А. Л. Лукашов

Меры Жордана и Лебега (лекции для ФИВТ).

Здесь изложены темы курса математического анализа, включенные в программу 3-го семестра ФИВТ. Часть материала была прочитана во 2-м семестре, но лишь вопросы, относящиеся к мере Жордана, были включены в экзаменационную программу. В 3-м семестре студенты ФИВТ слушают курс основ теории вероятностей и теории меры, поэтому представляется естественным вести построение кратного интеграла сразу как интеграла Лебега. Конечно, мера Лебега при этом должна быть изучена студентами перед интегралом Лебега.

§1. Элементарные множества и n-мерный объем для них.

Пусть $\langle a, b\rangle$ обозначает один из конечных (возможно вырожденных) промежутков $[a, b], (a, b), [a, b), (a, b], a \leq b$. Брусом в $\mathbb{R}^n$ назовем множество P вида $P = \prod_{j=1}^{n}\langle a_j, b_j\rangle$, его n-мерным объемом естественно считать число $|P| = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j), |\emptyset| = 0$.

Из геометрических соображений нетрудно вывести следующие свойства объема:
1) Если брус P представлен в виде конечного объединения непересекающихся брусьев P_j, т.е. $P = \sqcup_{j=1}^{N} P_j$, то $|P| = \sum_{j=1}^{N} |P_j|$;
2) Если брус Q включает брус P, $P \subset Q$, то $|P| \leq |Q|$.

Определение 1. *Множество M называется элементарным, если его можно представить в виде конечного числа непересекающихся брусьев, т.е. $M = \sqcup_{j=1}^{N} P_j$.*

Лемма 1. *Объединение, пересечение, разность и симметрическая разность элементарных множеств являются элементарными множествами.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что пересечение двух брусьев является брусом, так как пересечение двух промежутков является промежутком. Тогда из представлений $M = \sqcup_{j=1}^{n_1} M_j$, $N = \sqcup_{k=1}^{n_2} N_k$, следует $M \cap N = \sqcup_{j,k} M_j \cap N_k$, что доказывает часть нашего утверждения, относящуюся к пересечению.

Далее заметим, что дополнение бруса P^c является объединением конечного числа непересекающихся (возможно, бесконечных, т.е. с допущением в определении бруса бесконечных промежутков) брусьев, что в сочетании с уже доказанной частью утверждения (возможная бесконечность брусьев ничего в доказательстве не меняет) влечет его справедливость для разности в силу

$$M \backslash N = M \backslash \left(\cup_i Q_i\right) = M \cap \left(\cap_i Q_i^c\right).$$

Равенство $P \cup Q = (P\backslash Q) \sqcup Q$ в сочетании с уже доказанной частью влечет элементарность объединения двух брусьев, откуда следует наше утверждение об объединении элементарных множеств.

Последняя часть утверждения следует из определения симметрической разности: $M \triangle N = (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$.■

Доказанная лемма означает (по определению), что совокупность элементарных множеств в $\mathbb{R}^n$ является кольцом множеств. Если же рассматривать лишь элементарные подмножества некоторого фиксированного элементарного множества (например, ячейки $I = \prod_{i=1}^n [0,1)$ или куба $K_I = \prod_{i=1}^n [-1/2, 1/2])$, то они образуют алгебру множеств (т.е. кольцо множеств с единицей).

Определение 2. *Объем элементарного множества $M = \sqcup_{i=1}^r P_i$ равен $|M| = \sum_{i=1}^r |P_i|$.*

Теорема 1. *(Основные свойства объема на кольце элементарных множеств).*

1. *Определение объема корректно.*

2. *Для любых элементарных множеств M, N*
$$|M \cup N| + |M \cap N| = |M| + |N|.$$

3. *Для любых элементарных множеств M, N*
$$M \subset N \Rightarrow |M| \leq |N|.$$

4. *(Конечная аддитивность) Для любых элементарных множеств M_i, $i = 1, \dots r$,*
$$\left| \bigsqcup_{i=1}^r M_i \right| = \sum_{i=1}^r |M_i|.$$

Доказательство. Для доказательства первого свойства предположим, что справедливы два представления элементарного множества M в виде объединений непересекающихся брусьев
$$M = \bigsqcup_{i=1}^r P_i = \bigsqcup_{j=1}^q Q_j.$$

Тогда образуем третье представление, беря всевозможные пересечения $P_{i,j} = P_i \cap Q_j$, и заметим, что все суммы

$$\sum_{i=1}^{r} |P_i| = \sum_{j=1}^{q} |Q_j| = \sum_{i,j} |P_{i,j}|$$

равны по первому свойству объема брусьев.

