$) согласована с данной метрикой и ориентацией, если, во-первых, она сохраняет метрику, то есть является ортогональным оператором, и, во-вторых, в некотором правом ортонормированном базисе имеет матрицу (13) (при $n = 2$).

Ясно, что все комплексные структуры, согласованные с данной метрикой и ориентацией, сопряжены на элемент из $\mathrm{SO}(4)$ (матрицу перехода между двумя правыми ортонормированными базисами). То есть если I, J — две такие комплексные структуры, то $\exists A \in \mathrm{SO}(4)$ такая, что $I = A^T J A$.

Фиксируем комплексную структуру J, заданную матрицей (13) в стандартном базисе. Тогда сопряжение на элемент подгруппы $\theta(\mathrm{U}(2)) \subset \mathrm{SO}(4)$ оставляет ее на месте, и обратно, поскольку $\theta(\mathrm{U}(2)) = \theta(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})) \cap \mathrm{SO}(4)$. Отсюда можно вывести, что множество всех комплексных структур в $\mathbb{R}^4$, согласованных с данной метрикой и ориентацией, есть однородное пространство $\mathrm{SO}(4)/\mathrm{U}(2) \cong S^2$. То есть для каждой точки $p \in S^2$ на $\mathbb{R}^4$ есть своя комплексная структура, то есть свой изоморфизм $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2$.

Так как обычно нет канонического выбора одной комплексной структуры из континуума возможных, для применения методов комплексного анализа нужно использовать их все одновременно. Об одном из применений этого подхода в физике и его связи с теорией твисторов Р. Пенроуза можно почитать в [2], Дополнение, гл. III, § 3.

С другой стороны, легко видеть, что даже в $\mathbb{R}^2$ данной комплексной структуре J отвечает континуум метрик. Действительно, комплексная структура J согласована с любой метрикой, для которой $\{\mathbf{u},\, J(\mathbf{u})\}$ при $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ является ортонормированным базисом. Легко видеть, что все такие метрики отличаются скалярным множителем $r > 0$. В то же время комплексная структура, конечно, однозначно фиксирует ориентацию.

Изложенные факты имеют важные приложения в теории римановых поверхностей, так как, во-первых, показывают, что все они имеют каноническую ориентацию, и во-вторых, что комплексная структура фиксирует конформный класс римановых метрик на них (подробности см. в книге [7], часть II, лекция 8).

Список литературы

[1] А.А. Арутюнов, А.В. Ершов Дополнительные задачи по линейной алгебре: Учеб. пособие. — М.: МФТИ, 2016 — 214 с.

[2] М. Атья Геометрия и физика узлов: Пер. с англ. — М., Мир, 1995 — 192 с.

[3] Д.В. Беклемишев Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. для вузов. — 12-е изд., испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009 — 312 с.

[4] Э.Б. Винберг Курс алгебры. — 2-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2013. — 592 с.

[5] А.Л. Городенцев Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Часть 1. — М.: МЦНМО, 2013. — 488 с.

[6] А.И. Кострикин, Ю.И. Манин Линейная алгебра и геометрия. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. — 320 с.

[7] В.В. Прасолов, О.В. Шварцман Азбука римановых поверхностей. — М.: МЦНМО, 2014. — 148 с.