А. Л. Лукашов

Кратный интеграл (лекции для ФИВТ).

§1. Определение кратного интеграла.

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ - измеримое по Лебегу (Жордану) множество конечной меры. Разбиением P этого множества назовем произвольное представление его в виде объединения конечного числа непересекающихся измеримых по Лебегу (Жордану) множеств $E_k : E = \sqcup_{k=1}^{K} E_k$.

Это определение обобщает понятие разбиения отрезка, введенное при построении интеграла Римана по отрезку.

Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ – ограниченная на E функция. Тогда для любого разбиения P множества E определены числа $M_k = \sup_{x\in E_k} f(x)$ и $m_k = \inf_{x\in E_k} f(x)$.

Также, как и при построении интеграла Римана, определим соответствующие данному разбиению P верхние (нижние) суммы Дарбу (или соответственно Дарбу-Лебега, Дарбу-Римана): $U(P,f) = \sum_{k=1}^{K} M_k \mu_{(J)}(E_k)$; $L(P,f) = \sum_{k=1}^{K} m_k \mu_{(J)}(E_k)$.

Вводя понятие общего измельчения разбиений $P_i : E = \sqcup_{k=1}^{K_i} E_k^{(i)}$, $i = 1,2$ как разбиения, состоящего из всевозможных пересечений $P : E = \sqcup_{j,k} E_j^{(1)} \cap E_k^{(2)}$, получим, что каждая нижняя сумма не превосходит каждой верхней $L(P_1,f) \le L(P,f) \le U(P,f) \le U(P_2,f)$.

Отсюда, аналогично интегралу Римана по отрезку, можно определить нижний и верхний интегралы Лебега (Римана) от функции f по множеству E как супремум нижних и инфимум верхних сумм Дарбу-Лебега (Дарбу-Римана):

$$(L)(R)\underline{I}_E f = \sup_P L(P,f);$$

$$(L)(R)\overline{I}_E(f) = \inf_P U(P,f),$$

где супремум и инфимум берутся соответственно по всем разбиениям множества E на измеримые по Лебегу (Жордану) подмножества.

Если $(L)(R)\underline{I}_E f = (L)(R)\overline{I}_E(f)$, то функция f называется интегрируемой по Лебегу (Риману) на E. Общее значение верхнего и нижнего интегралов называется интегралом Лебега (Римана) от функции f по множеству E. Мы будем в этой главе использовать обозначения $\int_E f(x)dx$ для интеграла Римана и $\int_E f(x)d\mu(x)$ для интеграла Лебега.

Аналогично критерию интегрируемости по Риману на отрезке доказывается, что функция f интегрируема по Лебегу (Риману) на E тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение P множества E на измеримые по Лебегу (Жордану) множества, что $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$.

Непосредственно из определения также видно, что каждая функция, интегрируемая по Риману на измеримом по Жордану множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, интегрируема по Лебегу на E, причем интегралы Римана и Лебега совпадают.

Как известно, интеграл Римана по отрезку можно определить (эквивалентным образом) как предел интегральных сумм, когда диаметр соответствующих разбиений стремится к нулю.

Для интеграла Лебега (Римана) по множеству $E \subset \mathbb{R}^n$ также имеется соответствующее понятие интегральных сумм, вводимых как $S(P, f, \{t_k\}) = \sum_{k=1}^{K} f(t_k)\mu_{(J)}(E_k)$, где $\{t_k\}$ – заданный набор точек $t_k \in E_k, k = 1, \ldots, K$. При этом здесь и в дальнейшем будем считать, что для $E_k = \emptyset$ соответствующее слагаемое в интегральной сумме равно нулю.

Особое значение в теории интеграла Лебега приобретают интегральные суммы для разбиений Лебега.

Определение 1. *Пусть* $f : E \to \mathbb{R}$ *– ограниченная измеримая на измеримом по Лебегу множестве* $E \subset \mathbb{R}^n$ *конечной меры функция. Если* $M = \sup_{x\in E} f(x)$, $m = \inf_{x\in E} f(x)$, *то разбиением Лебега, отвечающим разбиению* $Q = \{m = y_0 < y_1 < \ldots < y_q = M\}$, *называется разбиение* $P : E = \sqcup_{j=1}^{q-1}\{x \in E : f(x) \in [y_{j-1}, y_j)\} \bigcup \{x \in E : f(x) \in [y_{q-1}, y_q]\}$.

Из определения немедленно следует, что для разбиения Лебега P, отвечающему разбиению $Q = \{m = y_0 < y_1 < \ldots < y_q = M\}$, справедливо неравенство $U(P, f) - L(P, f) \leq \Delta(Q)\mu(E)$, где $\Delta(Q)$ – диаметр разбиения Q, т.е. $\Delta(Q) = \max_{1\leq j\leq q}(y_j - y_{j-1})$.

Теорема 1. *(Основная теорема об интеграле Лебега от ограниченных функций). Любая ограниченная измеримая на измеримом множестве* $E \subset \mathbb{R}^n$ *конечной меры функция* f *интегрируема по Лебегу на* E*, причем ее интеграл равен пределу интегральных сумм с разбиениями Лебега, отвечающими разбиениям* Q*, при стремя-*

щемся к нулю диаметре последнего, т.е.

$$\int_E f(x)d\mu(x) = \lim_{\Delta(Q)\to\infty} S(P, f, \{t_k\}),$$

где, подобно интегралу Римана по отрезку, последнее равенство означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что для разбиения Лебега $P : E = \sqcup_{k=1}^K E_k$, отвечающего произвольному разбиению Q с $\Delta(Q) < \delta$, и для всякого набора точек $t_k \in E_k, k = 1, \dots, K$, справедливо неравенство $|\int_E f(x)d\mu(x) - S(P, f, \{t_k\})| < \varepsilon$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что для множеств E меры нуль утверждение очевидно, так как все суммы (верхние, нижние, интегральные) в этом случае равны нулю.

Таким образом, будем считать $\mu(E) > 0$. Для доказательства достаточно проверить наличие предела интегральных сумм с разбиениями Лебега. В самом деле, выбрав $\delta = \varepsilon/\mu(E)$, будем иметь для разбиения Лебега $P : E = \sqcup_{k=1}^K E_k$, отвечающего произвольному разбиению Q с $\Delta(Q) < \delta$, и для всякого набора точек $t_k \in E_k, k = 1, \dots, K$ неравенства $L(P, f) \le S(P, f, \{t_k\}) \le U(P, f)$, $U(P, f) - L(P, f) \le \Delta(Q)\mu(E) < \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ из последнего неравенства следует интегрируемость функции f на E, что вместе с предпоследним неравенством завершает доказательство. ■

В качестве примера использования этой теоремы установим, что интеграл Лебега от функции Дирихле по любому отрезку $[a, b]$ равен нулю (в то же время эта функция не интегрируема по Риману ни на каком отрезке). В самом деле, для функции Дирихле $m = 0, M = 1$, и для любого разбиения $Q = \{m = y_0 < y_1 < \ldots < y_q = M\}$, соответствующая интегральная сумма равна $S(P, f, \{t_k\}) = f(t_q)\mu(E_q) = 0$, поскольку $E_q = f^{-1}([y_{q-1}, y_q]) = \mathbb{Q} \cap [a, b]$, как только $\Delta(Q) < 1$.

Перейдем к построению интеграла Лебега от неотрицательной неограниченной функции. Здесь интеграл Римана можно рассматривать лишь в несобственном смысле, поэтому измеримость понимаются в смысле Лебега.

В качестве разбиений множества $E \subset \mathbb{R}^n$ конечной меры теперь будут фигурировать разбиения на не более чем счетное число непересекающихся измеримых множеств: $E = \sqcup_{k=1}^\infty E_k$. Кроме того, поскольку теперь не исключен вариант $M_k = +\infty$, положим в этом случае $M_k\mu(E_k) = 0$, если $\mu(E_k) = 0$. Следуя той же логике, будем допускать и бесконечные значения функции в некоторых точках, условившись все такие точки помещать во множество E_0, т.е. $E_0 = \{x \in E : f(x) = +\infty\}$, считая $m_0\mu(E_0) = 0$ при $\mu(E_0) = 0$.

Таким образом, соответствующие верхние и нижние суммы Дарбу-Лебега определяются как $U(P, f) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k\mu(E_k)$; $L(P, f) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k\mu(E_k)$. Аналогично предыдущему определим теперь (возможно равные ∞) верхний и нижний интегралы Лебега как

$$(L)\underline{I}_E f = \sup_P L(P, f); (L)\overline{I}_E(f) = \inf_P U(P, f),$$

где супремум и инфимум берутся теперь по всем разбиениям множества E на счетное число измеримых подмножеств.

Также, как и для ограниченных функций, если $(L)\underline{I}_E f = (L)\overline{I}_E(f)$, то функция f называется интегрируемой по Лебегу на E. Общее значение верхнего и нижнего интегралов называется интегралом Лебега от функции f по множеству E, для которого мы сохраним прежнее обозначение $\int_E f(x)d\mu(x)$.

Наиболее интересен, конечно, случай, когда $\int_E f(x)d\mu(x) \neq \infty$. В этом случае функция f называется суммируемой на E. Это определение, естественно, распространяется и на ограниченные измеримые функции на E.

Тогда функция f суммируема на E тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение P множества E, что $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$. В частности, если функция f суммируема на E, то она конечна почти всюду на E, $\mu(E_0) = 0$.

Аналогичным образом меняется и определение разбиения Лебега. Теперь оно соответствует разбиению $Q = \{0 = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots\} : P : E = E_0 \cup \sqcup_{j=1}^{\infty}\{x \in E : f(x) \in [y_{j-1}, y_j)\}$. Диаметр разбиения Q теперь определяется как $\Delta(Q) = \sup_{j\in\mathbb{N}}(y_j - y_{j-1}) \leq +\infty$.

Из определения немедленно следует, что для разбиения Лебега P, отвечающему разбиению Q, справедливо неравенство $U(P, f) - L(P, f) \leq \Delta(Q)\mu(E)$.