Для доказательства четвертого свойства прежде всего докажем, что из включения элементарного множества M в объединение (не обязательно непересекающихся) элементарных множеств M_i, $i = 1, \dots r$, $M \subset \cup_{i=1}^{r} M_i$ следует неравенство $|M| \leq \sum_{i=1}^{r} |M_i|$. В самом деле, из третьего свойства, являющегося немедленным следствием геометрически очевидного второго, следует неравенство $|M| \leq |\cup_{i=1}^{r} M_i|$. Для $r = 2$ отсюда немедленно следует требуемое, в общем же случае рассуждаем по индукции. ∎

Определение 3. *Пусть* $1 > \varepsilon > 0$. $\varepsilon-$ *растяжением бруса* $P = \prod_{j=1}^{n} \langle a_j, b_j \rangle$ *назовем брус*

$$P^{\varepsilon} = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{a_j + b_j}{2} - \sqrt[n]{1+\varepsilon}\frac{b_j - a_j}{2}, \frac{a_j + b_j}{2} + \sqrt[n]{1+\varepsilon}\frac{b_j - a_j}{2} \right).$$

$\varepsilon-$ *сжатием бруса* $P = \prod_{j=1}^{n} \langle a_j, b_j \rangle$ *назовем брус*

$$P^{-\varepsilon} = \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{a_j + b_j}{2} - \sqrt[n]{1-\varepsilon}\frac{b_j - a_j}{2}, \frac{a_j + b_j}{2} + \sqrt[n]{1-\varepsilon}\frac{b_j - a_j}{2} \right].$$

Очевидно, что $|P^{\varepsilon}| = (1+\varepsilon)|P|, \quad |P^{-\varepsilon}| = (1-\varepsilon)|P|$.

Теорема 2. *(Счетная ($\sigma-$)аддитивность объема на кольце элементарных множеств).*

Если элементарное множество M *представлено объединением непересекающихся элементарных множеств* M_i, $i = 1, 2, \dots$, $M = \sqcup_{i=1}^{+\infty} M_i$, *то* $|M| = \sum_{i=1}^{+\infty} |M_i|$.

Доказательство. Прежде всего докажем, что из включения элементарного множества M в объединение (не обязательно непересекающихся) элементарных множеств M_i, $i = 1, 2, \dots$, $M \subset \cup_{i=1}^{+\infty} M_i$ следует неравенство

$$|M| \leq \sum_{i=1}^{+\infty} |M_i| \tag{1}$$

(причем здесь, в отличие от утверждения теоремы, сумма ряда может быть бесконечной). Для этого представим каждое из элементарных множеств в виде объединения конечного числа непересекающихся брусьев:

$$M_i = \sqcup_{k=1}^{r_i} P_{k,i},\ M = \sqcup_{i=1}^{r} Q_i.$$

Это дает представление объединения элементарных множеств в виде счетного объединения брусьев $\cup_{i=1}^{+\infty} M_i = \cup_{i=1}^{+\infty} \sqcup_{k=1}^{r_i} P_{k,i} = \cup_{l=1}^{+\infty} P_l$, причем для содержательной части доказательства важен лишь случай, когда все эти брусья невырожденны. Выберем произвольное $1 > \varepsilon > 0$, и положим $\alpha_l = \frac{\varepsilon}{2^l |P_l|}, l = 1, 2, \ldots$. Тогда включение

$$\sqcup_{i=1}^{r} Q_i^{-\varepsilon} \subset \cup_{l=1}^{+\infty} P_l^{\alpha_l}$$

означает, что $\cup_{l=1}^{+\infty} P_l^{\alpha_l}$ образует открытое покрытие компактного множества $\sqcup_{i=1}^{r} Q_i^{-\varepsilon}$. Выберем из него конечное подпокрытие: существует такой конечный набор индексов $l_j, j = 1, \ldots, s$, что

$$\sqcup_{i=1}^{r} Q_i^{-\varepsilon} \subset \cup_{j=1}^{s} P_{l_j}^{\alpha_{l_j}}.$$

Тогда по предыдущей теореме

$$\sum_{i=1}^{r} \left| Q_i^{-\varepsilon} \right| \leq \sum_{j=1}^{s} \left| P_{l_j}^{\alpha_{l_j}} \right|.$$

Учитывая соотношение объемов растяжений и сжатий, отсюда получим

$$(1-\varepsilon)|M| = (1-\varepsilon) \sum_{i=1}^{r} |Q_i| = \sum_{i=1}^{r} \left| Q_i^{-\varepsilon} \right|,$$

$$\sum_{j=1}^{s} \left| P_{l_j}^{\alpha_{l_j}} \right| = \sum_{j=1}^{s} |P_{l_j}|(1+\alpha_{l_j}) = \sum_{j=1}^{s} |P_{l_j}| + \varepsilon \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{2^{l_j}} < \sum_{l=1}^{+\infty} |P_l| + \varepsilon = \sum_{i=1}^{+\infty} |M_i|.$$

Последние три неравенства вместе с произвольностью $\varepsilon > 0$ доказывают (1).

Для доказательства противоположного неравенства заметим, что включение $\sqcup_{i=1}^{+\infty} M_i \subset M$ влечет $\sqcup_{i=1}^{m} M_i \subset M$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Последнее дает неравенство $\sum_{i=1}^{m} |M_i| \leq |M|$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Отсюда $\sum_{i=1}^{+\infty} |M_i| \leq |M|$.■

§2. Внешняя и внутренняя меры Жордана и Лебега.

В этом параграфе мы рассматриваем только подмножества куба $K_I = \prod_{i=1}^{n} [-1/2, 1/2]$.

Определение 4. *Внешней мерой Жордана множества A называется точная нижняя грань сумм мер конечного числа элементарных множеств M_i, образующих покрытие A:*

$$\mu_J^*(A) = \inf_{A\subset\cup_{i=1}^r M_i} \sum_{i=1}^{r} |M_i|.$$

Внешней мерой Лебега множества A называется точная нижняя грань сумм мер счетного числа элементарных множеств M_i, образующих покрытие A:

$$\mu^*(A) = \inf_{A\subset\cup_{i=1}^{+\infty} M_i} \sum_{i=1}^{+\infty} |M_i|.$$

Например, для $n = 1$, $A = \mathbb{Q}\cap K_I$ имеем $\mu_J^*(A) = 1, \quad \mu^*(A) = 0$.

Теорема 3 (Свойства внешних мер). *1. Если M - элементарное, то $\mu_J^*(M) = \mu^*(M) = |M|$.*

2. Если $A \subset \cup_{i=1}^r A_i$, то $\mu_J^*(A) \le \sum_{i=1}^r \mu_J^*(A_i)$, $\mu^*(A) \le \sum_{i=1}^r \mu^*(A_i)$,

3. Для любого множества A справедливо неравенство $\mu^*(A) \le \mu_J^*(A)$.

4. Если $A \subset \cup_{i=1}^{+\infty} A_i$, то $\mu^*(A) \le \sum_{i=1}^{+\infty} \mu^*(A_i)$.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения прежде всего заметим, что включение $M \subset M$ немедленно влечет неравенства $\mu_J^*(M) \le |M|$, $\mu^*(M) \le |M|$ (для последнего неравенства нужно учесть, что каждое покрытие конечным числом элементарных множеств можно рассматривать и как покрытие бесконечным числом, добавив бесконечное число пустых множеств).

Противоположные неравенства немедленно следуют из неравенства (1) из предыдущего параграфа.

Для доказательства 2) выберем для любого $\varepsilon > 0$ наборы элементарных множеств $M_{j,i}, j = 1,\dots,r_i; i = 1,\dots,r$, так, чтобы выполнялись включения $A_i \subset \cup_{j=1}^{r_i} M_{j,i}$ и неравенства

$$\sum_{j=1}^{r_i} |M_{j,i}| \le \mu_J^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{r}. \tag{2}$$

Тогда $A \subset \cup_{i=1}^r \cup_{j=1}^{r_i} M_{j,i}$, откуда

$$\mu_J^*(A) \le \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r_i} |M_{j,i}| \le \sum_{i=1}^{r} \mu_J^*(A_i) + \varepsilon,$$

и произвольность $\varepsilon > 0$ доказывает 2) для меры Жордана. Для меры Лебега доказательство аналогично.

Утверждение 3) очевидным образом следует из возможного добавления пустых множеств, как в доказательстве 1).

Доказательство утверждения 4) проводится аналогично доказательству 2) с заменой в неравенстве (2) дроби $\frac{\varepsilon}{r}$ на $\frac{\varepsilon}{2^i}$.

■

В дальнейшем с целью избежать повторений, аналогичных доказательству утверждения 2) в этой теореме, мы будем утверждения, справедливые и для меры Жордана, и (при соответствующей модификации) для меры Лебега формулировать с использованием обозначения $\mu^*_{(J)}$ для внешней меры Лебега (Жордана). Для внутренней меры индексы меняются местами.