Теорема 2. *(Основная теорема об интеграле Лебега от неотрицательных измеримых функций). Любая неотрицательная измеримая на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ конечной меры функция f интегрируема по Лебегу на E, причем ее интеграл равен пределу интегральных сумм с разбиениями Лебега, отвечающими разбиениям $Q = \{0 = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots\}$, при стремящемся к нулю диаметре последнего. При конечном значении интеграла понятие предела такого вида – то же, что и в предыдущей основной теореме, если же интеграл бесконечен, то требуется, чтобы что для любого $\varepsilon > 0$ нашлось $\delta > 0$, такое, что для разбиения*

Лебега $P : E = \sqcup_{k=0}^{\infty} E_k$, отвечающего произвольному разбиению Q с $\Delta(Q) < \delta$, и для всякого набора точек $t_k \in E_k, k = 1, 2, \ldots$, было справедливо неравенство $S(P, f, \{t_k\}) \geq \varepsilon$.

Доказательство по сути повторяет доказательство основной теоремы об интеграле Лебега для ограниченных функций с естественным добавлением рассмотрения случая бесконечного интеграла (тогда появляющиеся ряды могут расходиться к бесконечности) и случая, когда функция равна бесконечности на множестве нулевой меры (во всех суммах нужно будет выделять нулевое слагаемое, соответствующее нулевому индексу).

Для определения интеграла Лебега от функций любого знака введем понятие положительной $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ и отрицательной $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$ частей функции f. Заметим, что для измеримой функции f обе эти функции измеримы в силу непрерывности функции $\max(t, 0)$. Кроме того, можно допускать и бесконечные значения $\pm\infty$ функции f, принимаемые ею на измеримых множествах.

Определение 2. *Назовем измеримую на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ конечной меры функцию f интегрируемой по Лебегу на E, если хотя бы один из интегралов Лебега $\int_E f^+(x) d\mu(x)$, $\int_E f^-(x) d\mu(x)$ конечен. При этом $\int_E f(x) d\mu(x) = \int_E f^+(x) d\mu(x) - \int_E f^-(x) d\mu(x)$ с естественным пониманием арифметических операций с символами $\pm\infty$. Если все эти интегралы конечны, то функция f называется суммируемой на E.*

§2. Основные свойства интеграла Лебега.

Теорема 3. *(Линейность и монотонность интеграла Лебега). 1.Если функции f_1, f_2 суммируемы на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ конечной меры, то для любых действительных чисел c_1, c_2 функция $c_1 f_1 + c_2 f_2$ суммируема на E и $\int_E c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) d\mu(x) = c_1 \int_E f_1(x) d\mu(x) + c_2 \int_E f_2(x) d\mu(x)$.*

2.Если функции f_1, f_2 суммируемы на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ конечной меры и $f_1(x) \leq f_2(x)$ при всех $x \in E$, то $\int_E f_1(x) d\mu(x) \leq \int_E f_2(x) d\mu(x)$.

Доказательство. Для случая ограниченных измеримых функций f_1, f_2 доказательство линейности проводится по той же схеме, что и доказательство линейности интеграла Римана по отрезку. При $c_1 = c_2 = 1$ замечаем, что для любого разбиения $P : E = \sqcup_{k=1}^{K} E_k$ справедливо неравенство

$$L(P, f_1) + L(P, f_2) \leq L(P, f_1 + f_2) \leq U(P, f_1 + f_2) \leq U(P, f_1) + U(P, f_2).$$

Переходя здесь к точным верхним и нижним граням по всевозможным разбиениям, получим требуемое.

Аналогично при $c > 0$ имеем для любого разбиения $P : E = \sqcup_{k=1}^{K} E_k$ и любой ограниченной измеримой на E функции f $cL(P, f) = L(P, cf)$, $cU(P, f) = U(P, cf)$, откуда следует равенство $\int_E (cf(x))d\mu(x) = c\int_E f(x)d\mu(x)$. Для функции - f имеем $L(P, -f) = -U(P, f), U(P, -f) = -L(P, f)$, откуда получаем $\int_E (cf(x))d\mu(x) = c\int_E f(x)d\mu(x)$ для любых действительных c, завершая доказательство линейности для случая ограниченных измеримых функций f_1, f_2.

По сути то же доказательство проходит и для неотрицательных измеримых функций f_1, f_2 и неотрицательных действительных чисел c_1, c_2, с тем дополнением, что суммируемость функций f_1, f_2 гарантирует, что множества $E_0^{(i)} = \{x \in E : f_i(x) = +\infty\}, i = 1, 2$, имеют нулевую меру Лебега, поэтому измельчения разбиений $E = \sqcup_{k=0}^{\infty} E_k$ с $E_0 = E_0^{(1)} \cup E_0^{(2)}$ исключают появление бесконечных слагаемых в нижних и верхних суммах Дарбу-Лебега, а все равенства и неравенства из вышеприведенной части доказательства сохраняются с допущением бесконечных значений некоторых верхних сумм Дарбу-Лебега.

Для функций любого знака заметим, что равенства $f_1+f_2 = (f_1+f_2)^+ - (f_1+f_2)^-$, $f_1 = f_1^+ - f_1^-$, $f_2 = f_2^+ - f_2^-$ дают равенство неотрицательных суммируемых функций $(f_1 + f_2)^+ + f_1^- + f_2^-$ и $(f_1 + f_2)^- + f_1^+ + f_2^+$, откуда, применяя уже доказанную часть и определение интеграла Лебега от функций любого знака, получим равенство $\int_E (f_1(x) + f_2(x))d\mu(x) = \int_E f_1(x)d\mu(x) + \int_E f_2(x)d\mu(x)$. Аналогично проверяется линейность для $c_1 = -c_2 = 1$. Для завершения доказательства линейности интеграла Лебега осталось заметить, что при $c > 0$ справедливы тождества $(cf)^+ = cf^+$, $(cf)^- = cf^-$ для любой суммируемой на E функции f.

Для доказательства монотонности интеграла с учетом уже доказанной линейности достаточно рассмотреть случай $f_2(x) = 0$ при всех $x \in E$, который очевидным образом следует из неотрицательности всех нижних и верхних сумм Дарбу-Лебега неотрицательных функций. ∎

В дальнейшем будет удобно использовать возможность другого определения интеграла Лебега от неотрицательных измеримых функций, использующего понятие срезки неотрицательной функции $f_{[N]}(x) = \min(f(x), N)$.

Теорема 4. *(Интеграл Лебега как предел последовательности интегралов от срезок). Для любой неотрицательной измеримой на измеримом множестве*

$E \subset \mathbb{R}^n$ конечной меры функции f справедливо равенство $\int_E f(x)d\mu(x) = \lim_{N\to\infty}\int_E f_{[N]}(x)d\mu(x)$.

Доказательство. Из очевидного неравенства $f_{[N]}(x) \le f_{[N+1]}(x)$ при всех $x \in E$ и свойства монотонности интеграла следует монотонность последовательности интегралов от срезок $\{\int_E f_{[N]}(x)d\mu(x)\}$. Таким образом, существование (конечного или бесконечного) предела $i = \lim_{N\to\infty}\int_E f_{[N]}(x)d\mu(x)$ установлено, и осталось проверить равенство этого предела интегралу $\int_E f(x)d\mu(x)$.

Из неравенства $f_{[N]}(x) \le f(x)$ при всех $x \in E$ и свойства монотонности интеграла следует неравенство $i \le \int_E f(x)d\mu(x)$.

Доказательство противоположного неравенства проведем от противного. Предположим, что для некоторой неотрицательной измеримой на E функции f справедливо строгое неравенство $i < \int_E f(x)d\mu(x)$. В частности, это означает, что предел $i = \lim_{N\to\infty}\int_E f_{[N]}(x)d\mu(x)$ конечен. Из определения интеграла Лебега от неотрицательной измеримой функции следует существование разбиения $P : E = \sqcup_{k=0}^{\infty}E_k$ такого, что $L(P, f) > i$. При этом $E_0 = \{x \in E : f(x) = +\infty\}$, и если $\mu(E_0) > 0$, то для разбиения $P_1 : E = E_0 \cup (E \setminus E_0)$ справедливо неравенство $\int_E f_{[N]}(x)d\mu(x) \ge L(P_1, f_{[N]}) \ge N\mu(E_0)$, откуда $i = +\infty$, что противоречит сделанному предположению. Таким образом, $\mu(E_0) = 0$, значит, $m_k < +\infty, k = 1, 2, \ldots$. Тогда сумму Дарбу-Лебега $L(P, f)$ можно рассматривать как (конечную или бесконечную) сумму ряда $L(P, f) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k\mu(E_k)$ с конечными слагаемыми. Следовательно, найдется натуральное число K такое, что $\sum_{k=1}^{K} m_k\mu(E_k) > i$. Выберем натуральное число $N > \max(m_1, \ldots, m_K)$. Из определения срезки получим $m_k^{[N]} = m_k, k = 1, 2, \ldots, K$, где $m_k^{[N]} = \inf_{x\in E_k} f_{[N]}(x)$, откуда для разбиения $P_2 : E = \sqcup_{k=0}^{K}E_k \cup (E \setminus \sqcup_{k=0}^{K}E_k)$ имеем

$$\int_E f_{[N]}(x)d\mu(x) \ge L(P_2, f_{[N]}) \ge \sum_{k=1}^{K} m_k^{[N]}\mu(E_k) = \sum_{k=1}^{K} m_k\mu(E_k) > i.$$

Полученное неравенство противоречит монотонности последовательности интегралов от срезок $\{\int_E f_{[N]}(x)d\mu(x)\}$. ■

Лемма 1. *(Признак суммируемости).*

Если f суммируема на измеримом множестве E конечной меры, а измеримая на E функция F удовлетворяет при всех $x \in E$ неравенству $|F(x)| \le f(x)$, то F суммируема на E.

Доказательство. Прежде всего заметим, что из определения интеграла Лебега для функций любого знака следует, что функция f суммируема тогда и только тогда, когда суммируем $|f|$, (достаточно учесть, что $|f| = f^+ + f^-$).

Теперь утверждение следует из того, что суммируемость функции f влечет существование такого разбиения $P : E = \sqcup_{k=0}^{\infty} E_k$, что $U(P, f) < +\infty$, и из неравенств $\int_E |F(x)| d\mu(x) \le U(P, |F|) \le U(P, f)$.

■

Теорема 5. *(Основные свойства интеграла Лебега).*

1.(Интегрирование постоянной). Постоянная функция $f(x) \equiv c$ суммируема на любом измеримом множестве E конечной меры, причем $\int_E c d\mu(x) = c\mu(E)$.

2.(Полная или σ-аддитивность). Если f суммируема на измеримом множестве E конечной меры, представленном в виде счетного объединения непересекающихся измеримых множеств $E = \sqcup_{k=1}^{\infty} E_k$,то f суммируема на каждом из $E_k, k = 1, 2, \ldots,$ и

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x) d\mu(x). \tag{1}$$

Обратно, если измеримое множество E конечной меры представлено в виде счетного объединения непересекающихся измеримых множеств $E = \sqcup_{k=1}^{\infty} E_k$, функция f суммируема на каждом из $E_k, k = 1, 2, \ldots,$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f(x)| d\mu(x)$ сходится, то f суммируема на E и справедливо (1).

3.(Абсолютная непрерывность интеграла Лебега). Если f суммируема на измеримом множестве E конечной меры, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого измеримого множества $e \subset E$ с $\mu(e) < \delta$ справедливо неравенство

$$\left| \int_e f(x) d\mu(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Первое утверждение немедленно следует из того, что $L(P, c) = U(P, c) = c\mu(E)$ для любого разбиения $P : E = \sqcup_{k=1}^{K} E_k$.

Доказательство второго утверждения проведем в несколько шагов. Сначала докажем конечную аддитивность для ограниченных измеримых функций. Достаточно проделать это для двух множеств. Пусть $E = E_1 \sqcup E_2$ – представление множества E в виде объединения двух непересекающихся измеримых множеств. Рассмотрим разбиения Лебега P_1, P_2 множеств E_1, E_2, отвечающие разбиению $Q = \{\inf_{x \in E} f(x) =$

$y_0 < y_1 < \ldots < y_K = \sup_{x \in E} f(x)$. По основной теореме об интеграле Лебега от ограниченных измеримых функций при стремлении к нулю диаметра разбиения Q соответствующие интегральные суммы $S(P_j, f, \{t_k^{(j)}\})$ стремятся к $\int_{E_j} f(x) d\mu(x), j = 1, 2$. Переходя в определении этих пределов к точным верхним и нижним граням по $\{t_k^{(j)}\}$, получим, что соответствующие нижние и верхние суммы Дарбу-Лебега имеют те же пределы, т.е.

$$\lim_{\Delta(Q)\to 0} L(P_j, f) = \lim_{\Delta(Q)\to 0} U(P_j, f) = \int_{E_j} f(x) d\mu(x), j = 1, 2.$$

Аналогичные равенства справедливы и для разбиений Лебега множества E, отвечающим тем же разбиениям Q , т.е. $\lim_{\Delta(Q)\to 0} L(P, f) = \lim_{\Delta(Q)\to 0} U(P, f) = \int_E f(x) d\mu(x)$. Теперь такой же переход к пределу в неравенствах $L(P, f) \leq L(P_1, f) + L(P_2, f) \leq U(P_1, f) + U(P_2, f) \leq U(P, f)$ завершает доказательство конечной аддитивности.

Теперь, применяя доказанную часть конечной аддитивности к срезкам произвольной неотрицательной функции f для представления $E = E^{(1)} \cup (E \setminus E^{(1)})$, получим неравенство $\int_{E^{(1)}} f_{[N]}(x) d\mu(x) \leq \int_E f_{[N]}(x) d\mu(x)$. Переход в этом неравенстве к пределу при $N \to \infty$ и признак суммируемости доказывают следующую лемму для неотрицательной функции f, а, значит, и для функций f любого знака.

Лемма 2. *(Суммируемость на подмножествах).*

Если f суммируема на измеримом множестве E конечной меры, то она суммируема и на любом измеримом подмножестве $E^{(1)} \subset E$.

Перейдем к доказательству полной аддитивности для ограниченных функций. Пусть f ограничена и измерима на измеримом множестве E конечной меры, представленном в виде счетного объединения непересекающихся измеримых множеств $E = \sqcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Из σ-аддитивности меры Лебега следует равенство $\mu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$. В частности, последний ряд сходится, значит для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное K такое, что $\sum_{k=K+1}^{\infty} \mu(E_k) < \varepsilon$. Обозначим через R_K измеримое множество $R_K = \sqcup_{k=K+1}^{\infty} E_k$, тогда $E = R_K \cup \bigsqcup_{k=1}^{K} E_k$ и $\mu(R_K) < \varepsilon$. Из уже доказанной конечной аддитивности $\int_E f(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^{K} \int_{E_k} f(x) d\mu(x) + \int_{R_K} f(x) d\mu(x)$. Если $|f(x)| \leq M$ при всех $x \in E$, то в силу монотонности интеграла Лебега

$$\left| \int_{R_K} f(x) d\mu(x) \right| \leq \int_{R_K} |f(x)| d\mu(x) \leq M\varepsilon,$$

и произвольность $\varepsilon > 0$ завершает доказательство полной аддитивности для ограниченных функций.

Пусть теперь f – неотрицательная суммируемая на измеримом множестве E конечной меры функция. Конечная аддитивность в этом случае следует из справедливости свойства конечной аддитивности для любой срезки $f_{[N]}$ и перехода к пределу при $N \to \infty$. Аналогично, как и в случае σ-аддитивности для ограниченных функций, $\int_E f_{[N]}(x)d\mu(x) = \sum_{k=1}^{K} \int_{E_k} f_{[N]}(x)d\mu(x) + \int_{R_K} f_{[N]}(x)d\mu(x)$. Отсюда с учетом неотрицательности f получаем при всех N неравенство $\sum_{k=1}^{K} \int_{E_k} f_{[N]}(x)d\mu(x) \leq \int_E f_{[N]}(x)d\mu(x)$. Перейдя в последнем неравенстве к пределу при $N \to \infty$, имеем $\sum_{k=1}^{K} \int_{E_k} f(x)d\mu(x) \leq \int_E f(x)d\mu(x)$. Так как K может быть сколь угодно большим, отсюда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)d\mu(x) \leq \int_E f(x)d\mu(x). \tag{2}$$

С другой стороны, запишем доказанное свойство σ-аддитивности для любой срезки $f_{[N]}$:

$$\int_E f_{[N]}(x)d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f_{[N]}(x)d\mu(x).$$

Монотонность интеграла Лебега влечет неравенство $\int_E f_{[N]}(x)d\mu(x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)d\mu(x)$ (сходимость ряда в его правой части при этом следует из (2)). Перейдя в полученном неравенстве к пределу при $N \to \infty$, завершаем доказательство полной аддитивности для неотрицательных функций. Заметим попутно, что это же неравенство позволяет установить обратное к полной аддитивности утверждение для неотрицательных функций.

Для завершения доказательства полной аддитивности осталось применить уже доказанную часть к положительной и отрицательной частям функции f и взять разность получившихся неравенств. Обратное утверждение получается из уже доказанного, если заметить, что $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f^{\pm}(x)d\mu(x) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} |f(x)|d\mu(x)$.

Докажем абсолютную непрерывность для ограниченных функций. Если $|f(x)| \leq M$, при всех $x \in E$, то

$$\left| \int_e f(x)d\mu(x) \right| \leq M\mu(e),$$

и в качестве $\delta > 0$ можно взять $\delta = \varepsilon/(M+1)$. Для неотрицательных функций выберем такое натуральное N, что $\int_E (f(x) - f_{[N]}(x))d\mu(x) \leq \varepsilon/2$. Тогда для любого множества $e \subset E$ $\int_e (f(x) - f_{[N]}(x))d\mu(x) \leq \varepsilon/2$, т.е. $\int_e f(x)d\mu(x) \leq \int_e f_{[N]}(x))d\mu(x) +$

$\varepsilon/2$ и в качестве $\delta > 0$ можно взять $\delta = \varepsilon/(2N)$. Для завершения доказательства осталось применить только что доказанную часть к положительной и отрицательной частям функции f: $\left|\int_e f(x)d\mu(x)\right| \leq \int_e |f(x)|d\mu(x) = \int_e f^+(x)d\mu(x) + \int_e f^-(x)d\mu(x)$. ■

Следствие 1. *1. Если $f(x) = g(x)$ почти всюду на измеримом множестве E конечной меры, то из суммируемости одной из функций f, g вытекает суммируемость другой и равенство их интегралов $\int_E f(x)d\mu(x) = \int_E g(x)d\mu(x)$.*

2. Если интеграл Лебега от неотрицательной измеримой на измеримом множестве E конечной меры функции f равен нулю, $\int_E f(x)d\mu(x) = 0$, то $f(x)$ равна нулю почти всюду на E.

Доказательство. Прежде всего заметим, что из определений интеграла Лебега немедленно следует, что всякая функция, заданная на множестве нулевой меры Лебега, суммируема на этом множестве и ее интеграл Лебега равен нулю.

Обозначим через e множество тех $x \in E$, для которых $f(x) \neq g(x)$. Тогда по свойству конечной аддитивности из суммируемости, скажем, функции f на E следует ее суммируемость на $E \setminus e$ и равенство $\int_E f(x)d\mu(x) = \int_{E\setminus e} f(x)d\mu(x)$. Так как $f(x) = g(x)$ на $E \setminus e$, то g суммируема на $E \setminus e$ и из предыдущего суммируема на e. Применение свойства конечной аддитивности к функции g завершает доказательство первого утверждения.