Определение 5. *Внутренней мерой Лебега (Жордана) $\mu_*^{(J)}$ множества A называется число*

$$\mu_*^{(J)}(A) = 1 - \mu^*_{(J)}(K_I \backslash A).$$

Теорема 4. *(Основное свойство внутренней меры). Для любого множества A его внутренняя мера Лебега (Жордана) не превосходит его внешней меры Лебега (Жордана):*

$$\mu_*^{(J)}(A) \leq \mu^*_{(J)}(A).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольные счетные (конечные) покрытия множеств A и его дополнения $K_I \backslash A$:

$$A \subset \cup_i M_i, \quad (K_I \backslash A) \subset \cup_j N_j.$$

Тогда

$$(\cup_i M_i) \cup (\cup_j N_j) \supset K_I,$$

откуда по неравенству (1) из предыдущего параграфа $\sum_i |M_i| + \sum_j |N_j| \geq 1$. Возьмем в этом неравенстве точные нижние грани по покрытиям. Получим $\mu^*_{(J)}(A) + \mu^*_{(J)}(K_I \backslash A) \geq 1$, что и дает требуемое. ■

§3. Измеримые множества. Основные свойства мер Жордана и Лебега.

В начале этого параграфа, как и в предыдущем, рассматриваем только подмножества куба $K_I = \prod_{i=1}^n [-1/2, 1/2]$.

Определение 6. *Множество A называется измеримым по Лебегу (Жордану), если его внутренняя мера Лебега (Жордана) совпадает с его внешней мерой Лебега (Жордана). Общее значение этих мер тогда называется мерой Лебега (Жордана) $\mu_{(J)}(A)$:*

$$\mu_{(J)}(A) = \mu^*_{(J)}(A) = \mu^{(J)}_*(A).$$

Отметим следующие непосредственно вытекающие из определений свойства.

Элементарные множества M измеримы по Лебегу и Жордану, причем их мера по Лебегу и по Жордану совпадает с объемом:

$$\mu(M) = \mu_J(M) = |M|.$$

Измеримые по Жордану множества измеримы и по Лебегу, причем их меры Жордана и Лебега совпадают:

$$\mu^J_*(A) = \mu^*_J(A) \quad \Rightarrow \quad \mu(A) = \mu_J(A).$$

Теорема 5. *(Критерий измеримости) Множество A измеримо по Лебегу (Жордану) тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует элементарное множество M_ε такое, что*

$$\mu^*_{(J)}\left(A \bigtriangleup M_\varepsilon\right) < \varepsilon.$$

Доказательство. Достаточность.

Здесь и ниже обозначим через B' дополнение произвольного множества $B \subset K_I$ до куба K_I: $B' = K_I \backslash B$. Тогда

$$1 = \mu^*_{(J)}(K_I) \leq \mu^*_{(J)}(A) + \mu^*_{(J)}(A'). \tag{3}$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Можно считать, что элементарное множество M_ε из предположения теоремы такое, что $M_\varepsilon \subset K_I$ (в противном случае берем вместо M_ε элементарное множество $M_\varepsilon \cap K_I$). Из свойств объема элементарных множеств и его совпадения с (внешними и внутренними) мерами

$$1 = \mu^*_{(J)}(K_I) = \mu^*_{(J)}(M_\varepsilon) + \mu^*_{(J)}(M'_\varepsilon). \tag{4}$$

Из включений

$$A \subset M_\varepsilon \cup (A \bigtriangleup M_\varepsilon), \quad A' \subset M'_\varepsilon \cup (A' \bigtriangleup M'_\varepsilon)$$

следуют неравенства

$$\mu^*_{(J)}(A) \le \mu^*_{(J)}(M_\varepsilon) + \mu^*_{(J)}(A \triangle M_\varepsilon), \quad \mu^*_{(J)}(A') \le \mu^*_{(J)}(M'_\varepsilon) + \mu^*_{(J)}(A' \triangle M'_\varepsilon).$$

Складывая два последних неравенства, получим, с учетом (3), (4) и предположения теоремы

$$1 \le \mu^*_{(J)}(A) + \mu^*_{(J)}(A') \le \mu^*_{(J)}(M_\varepsilon) + \mu^*_{(J)}(M'_\varepsilon) + 2\mu^*_{(J)}(A \triangle M_\varepsilon) < 1 + 2\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, это завершает доказательство достаточности.

Необходимость.