Для доказательства второго утверждения рассуждаем от противного. Тогда, заметив, что

$$\{x \in E : \, f(x) > 0\} = \lim_{m\to\infty} \left\{x \in E : \, f(x) > \frac{1}{m}\right\},$$

можно утверждать существование m_0 такого, что множество $B = \{x \in E : \, f(x) > \frac{1}{m_0}\}$ имеет положительную меру, следовательно, $\int_B f(x)d\mu(x) \geq \frac{\mu(B)}{m_0}$. Но по свойству конечной аддитивности

$$\int_E f(x)d\mu(x) = \int_B f(x)d\mu(x) + \int_{E\setminus B} f(x)d\mu(x) \geq \frac{\mu(B)}{m_0} > 0,$$

противоречие. ■

§3. Предельный переход в интегралах Лебега.

В этом параграфе мы сначала докажем классическую "триаду"теорем о предельном переходе (теорема Беппо Леви, лемма Фату, теорема Лебега) в предположении конечности меры множества интегрирования, а затем распространим построение интеграла Лебега на множества бесконечной меры.

Теорема 6. *(Теорема Лебега).*

Пусть последовательность измеримых на измеримом множестве E конечной меры функций f_m сходится почти всюду на E к функции f, причем при почти всех $x \in E$ и при всех натуральных m $|f_m(x)| \leq F(x)$, где F – суммируемая на E. Тогда

$$\int_E f(x)d\mu(x) = \lim_{m\to\infty} \int_E f_m(x)d\mu(x).$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что из условия теоремы следует, что при почти всех $x \in E$ справедливо неравенство $|f(x)| \leq F(x)$, откуда по признаку суммируемости получаем суммируемость всех функций f_m, f и, значит, их конечность почти всюду на E. Тогда по теореме о связи сходимости по мере со сходимостью почти всюду (Т.6 §1.5) для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{m\to\infty} \mu(E_m) = 0, \tag{3}$$

где $E_m = \{x \in E : |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon$, причем мы условимся в E_m включать и те значения $x \in E$, в которых какие-то из функций f_m, f принимают бесконечные значения.

Тогда

$$\left|\int_E (f(x) - f_m(x))\, d\mu(x)\right| = \left|\int_{E_m} (f(x) - f_m(x))\, d\mu(x) + \right.$$

$$\left. + \int_{E\setminus E_m} (f(x) - f_m(x))\, d\mu(x)\right| \leq \int_{E_m} (|f(x)| + |f_m(x)|)\, d\mu(x) + \varepsilon\mu(E\setminus E_m) \leq 2\int_{E_m} F(x)d\mu(x) + \varepsilon\mu(E).$$

Произвольность $\varepsilon > 0$, (3) и абсолютная непрерывность интеграла Лебега завершают доказательство. ∎

Теорема 7. *(Теорема Леви). Если последовательность неотрицательных измеримых на измеримом множестве E конечной меры функций $f_m(x)$ – неубывающая и сходится при почти всех $x \in E$ к функции $f(x)$, то*

$$\int_E f(x)d\mu(x) = \lim_{m\to\infty} \int_E f_m(x)d\mu(x).$$

Доказательство. Если $f(x)$ суммируема, то утверждение немедленно следует из теоремы Лебега. Таким образом, будем считать $\int_E f(x)d\mu(x) = \infty$. Функция $f(x)$ – неотрицательная измеримая, поэтому ее интеграл Лебега равен пределу последовательности интегралов от срезок, т.е. $\lim_{N\to\infty} \int_E f_{[N]}(x)d\mu(x) = +\infty$. По определению бесконечного предела это означает, что для любого положительного K найдется N_0 такое, что $\int_E f_{[N]}(x)d\mu(x) > K$ при всех $N > N_0$. Фиксируем такое N. Функция $F(x) = N$ суммируема на E, следовательно, последовательность срезок $\{f_{m,[N]}\}_{m=1}^{\infty}$ функций $f_m(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лебега. Тогда найдется m_0 такое, что при всех $m > m_0$ выполняется неравенство $\int_E f_{m,[N]}(x)d\mu(x) > K$. Но тогда $\int_E f_m(x)d\mu(x) \geq \int_E f_{m,[N]}(x)d\mu(x) > K$. ■

Теорема 8. *(Теорема Фату). Если последовательность неотрицательных суммируемых на измеримом множестве E конечной меры функций $f_m(x)$ сходится при почти всех $x \in E$ к функции $f(x)$, то*

$$\int_E f(x)d\mu(x) \leq \underline{\lim}_{m\to\infty} \int_E f_m(x)d\mu(x).$$

Доказательство. Положим $g_m(x) = \inf_{k\geq m} f_k(x)$. Тогда последовательность функций g_m удовлетворяет условиям теоремы Леви, причем

$$\lim_{m\to\infty} g_m(x) = \lim_{m\to\infty} \inf_{k\geq m} f_k(x) = \underline{\lim}_{m\to\infty} f_m(x) = f(x),$$

следовательно,

$$\int_E f(x)d\mu(x) = \lim_{m\to\infty} \int_E g_m(x)d\mu(x).$$

Так как $\int_E g_m(x)d\mu(x) \leq \inf_{k\geq m} \int_E f_k(x)d\mu(x)$, то $\int_E f(x)d\mu(x) \leq \underline{\lim}_{m\to\infty} \int_E f_m(x)d\mu(x)$, что и требовалось доказать.

■

Перейдем к определению интеграла Лебега по множеству бесконечной меры. Начнем с неотрицательных функций.

Определение 3. *Пусть f – неотрицательная измеримая на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ бесконечной меры. Назовем интегралом Лебега $\int_E f(x)d\mu(x)$ предел последовательности интегралов*

$$\int_E f(x)d\mu(x) = \lim_{m\to\infty} \int_{E_m} f(x)d\mu(x),$$

где $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ – некоторая последовательность измеримых множеств конечной меры такая, что $\lim_{m\to\infty} E_m = E$.

Теорема 9. *(Корректность определения интеграла Лебега по множеству бесконечной меры).*

Указанный в определении предел существует и не зависит от выбора последовательности измеримых множеств $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ такой, что $\lim_{m\to\infty} E_m = E$.

Доказательство. Из неотрицательности функции f и аддитивности интеграла следует, что последовательность интегралов $\{\int_{E_m} f(x)d\mu(x)\}$ – неубывающая:

$$\int_{E_{m+1}} f(x)d\mu(x) = \int_{E_m} f(x)d\mu(x) + \int_{E_{m+1}\setminus E_m} f(x)d\mu(x) \geq \int_{E_m} f(x)d\mu(x).$$

Таким образом, предел последовательности интегралов $\lim_{m\to\infty} \int_{E_m} f(x)d\mu(x)$ (конечный или бесконечный) существует. Осталось доказать, что он не зависит от выбора последовательности измеримых множеств $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ такой, что $\lim_{m\to\infty} E_m = E$.

От противного, предположим, что есть еще одна последовательность измеримых множеств $E'_1 \subset E'_2 \subset \ldots$ такая, что $\lim_{m\to\infty} E'_m = E$ и

$$\lim_{m\to\infty} \int_{E_m} f(x)d\mu(x) = a > b = \lim_{m\to\infty} \int_{E'_m} f(x)d\mu(x).$$

Выберем какое-нибудь $c, a > c > b$. Пусть сначала $a < +\infty$. Найдется достаточно большое k такое, что $c < \int_{E_k} f(x)d\mu(x) < +\infty$. Так как $E_k = \lim_{m\to\infty} E_k \cap E'_m$, то $\lim_{m\to\infty} \mu(E_k \setminus E_k \cap E'_m) = 0$, и из суммируемости функции f на E_k по свойству абсолютной непрерывности интеграла Лебега $\lim_{m\to\infty} \int_{E_k\setminus E_k\cap E'_m} f(x)d\mu(x) = 0$. Но тогда найдется m_0 такое, что при всех $m > m_0$ выполняется неравенство

$$\int_{E_k\cap E'_m} f(x)d\mu(x) > c.$$

Отсюда тем более $\int_{E'_m} f(x)d\mu(x) > c$, что противоречит равенству $b = \lim_{m\to\infty} \int_{E'_m} f(x)d\mu(x)$.

Если $a = +\infty$, то найдется достаточно большое k такое, что $c + 1 < \int_{E_k} f(x)d\mu(x)$. Тогда для достаточно большого N $c < \int_{E_k} f_{[N]}(x)d\mu(x)$. Повторяя вышеприведенные рассуждения со срезкой $f_{[N]}$ вместо f, придем к неравенству $\int_{E'_m} f_{[N]}(x)d\mu(x) > c$, из которого вновь придем к противоречию с помощью $\int_{E'_m} f(x)d\mu(x) \geq \int_{E'_m} f_{[N]}(x)d\mu(x) > c$.

■

Также, как и в §1, назовем неотрицательную интегрируемую по Лебегу на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ бесконечной меры суммируемой, если ее интеграл $\int_E f(x)d\mu(x)$ конечен. Для функций любого знака скажем, что f интегрируема по Лебегу на E, если хотя бы один из интегралов Лебега $\int_E f^+(x)d\mu(x)$, $\int_E f^-(x)d\mu(x)$ конечен. При этом $\int_E f(x)d\mu(x) = \int_E f^+(x)d\mu(x) - \int_E f^-(x)d\mu(x)$ с естественным пониманием арифметических операций с символами $\pm\infty$. Если все эти интегралы конечны, то функция f называется суммируемой на E.

Отметим, что все свойства интеграла Лебега, доказанные в §2 и в начале этого параграфа (кроме, естественно, суммируемости постоянной функции) остаются справедливыми и в том случае, если из их формулировок убрать ограничение на конечность меры множества $E \subset \mathbb{R}^n$.

Доказательства этих свойств по большей части проводятся путем непосредственного применения определения интеграла Лебега сначала от неотрицательной функции по множеству бесконечной меры с последующим использованием положительной и отрицательной частей функции произвольного знака.

Приведем доказательства свойств σ-аддитивности и абсолютной напрерывности для неотрицательных функций. Для первого потребуется вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *Если неотрицательные числа a_k являются пределами неубывающих последовательностей неотрицательных чисел $a_k^{(s)}$, $a_k = \lim_{s\to\infty} a_k^{(s)}$, $k = 1, 2, \ldots$, то*

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(s)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

где не исключаются бесконечные значения сумм.

Доказательство. Обозначим $a = \lim_{s\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(s)}$, $c = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Будем доказывать равенство $a = c$ от противного.

Предположим, что $a > c$. Тогда для достаточно большого s_0 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(s_0)} > c$. Фиксируем такое s_0. Тогда найдется m такое, что $\sum_{k=1}^{m} a_k^{(s_0)} > c$. Поскольку последовательности $a_k^{(s)}$ – неубывающие, отсюда получаем, что $\sum_{k=1}^{m} a_k^{(s)} > c$ при всех $s \geq s_0$. Переходя в полученном неравенстве к пределу при $s \to \infty$, придем, с учетом того, что последовательность $\{\sum_{k=1}^{m} a_k^{(s)}\}_{s=s_0}^{\infty}$ – неубывающая, к неравенству $\sum_{k=1}^{m} a_k > c$, которое противоречит неотрицательности чисел a_k.

Пусть теперь $a < c$. Тогда числа $a^{(s)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(s)}$ образуют неубывающую последовательность. Но из предположения $a < c$ немедленно следует, что для достаточно большого m $\sum_{k=1}^{m} a_k > a$, откуда для достаточно больших s $\sum_{k=1}^{m} a_k^{(s)} > a$, что влечет неравенство $a^{(s)} > a$, противоречащее монотонности последовательности $\{a^{(s)}\}$.

■

Докажем теперь свойство σ-аддитивности интеграла Лебега для неотрицательных функций. Если $E = \sqcup_{k=1}^{\infty} E_k$, и $E^{(1)} \subset E^{(2)} \subset \dots$ – некоторая последовательность измеримых множеств конечной меры такая, что $\lim_{s\to\infty} E^{(s)} = E$ то обозначим $a_k^{(s)} = \int_{E_k \cap E^{(s)}} f(x) d\mu(x)$, $a_k = \int_{E_k} f(x) d\mu(x)$. Нетрудно видеть, что последовательности a_k, $a_k^{(s)}$, удовлетворяют условиям только что доказанной леммы, и требуемое свойство является ее немедленным следствием.

Точно так же, выбрав некоторую последовательность $E^{(1)} \subset E^{(2)} \subset \dots$ измеримых множеств конечной меры такую, что $\lim_{s\to\infty} E^{(s)} = E$, можно для любого $\varepsilon > 0$ найти такое s, что

$$\int_{E \setminus E^{(s)}} f(x) d\mu(x) < \varepsilon/2.$$

Теперь для любого измеримого по Лебегу множества $e \subset E$ по свойству аддитивности

$$\int_e f(x) d\mu(x) = \int_{e \cap E^{(s)}} f(x) d\mu(x) + \int_{e \cap (E \setminus E^{(s)}} f(x) d\mu(x).$$

Применяя свойство абсолютной непрерывности для множества $E^{(s)}$ конечной меры, найдем такое $\delta > 0$, что для любого измеримого множества $e \subset E$ с $\mu(e) < \delta$ справедливо неравенство $\int_{e \cap E^{(s)}} f(x) d\mu(x) < \varepsilon/2$, что вместе с неравенством

$$\int_{e \cap (E \setminus E^{(s)}} f(x) d\mu(x) \le \int_{E \setminus E^{(s)}} f(x) d\mu(x) < \varepsilon/2$$

доказывает требуемое.

§4. Вычисление кратных интегралов.

В этом параграфе будут доказаны два утверждения, на которых основаны основные методы вычисления кратных интегралов – теоремы Фубини (о сведении кратных интегралов к повторным) и о замене переменных. Кроме того, доказываемый здесь же критерий Лебега интегрируемости по Риману позволяет не делать различия между интегралами Римана и Лебега в большинстве задач на вычисление кратных интегралов.

Начнем с определения сечений множеств. Представим точки пространства $\mathbb{R}^n$ как (x, y), где $x \in \mathbb{R}^m = X, y \in \mathbb{R}^k = Y, m + k = n$. В большинстве практических задач $n = 2, m = k = 1$; или $n = 3, m = 1, k = 2$; или $n = 3, m = 2, k = 1$.

Определение 4. *Сечениями множества* $A \subset \mathbb{R}^n$ *называются множества*

$$A_Y(x) = \{y \in Y : (x,y) \in A\},$$

$$A_X(y) = \{x \in X : (x,y) \in A\}.$$

Для различия мер Лебега в пространствах различной размерности условимся обозначать меру Лебега в пространствах $\mathbb{R}^n, X, Y$, соответственно через μ, μ_X, μ_Y и опускать переменную интегрирования после знака меры.

Теорема 10. *(Вычисление меры с помощью кратных интегралов).*

Сечения $A_Y(x)$ *измеримого по Лебегу множества* $A \subset \mathbb{R}^n$ *при почти всех (в смысле меры* μ_X*)* $x \in X$ *измеримы по Лебегу, причем*

$$\mu(A) = \int_X \mu_Y(A_Y(x))d\mu_X. \tag{4}$$

Сечения $A_X(y)$ *измеримого по Лебегу множества* $A \subset \mathbb{R}^n$ *при почти всех (в смысле меры* μ_Y*)* $y \in Y$ *измеримы по Лебегу, причем*

$$\mu(A) = \int_Y \mu_X(A_X(y))d\mu_Y.$$

Доказательство. Будем доказывать только равенство (4).

Пусть сначала A – брус $A = \prod_{i=1}^n \langle a_i, b_i\rangle$. Тогда при $x \in \prod_{i=1}^m \langle a_i, b_i\rangle$ $A_Y(x) = \prod_{i=m+1}^n \langle a_i, b_i\rangle$, а при $x \notin \prod_{i=1}^m \langle a_i, b_i\rangle$ $A_Y(x) = \emptyset$. Отсюда $\mu_Y(A_Y(x)) = \chi_{\prod_{i=1}^m \langle a_i, b_i\rangle}(x)$, что немедленно влечет (4).

Пусть теперь A – элементарное множество. Поскольку меры Лебега граней брусьев (в одной размерности) равны нулю, а значения функций на множестве нулевой меры Лебега не оказывают влияния на значение интеграла Лебега этой функции, можно считать, что $A = \cup_{k=1}^N Q_k$, где брусья $Q_k = \prod_{i=1}^n [a_i^{(k)}, b_i^{(k)}]$ имеют непересекающиеся внутренности: int $Q_k \cap$ int $Q_j = \emptyset$ при $k \neq j$. Для доказательства (4) нужно представить A в виде

$$A = \cup_{j=1}^M P_j \times Q_j^Y, \tag{5}$$

где P_j – брусья в X, а Q_j^Y – элементарные множества в Y, $j = 1, \ldots, M$. Для этого применим индукцию по m. Основной шаг здесь – $m = 1$. Запишем различные числа из множества $\{a_1^{(1)}, \ldots, a_1^{(N)}, b_1^{(1)}, \ldots, b_1^{(N)}\}$ в возрастающем порядке: $c_1 < \ldots c_{M+1}$. Тогда $A = \cup_{j=1}^M \left([c_j, c_{j+1}] \times Q_j^Y\right)$, что и требовалось доказать. Из (5) по определению объема $\mu(A) = |A| = \sum_{j=1}^{M} |P_j \times Q_j^Y| = \sum_{j=1}^{M} \mu_X(P_j)\mu_Y(Q_j^Y)$. С другой стороны, для $x \in (c_j, c_{j+1})$ $A_Y(x) = Q_j^Y$, откуда по свойствам интеграла Лебега

$$\int_X \mu_Y(A_Y(x))d\mu_X = \sum_{j=1}^{M} \int_{P_j} \mu_Y(Q_j^Y)d\mu_X = \sum_{j=1}^{M} \mu_X(P_j)\mu_Y(Q_j^Y),$$

и равенство (4) для элементарных множеств установлено.

Из теоремы о структуре измеримых множеств (Теорема 12 предыдущей главы) следует, что любое измеримое по Лебегу множество A конечной меры представимо в виде

$$A = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}\right) \setminus A_0,$$

где $A_{i,j}, i = 1, 2, \ldots; j = 1, 2, \ldots$, - элементарные открытые множества, причем $A_{i,1} \subset A_{i,2} \subset \ldots, i = 1, 2, \ldots$; а $B_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}, i = 1, 2, \ldots$, таковы, что $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$, $\mu(B_1) < \infty$, $\mu(A_0) = 0$.

Проведем доказательство равенства (5) для множеств A конечной меры, представимых в виде

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j,$$

где $A_j, j = 1, 2, \ldots$, - элементарные открытые множества, причем $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$. Для каждого из множеств $A_j, j = 1, 2, \ldots$, равенство (4) уже доказано, т.е.

$$\mu(A_j) = \int_X \mu_Y((A_j)_Y(x))d\mu_X, j = 1, 2, \ldots.$$

По свойству непрерывности меры Лебега

$$\mu(A) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j). \tag{6}$$

Из включений $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ следуют (при любом $x \in X$) включения $(A_1)_Y(x) \subset (A_2)_Y(x) \subset \ldots$, откуда по свойствам меры Лебега последовательность функций $\{\mu_Y((A_j)_Y(x))\}_{j=1}^{\infty}$ является неубывающей последовательностью неотрицательных суммируемых функций. По теореме Леви из предыдущего параграфа

$$\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = \lim_{j\to\infty} \int_X \mu_Y((A_j)_Y(x))d\mu_X = \int_X \lim_{j\to\infty} \mu_Y((A_j)_Y(x))d\mu_X,$$

но по свойству непрерывности меры Лебега $\lim_{j\to\infty}\mu_Y((A_j)_Y(x)) = \mu_Y(A_Y(x))$ при каждом $x \in X$, что и доказывает (5) для объединений возрастающих последовательностей элементарных множеств.

Докажем теперь требуемое равенство (т.е.

$$\mu(B) = \int_X \mu_Y(B_Y(x))d\mu_X \tag{7}$$

для множеств B конечной меры, представимых в виде

$$B = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}\right),$$

где $A_{i,j}, i = 1,2,\ldots; j = 1,2,\ldots,$ - элементарные открытые множества, причем $A_{i,1} \subset A_{i,2} \subset \ldots, i = 1,2,\ldots;$ а $B_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}, i = 1,2,\ldots,$ таковы, что $B_1 \supset B_2 \supset \ldots,$ $\mu(B_1) < \infty$. Для множеств B_i соответствующие равенства $\mu(B_i) = \int_X \mu_Y((B_i)_Y(x))d\mu_X, i = 1,2,\ldots,$ были установлены только что, откуда

$$\mu(B_1 \setminus B_i) = \int_X \mu_Y((B_1 \setminus B_i)_Y(x))d\mu_X, i = 1,2,\ldots.$$

Повторяя рассуждения предыдущего абзаца, придем к равенству

$$\mu(B_1 \setminus B) = \lim_{i\to\infty}\mu(B_1 \setminus B_i) = \lim_{i\to\infty}\int_X \mu_Y((B_1 \setminus B_i)_Y(x))d\mu_X = \int_X \mu_Y((B_1 \setminus B)_Y(x))d\mu_X,$$

что и доказывает (7).

Перейдем к доказательству (4) для множеств A конечной меры. Как было отмечено выше, такие множества можно представить в виде $A = B \setminus A_0$, где для множества B справедливо равенство (7), а $\mu(A_0) = 0$. Применим теорему о структуре измеримого множества к множеству A_0. Тогда мы найдем множество $B_0 \supset A_0$ такой структуры, для которой равенство

$$\mu(B_0) = \int_X \mu_Y((B_0)_Y(x))d\mu_X$$

уже установлено и при этом $\mu(B_0) = \mu(A_0) = 0$. Но тогда по следствию 1 из параграфа 2 этой главы $\mu_Y((B_0)_Y(x)) = 0$ при μ_X-почти всех $x \in X$. Поэтому из включения $(B_0)_Y(x) \supset (A_0)_Y(x)$ вытекает $\mu_Y((A_0)_Y(x)) = 0$ при μ_X-почти всех $x \in X$. Тогда $0 = \mu(A_0) = \int_X \mu_Y((A_0)_Y(x))d\mu_X$ и

$$\mu(A) = \mu(B) = \int_X \mu_Y(B_Y(x))d\mu_X = \int_X \mu_Y(A_Y(x))d\mu_X,$$

и (4) для множеств A конечной меры установлено.

Для множеств A бесконечной меры осталось применить теорему Леви.

■

Определение 5. *Подграфиком неотрицательной функции f, заданной на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, называется множество $D_{f,E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in E, y \in [0, f(x)]\}$.*

Лемма 4. *Если на измеримом по Лебегу множестве $E \subset X = \mathbb{R}^n$ задана неотрицательная измеримая функция $f : E \to Y = [0, +\infty)$, то мера ее подграфика вычисляется по формуле*

$$\mu(D_{f,E}) = \int_E f(x) d\mu = \int_{[0,+\infty)} \mu_X(\{x \in E : f(x) \geq y\}) d\mu_Y.$$

Доказательство. Прежде всего установим, что подграфик измерим по Лебегу в $\mathbb{R}^{n+1}$. Сначала проверим, что $E \times [0, a]$ измерим по Лебегу в $\mathbb{R}^{n+1}$ для любого $a > 0$. Согласно критерию измеримости по Лебегу для любого $\varepsilon > 0$ найдется элементарное в $\mathbb{R}^n$ множество M такое, что $\mu_X(M \triangle E) < \varepsilon/a$. Так как для любого бруса P справедливо равенство $\mu(P \times [0, a]) = a\mu_X(P)$, то по определению внешней меры

$$\mu^* ((M \triangle E) \times [0, a]) = a\mu_X(M \triangle E) < \varepsilon,$$

откуда и следует измеримость по Лебегу множества $E \times [0, a]$. Так как измеримые по Лебегу множества образуют σ-алгебру, отсюда вытекает измеримость подграфика неотрицательной ступенчатой функции. По теореме о представлении измеримых функций пределами последовательностей ступенчатых (Теорема 19 предыдущей главы) получаем, что подграфик функции f является пределом неубывающей в смысле включений последовательности измеримых подграфиков ступенчатых функций, а значит и сам является измеримым множеством. Доказательство формулы вычисления меры немедленно следует из предыдущей теоремы. Достаточно заметить, что сечениями подграфика будут $(D_{f,E})_Y(x) = [0, f(x)], (D_{f,E})_X(y) = \{x \in E : f(x) \geq y\}$. ■

Теорема 11. *(Теорема Фубини)*

Если на измеримом по Лебегу множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ задана суммируемая функция $f(x, y), x \in \mathbb{R}^m = X, y \in \mathbb{R}^k = Y, m + k = n$, то (считая нигде не определенную функцию суммируемой с интегралом, равным нулю)

1. *при μ_X-почти всех $x \in X$ функция $f(x,y)$ суммируема по мере μ_Y на своей области определения, и при μ_Y-почти всех $y \in Y$ функция $f(x,y)$ суммируема по мере μ_X на своей области определения;*

2. *функция $\int_{E_Y(x)} f(x,y)d\mu_Y$ суммируема на X, функция $\int_{E_X(y)} f(x,y)d\mu_X$ суммируема на Y;*

3. *справедлива формула сведения кратного интеграла к повторным:*

$$\int_E f(x,y)d\mu = \int_X \left(\int_{E_Y(x)} f(x,y)d\mu_Y \right) d\mu_X = \int_Y \left(\int_{E_X(y)} f(x,y)d\mu_X \right) d\mu_Y.$$

Прежде чем доказывать теорему отметим, что с учетом принятого в ней соглашения фактически интегралы берутся не по всем пространствам X, Y, а по проекциям $\{x \in X : E_Y(x) \neq \emptyset\}, \{y \in Y : E_X(y) \neq \emptyset\}$ соответственно.

Доказательство. Будем сначала считать, что функция $f(x,y)$ неотрицательна на E. Тогда ее подграфик $D_{f,E}$ измерим. Его сечения $(D_{f,E})_{Y\times[0,+\infty)}(x)$ при μ_X-почти всех $x \in X$ измеримы по предыдущей теореме. Эти сечения являются подграфиками функций $f(x,y)$ с фиксированным $x \in X$. Их меры по лемме можно вычислить по формуле

$$\mu_{Y\times[0,+\infty)}\left((D_{f,E})_{Y\times[0,+\infty)}(x)\right) = \int_{E_Y(x)} f(x,y)d\mu_Y.$$

Тогда по предыдущей теореме

$$\mu(D_{f,E}) = \int_X \mu_{Y\times[0,+\infty)}\left((D_{f,E})_{Y\times[0,+\infty)}(x)\right) d\mu_X = \int_X \left(\int_{E_Y(x)} f(x,y)d\mu_Y \right) d\mu_X.$$

Но по лемме $\mu(D_{f,E}) = \int_E f(x,y)d\mu$, что по условию является конечным числом. Отсюда функция $\int_{E_Y(x)} f(x,y)d\mu_Y$ суммируема на X, а функция $\mu_{Y\times[0,+\infty)}\left((D_{f,E})_{Y\times[0,+\infty)}(x)\right)$ конечна при μ_X-почти всех $x \in X$. Это означает суммируемость функции $f(x,y)$ при μ_X-почти всех $x \in X$. Аналогичные рассуждения справедливы и для повторного интеграла в противоположном порядке. Для функции любого знака достаточно применить уже доказанную часть утверждения к положительной и отрицательной частям функции f и воспользоваться линейностью интеграла Лебега. ■

Перейдем к формуле замены переменных в кратных интегралах.

Прежде всего докажем формулу замены переменных в одномерном интеграле Лебега. В одномерном случае понятие диффеоморфизма можно распространить на отрезки, понимая наличие производной в конце отрезка в смысле наличия соответствующей односторонней производной.

Теорема 12. *(Замена переменных в одномерном интеграле Лебега).*

Пусть φ – диффеоморфизм отрезка V на отрезок U, а функция f суммируема на U. Тогда

$$\int_U f(u)d\mu(u) = \int_V f(\varphi(v))|\varphi'(v)|d\mu(v). \tag{8}$$

В частности, для любого измеримого по Лебегу подмножества $A \subset U$

$$\mu(A) = \int_{\varphi^{-1}(A)} |\varphi'(v)|d\mu(v). \tag{9}$$

Прежде чем доказывать теорему, заметим, что справедливость формулы (8) автоматически означает, что функция, стоящая под интегралом в ее правой части, суммируема. Кроме того, вместо множества U в эту формулу можно подставить любое измеримое по Лебегу подмножество $A \subset U$, а вместо V – $\varphi^{-1}(A)$ (для доказательства достаточно продолжить функцию f нулем на $U \setminus A$).

Доказательство. Сначала докажем формулу (9). Если $A \subset U$ – отрезок, то интеграл в правой части можно понимать как интеграл Римана, а тогда (9) следует из формулы замены переменной в интеграле Римана. Так как интеграл Лебега не меняется при удалении из множества интегрирования множества нулевой меры, то (9) справедлива и для любого промежутка $A \subset U$. Отсюда немедленно следует выполнение (9) и для элементарных множеств $A \subset U$. Для произвольного измеримого по Лебегу подмножества $A \subset U$ согласно критерию измеримости по Лебегу найдем для любого $\varepsilon > 0$ элементарное множество $M_\varepsilon \subset U$ такое, что $\mu(A \triangle M_\varepsilon) < \varepsilon$. По теореме об измеримости диффеоморфного образа измеримого множества $\varphi^{-1}(A)$ измеримо, причем в ходе доказательства этой теоремы получена оценка меры образа, из которой следует неравенство

$$\mu(\varphi^{-1}(A) \triangle \varphi^{-1}(M_\varepsilon)) < 2\max_{u\in U} |(\varphi^{-1})'(u)|\mu(A \triangle M_\varepsilon) < \frac{2\varepsilon}{\min_{v\in V} |\varphi'(v)|}.$$

Отсюда

$$\left|\int_{\varphi^{-1}(A)} |\varphi'(v)|d\mu(v) - \int_{\varphi^{-1}(M_\varepsilon)} |\varphi'(v)|d\mu(v)\right| \le \int_{\varphi^{-1}(A)\triangle\varphi^{-1}(M_\varepsilon)} |\varphi'(v)|d\mu(v) \le \frac{2\varepsilon \max_{v\in V} |\varphi'(v)|}{\min_{v\in V} |\varphi'(v)|}.$$

В силу выбора множества $M_\varepsilon \subset U$ можно тогда записать цепочку неравенств

$$|\mu(A) - \int_{\varphi^{-1}(A)} |\varphi'(v)| d\mu(v)| \leq |\mu(A) - \mu(M_\varepsilon)| + \left| \int_{\varphi^{-1}(A)} |\varphi'(v)| d\mu(v) - \int_{\varphi^{-1}(M_\varepsilon)} |\varphi'(v)| d\mu(v) \right| <$$

$$\left(1 + \frac{2 \max_{v \in V} |\varphi'(v)|}{\min_{v \in V} |\varphi'(v)|} \right) \varepsilon.$$

Произвольность $\varepsilon > 0$ завершает доказательство (9).

Доказательство формулы (8) проведем сначала для случая неотрицательной функции f. Для ступенчатых функций (8) немедленно следует из (9), линейности и σ-аддитивности интеграла Лебега. Теперь по теореме о представлении измеримых функций пределами последовательностей ступенчатых (Теорема 19 предыдущей главы) и по теореме Леви получаем (8) для неотрицательной функции f.

Для функции любого знака достаточно применить уже доказанную часть утверждения к положительной и отрицательной частям функции f и воспользоваться линейностью интеграла Лебега. ■

Чтобы доказать формулу замены переменных в кратном интеграле, надо научиться раскладывать диффеоморфизм на композицию диффеоморфизмов, оставляющих неизменными все координаты, кроме одной (хотя бы локально, т.е. в достаточно малой окрестности любой точки).

Определение 6. *Простым отображением называется непрерывно дифференцируемое отображение f окрестности $0 \in \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, такое, что $f(0) = 0$, $det f'(0) \neq 0$, и найдется индекс $j, 1 \leq j \leq n$ такой, что для всех $i \neq j$ координатные функции f_i равны соответствующим координатам вектора x, $f_i(x) = x_i$.*

Теорема 13. *(Теорема о разложении). Пусть f – непрерывно дифференцируемое отображение открытого множества $\subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, такое, что $f(0) = 0$, $det f'(0) \neq 0$. Тогда найдутся простые отображения $g^{[1]}, \ldots, g^{[n]}$ и линейные отображения B_i : $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, i = 1, \ldots, n$, каждое из которых либо тождественное, либо сводится к перестановке двух координат, такие, что в некоторой окрестности нуля*

$$f = g^{[n]} \circ B_n \circ g^{[n-1]} \circ B_{n-1} \circ \ldots \circ g^{[1]} \circ B_1.$$

Доказательство. Построим по индукции последовательность непрерывно дифференцируемых в некоторой окрестности нуля отображений $f^{[m]}$ таких, что $f^{[m]}(0) = 0$,

$\det(f^{[m]})'(0) \neq 0$ и первые $m-1$ координатных функций равны соответствующим координатам вектора x, $f_i^{[m]}(x) = x_i, i = 1, \ldots, m-1$.

В качестве $f^{[1]}$ возьмем данное отображение, $f^{[1]} = f$. Нетрудно видеть, что первые $m-1$ строк матрицы Якоби $(f^{[m]})'(0)$ совпадают с первыми $m-1$ строками единичной матрицы порядка n. В силу невырожденности матрицы $(f^{[m]})'(0)$ хотя бы один из последних элементов m-й строки этой матрицы не равен нулю. Если этот элемент находится в j-м столбце, то через B_m обозначим линейное отображение $B_m : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$,, которое сводится к перестановке координат j, m (при $j = m$ B_m – тождественное отображение).

Построим простое отображение $g^{[m]}$ следующим образом. Для всех $i \neq m$ координатные функции $g_i^{[m]}$ равны соответствующим координатам вектора x, $g_i^{[m]}(x) = x_i$, m-я координатная функция равна $g_m^{[m]}(x) = f_m^{[m]}(B_m x)$. Все строки матрицы Якоби этого отображения, кроме m-й, совпадают с соответствующими строками единичной матрицы порядка n. m-я же строка получена из m-й строки матрицы Якоби $(f^{[m]})'(0)$ перестановкой координат j, m. Нетрудно видеть, что тогда $\det(g^{[m]})'(0) \neq 0$. Применим к $g^{[m]}$ теорему об обратном отображении. Тем самым найдется окрестность нуля U_m такая, что $g^{[m]}$ отображает взаимно однозначно U_m на окрестность нуля V_m и в V_m существует обратное отображение $(g^{[m]})^{-1}$, непрерывно дифференцируемое в V_m, и $\det((g^{[m]})^{-1})'(0) \neq 0$.

Положим

$$f^{[m+1]}(y) = f^{[m]}(B_m(g^{[m]})^{-1}(y)), \quad y \in V_m. \tag{10}$$

Проверим требуемые свойства первых m координатных функций этого отображения (остальные свойства выполнены очевидным образом). Для первых $m-1$ координатных функций имеем

$$f_i^{[m+1]}(y) = f_i^{[m]}(B_m(g^{[m]})^{-1}(y)) = (B_m(g^{[m]})^{-1}(y))_i = ((g^{[m]})^{-1}(y))_i, i = 1, \ldots, m-1.$$

Каждая точка $y \in V_m$ представима в виде $y = g^{[m]}(x)$, $x \in U_m$, поэтому

$$((g^{[m]})^{-1}(y))_i = x_i = y_i, i = 1, \ldots, m-1.$$

Итак, $f_i^{[m+1]}(y) = y_i, i = 1, \ldots, m-1$ для $y \in V_m$. Для m-й координатной функции имеем

$$f_m^{[m+1]}(y) = f_m^{[m]}(B_m(g^{[m]})^{-1}(y)) = g_m^{[m]}(g^{[m]})^{-1}(y)) = g_m^{[m]}(x) = y_m,$$

что и требовалось.

Итак, последовательность отображений $f^{[m]}$ построена, причем для $m > n$ все эти отбражения тождественны.

Перепишем равенства (10), полагая $y = g^{[m]}(B_m x)$, следующим образом:

$$f^{[m]}(x) = f^{[m+1]}(g^{[m]}(B_m x)).$$

Применим их последовательно к $m = 1, 2, \ldots, n$. Получим

$$f = f^{[1]} = f^{[2]} \circ g^{[1]} \circ B_1 = f^{[3]} \circ g^{[2]} \circ B_2 \circ g^{[1]} \circ B_1 = \ldots = g^{[n]} \circ B_n \circ g^{[n-1]} \circ B_{n-1} \circ \ldots \circ g^{[1]} \circ B_1.$$

■

Теорема 14. *(Теорема о замене переменных в кратном интеграле Лебега). Пусть функция f суммируема на ограниченном измеримом по Лебегу множестве $V \subset \mathbb{R}^n$, а отображение φ является диффеоморфизмом на области Ω, содержащей замыкание множества $U = \varphi^{-1}(V)$. Тогда справедлива формула замены переменных*

$$\int_V f(v) d\mu(v) = \int_{\varphi^{-1}(V)} f(\varphi(u)) |\det \varphi'(u)| d\mu(u). \qquad (11)$$

В частности,

$$\mu(V) = \int_{\varphi^{-1}(V)} |\det \varphi'(u)| d\mu(u). \qquad (12)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что если формула (11) доказана для отображений $\varphi : \Omega_1 \supset U \mapsto \Omega_2$, $\psi : \Omega_2 \supset V \mapsto \Omega_2$, $\psi(V) = W$, то она справедлива и для их композиции $\phi = \psi \circ \varphi$, т.е.

$$\int_W f(w) d\mu(w) = \int_{\phi^{-1}(W)} f(\phi(w)) |\det \phi'(w)| d\mu(w).$$

В самом деле, достаточно записать цепочку равенств

$$\int_W f(w) d\mu(w) = \int_V f(\psi(v)) |\det \psi'(v)| d\mu(v) = \int_U f(\psi(\varphi(u))) |\det \psi'(\varphi(u))| \cdot |\det \varphi'(u)| d\mu(u)$$

и заметить, что по правилу дифференцирования сложной функции $\phi'(u) = \psi'(\varphi(u))\varphi'(u)$, откуда по свойствам определителей $\det \phi'(u) = \det \psi'(\varphi(u)) \cdot \det \varphi'(u)$, что и дает требуемое.

Докажем сначала локальные варианты формул (11),(12), то есть в предположении, что множество U лежит в достаточно малой окрестности точки a.

Начнем с формулы (12). Применим предыдущую теорему (о разложении) к отображению $u-a \mapsto \varphi(u)-\varphi(a)$. Будем считать окрестность точки a настолько малой, что в ней

$$\varphi(u) = \varphi(a) + g^{[n]} \circ B_n \circ g^{[n-1]} \circ B_{n-1} \circ \ldots \circ g^{[1]} \circ B_1(u-a),$$

где простые отображения $g^{[1]}, \ldots, g^{[n]}$ и линейные отображения $B_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, i = 1, \ldots, n$, каждое из которых либо тождественное, либо сводится к перестановке двух координат взяты из теоремы о разложении.

Проверим справедливость формулы (12) для замен, осуществляемых простыми отображениями, линейными отображениями, сводящимся к перестановке двух координат, и сдвигами.

Пусть $\varphi = g^{[1]}$. По свойствам отображения $g^{[1]}$ для точек множества V представленных в виде $v = (y, x)$, где $y \in Y = \mathbb{R}$, $x \in X = \mathbb{R}^{n-1}$ равенство $v = g^{[1]}(u)$ означает, что $y = g_1^{[1]}(\tilde{u}, x), u = (\tilde{u}, x)$. Тем самым определена функция τ_x одной переменной $\tilde{u}$ равенством $y = \tau_x(\tilde{u}) = g_1^{[1]}(\tilde{u}, x)$. Тогда по формуле замены переменной в однократном интеграле Лебега (9) на сечении $V_Y(x)$ имеем

$$\mu_Y(V_Y(x)) = \int_{\tau_x^{-1}(V_Y(x))} |\tau_x'(\tilde{u})| d\mu(\tilde{u}).$$

Поскольку

$$\tau_x'(\tilde{u}) = \frac{\partial g_1^{[1]}}{\partial \tilde{u}}(\tilde{u}, x) = \det \left(g^{[1]}\right)'(\tilde{u}, x),$$

то справедливо равенство

$$\mu_Y(V_Y(x)) = \int_{\tau_x^{-1}(V_Y(x))} \left|\det \left(g^{[1]}\right)'(\tilde{u}, x)\right| d\mu(\tilde{u}). \tag{13}$$

По теореме о вычислении меры с помощью кратных интегралов $\mu(V) = \int_X \mu_Y(V_Y(x)) d\mu_X$. Подставляя сюда равенство (13) и используя теорему Фубини, получим

$$\mu(V) = \int_X \int_{\tau_x^{-1}(V_Y(x))} \left|\det \left(g^{[1]}\right)'(\tilde{u}, x)\right| d\mu(\tilde{u}) d\mu_X = \int_{\tau_x^{-1}(V_Y(x)) \times X} \left|\det \left(g^{[1]}\right)'(\tilde{u}, x)\right| d\mu(u).$$

Осталось заметить, что равенство $v = g^{[1]}(u)$ означает, что $v = (\tau_x(\tilde{u}), x)$, откуда $\tau_x^{-1}(V_Y(x)) \times X = (g^{[1]})^{-1}(V)$.

Пусть теперь $\varphi = B$, где B – линейное отображение, сводящееся к перестановке первой и второй координат. Теперь точки множества V представлены в виде $v = (y, x)$, где $y \in Y = \mathbb{R}^2$, $x \in X = \mathbb{R}^{n-2}$. По теореме о вычислении меры с помощью кратных интегралов $\mu(V) = \int_X \mu_Y(V_Y(x))d\mu_X$. Применение отображения B означает лишь перестановку порядка интегрирования в повторном интеграле, к которому сводится по теореме Фубини вычисление $\mu_Y(V_Y(x))$, а модуль якобиана отображения B равен единице, что означает справедливость (12) и в этом случае.

Если $\varphi = T$, где T – сдвиг, то его якобиан равен единице, и формула (12) следует из инвариантности меры Лебега относительно сдвигов.

Установим теперь локальный вариант формулы (11) в тех же частных случаях. Свойство σ-аддитивности меры Лебега и линейность интеграла Лебега доказывают справедливость (11) для ступенчатых функций. Теперь по теореме о представлении измеримых функций пределами последовательностей ступенчатых (Теорема 19 предыдущей главы) и по теореме Леви получаем (11) для неотрицательной функции f.

Для функции любого знака достаточно применить уже доказанную часть утверждения к положительной и отрицательной частям функции f и воспользоваться линейностью интеграла Лебега.

Поскольку тогда формула (11), как было отмечено в начале доказательства, справедлива и для любой композиции замен, осуществляемых простыми отображениями, линейными отображениями, сводящимся к перестановке двух координат, и сдвигами, то справедливость локального варианта формулы (11) доказана.

Итак, каждая точка $a \in \bar{U}$ обладает такой окрестностью, что для измеримых подмножеств этой окрестности справедлива формула (11). Поскольку множество $\bar{U}$ – компактное, из его покрытия всеми окрестностями можно выделить конечное подпокрытие, т.е. такой конечный набор точек $u_1, \ldots, u_N$, что семейство окрестностей $U(u_s, \varepsilon_s), s = 1, \ldots, N$, покрывает все $\bar{U}$ для измеримых подмножеств каждой из окрестностей $U(u_s, \varepsilon_s), s = 1, \ldots, N$, справедлива формула (11). Докажем, что существует разбиение единицы, подчиненное этому покрытию, т.е. такой набор бесконечно дифференцируемых функций $\zeta_1, \ldots, \zeta_N$, что

1. $\zeta_s(u) > 0$ при $u \in U(u_s, \varepsilon_s), s = 1, \ldots, N$,

2. $\zeta_s(u) = 0$ при $u \notin U(u_s, \varepsilon_s), s = 1, \ldots, N$,

3. $\sum_{s=1}^{N} \zeta_s(u) = 1$ для всех $u \in \bar{U}$.

В самом деле, функции $\eta_s(u)$, равные нулю вне $U(u_s,\varepsilon_s)$, $s = 1,\dots,N$, и $\eta_s(u) = \exp(-1/(\varepsilon_s^2 - |u-u_s|^2)^2)$ для $|u-u_s| < \varepsilon_s$ бесконечно дифференцируемы. Их сумма $\sum_{s=1}^N \eta_s(u) > 0$ для всех $u \in \bar{U}$, так как любая точка $u \in \bar{U}$ лежит в некоторой окрестности $U(u_s,\varepsilon_s)$. Более того, как непрерывная на компактном множестве функция, она достигает своего (положительного) минимума на $\bar{U}$, а тогда легко видеть, что функции

$$\zeta_s(u) = \frac{\eta_s(u)}{\sum_{s=1}^N \eta_s(u)}$$

образуют требуемое разбиение единицы. Тогда цепочка равенств

$$\int_V f(v)d\mu(v) = \int_V f(v)\sum_{s=1}^N \zeta_s(\varphi^{-1}(v))d\mu(v) =$$

$$\sum_{s=1}^N \int_{V\cap\varphi(U(u_s,\varepsilon_s))} f(v)\zeta_s(\varphi^{-1}(v))d\mu(v) = \sum_{s=1}^N \int_{\varphi^{-1}(V\cap\varphi(U(u_s,\varepsilon_s)))} f(\varphi(u))\zeta_s(u)|\det\varphi'(u)|d\mu(u) =$$

$$\int_U f(\varphi(u))\sum_{s=1}^N \zeta_s(u)|\det\varphi'(u)|d\mu(u) = \int_{\varphi^{-1}(V)} f(\varphi(u))|\det\varphi'(u)|d\mu(u)$$

завершает доказательство.

■

Заключительная теорема этого параграфа была доказана Лебегом (часть ее – независимо также Витали). Мы докажем только одномерный вариант, хотя доказательство нетрудно перенести и на случай нескольких переменных.

Теорема 15. *(Критерий интегрируемости по Риману). Ограниченная на отрезке $[a,b]$ функция f интегрируема по Риману на этом отрезке тогда и только тогда, когда она непрерывна почти всюду на $[a,b]$.*

Доказательство. Из теоремы об интеграле Римана как о пределе интегральных сумм следует, что f интегрируема по Риману на $[a,b]$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности разбиений $\{P_k = \{a = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \ldots < x_{n_k}^{(k)} = b\}\}$ такой, что $P_{k+1} \subset P_k$ с бесконечно малой последовательностью диаметров ($\max_{1\le j\le n_k}(x_j^{(k)} - x_{j-1}^{(k)}) \to 0$ при $k \to\in \infty$) соответствующие последовательности верхних и нижних сумм Дарбу $\{U(P_k,f)\}, \{L(P_k,f)\}$ имеют один и тот же предел (равный интегралу Римана $\int_a^b f(x)dx$). Более того, беря при необходимости общие измельчения и учитывая очевидное неравенство

$$U(Q,f) - L(Q,f) \leq U(P,f) - L(P,f)$$

для любых разбиений P, Q таких, что $Q \subset P$, можно вместо любой последовательности разбиений говорить о некоторой. Выбрав какую-нибудь такую последовательность разбиений, построим две последовательности функций $\{U_k(x)\}, \{L_k(x)\}$, положив для $x \in (x_{j-1}^{(k)}, x_j^{(k)}]$

$$U_k(x) = \sup_{t \in [x_{j-1}^{(k)}, x_j^{(k)}]} f(t); \quad L_k(x) = \inf_{t \in [x_{j-1}^{(k)}, x_j^{(k)}]} f(t)$$

(для $x = a$ естественно выбрать $j = 1$). Очевидны неравенства

$$L_1(x) \leq L_2(x) \leq \ldots \leq f(x) \leq \ldots \leq U_2(x) \leq U_1(x)$$

при всех $x \in [a,b]$. Отсюда для любого $x \in [a,b]$ существуют конечные пределы

$$L(x) = \lim_{k\to\infty} L_k(x), \quad U(x) = \lim_{k\to\infty} U_k(x),$$

удовлетворяющие при всех $x \in [a,b]$ неравенствам $L(x) \leq f(x) \leq U(x)$. Так как

$$\int_{[a,b]} L_k(x)d\mu(x) = L_k(P,f), \quad \int_{[a,b]} U_k(x)d\mu(x) = U_k(P,f),\ k = 1,2,\ldots,$$

то по теореме Леви $\lim_{k\to\infty} L_k(P,f) = \int_{[a,b]} L(x)d\mu(x)$, $\lim_{k\to\infty} U_k(P,f) = \int_{[a,b]} U(x)d\mu(x)$.

Таким образом, интегрируемость по Риману функции f равносильна равенству интегралов $\int_{[a,b]} L(x)d\mu(x) = \int_{[a,b]} U(x)d\mu(x)$, или, с учетом свойства положительной определенности интеграла Лебега, равенству $L(x) = U(x)$ почти всюду на $[a,b]$. Если x не совпадает ни с одной из точек разбиений P_k (число таких точек счетно), то равенство $L(x) = U(x)$ равносильно непрерывности функции f в точке x. В самом деле, из $L(x) = U(x)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое k, что $U_k(x) - L_k(x) < \varepsilon$. Так как $x \in (x_{j-1}^{(k)}, x_j^{(k)})$ при некотором j, то, положив $\delta = \min(x - x_{j-1}^{(k)}, x_j^{(k)} - x) > 0$, для любого $\tilde{x}$ такого, что $|\tilde{x} - x| < \delta$ получим $|f(\tilde{x}) - f(x)| \leq U_k(x) - L_k(x) < \varepsilon$. Аналогично доказывается и то, что непрерывность в точке x влечет равенство $L(x) = U(x)$. ■