Пусть A измеримо по Лебегу (Жордану), т.е.

$$\mu^*_{(J)}(A) + \mu^*_{(J)}(A') = 1. \tag{5}$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению внешних мер найдутся такие счетные (конечные) покрытия множеств A и A' элементарными множествами $P_l, l = 1, 2, \ldots, (r); Q_l, l = 1, 2, \ldots, (s)$ соответственно (причем все эти множества можно считать подмножествами K_I), что

$$\sum_{l=1}^{+\infty(r)} |P_l| \le \mu^*_{(J)}(A) + \varepsilon, \tag{6}$$

$$\sum_{l=1}^{+\infty(s)} |Q_l| \le \mu^*_{(J)}(A') + \varepsilon. \tag{7}$$

Для меры Лебега заметим также, что из неравенств (6),(7) следует сходимость рядов в их левых частях, откуда следует существование натуральнах чисел r, s таких, что

$$\sum_{l=r+1}^{+\infty} |P_l| \le \varepsilon, \sum_{l=s+1}^{+\infty} |Q_l| \le \varepsilon. \tag{8}$$

Введем обозначения $P_\varepsilon = \cup_{l=1}^r P_l$, $Q_\varepsilon = \cup_{l=1}^s Q_l$. Для завершения доказательства теоремы достаточно установить неравенство

$$\mu^*_{(J)}\left(A \triangle P_\varepsilon\right) < 6\varepsilon. \tag{9}$$

Прежде всего отметим, что из определения симметрической разности и свойств внешних мер следует неравенство

$$\mu^*_{(J)}\left(A \triangle P_\varepsilon\right) \le \mu^*_{(J)}\left(A \setminus P_\varepsilon\right) + \mu^*_{(J)}\left(P_\varepsilon \setminus A\right). \tag{10}$$

Далее из включения $A \setminus P_\varepsilon \subset \cup_{l=r+1}^{+\infty} P_l$ (для меры Жордана $A \setminus P_\varepsilon = \emptyset$) с учетом (8) получаем

$$\mu^*_{(J)}\left(A \setminus P_\varepsilon\right) < \varepsilon. \tag{11}$$

Аналогично

$$\mu^*_{(J)}\left(A' \setminus Q_\varepsilon\right) < \varepsilon. \tag{12}$$

Из включения $P_\varepsilon \setminus A \subset (P_\varepsilon \cap Q_\varepsilon) \bigcup (Q'_\varepsilon \setminus A)$ и (5),(6),(7) и (12) следует цепочка неравенств

$$\mu^*_{(J)}\left(P_\varepsilon \setminus A\right) \leq \mu^*_{(J)}\left(P_\varepsilon \cap Q_\varepsilon\right) + \mu^*_{(J)}\left(Q'_\varepsilon \setminus A\right) = |P_\varepsilon \cap Q_\varepsilon| + \mu^*_{(J)}\left(A' \setminus Q_\varepsilon\right) =$$

$$= |P_\varepsilon| + |Q_\varepsilon| - |P_\varepsilon \cup Q_\varepsilon| + \mu^*_{(J)}\left(A' \setminus Q_\varepsilon\right) < \sum_{l=1}^{+\infty(r)} |P_l| + \sum_{l=1}^{+\infty(s)} |Q_l| - |P_\varepsilon \cup Q_\varepsilon| + \varepsilon \leq$$

$$\leq 1 + 3\varepsilon - |P_\varepsilon \cup Q_\varepsilon|.$$

Теперь для завершения доказательства (9) (см. также (10) и (11)) осталось установить неравенство $|P_\varepsilon \cup Q_\varepsilon| \geq 1 - 2\varepsilon$. Это неравенство очевидно для меры Жордана, так как тогда $|P_\varepsilon \cup Q_\varepsilon| = 1$, а для меры Лебега доказывается цепочкой неравенств

$$1 = |K_I| \leq \mu^*(P_\varepsilon \cup Q_\varepsilon) + \mu^*\left(\cup_{l=r+1}^{+\infty} P_l\right) + \mu^*\left(\cup_{l=s+1}^{+\infty} Q_l\right) < |P_\varepsilon \cup Q_\varepsilon| + 2\varepsilon$$

с учетом (8).

■

Теорема 6. *Семейство измеримых по Лебегу (Жордану) подмножеств K_I образует алгебру множеств.*

Доказательство. Прежде всего докажем, что объединение двух измеримых по Лебегу (Жордану) множеств A, B также измеримо по Лебегу (Жордану). Для этого воспользуемся только что доказанным критетием измеримости. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют элементарные множества $M_\varepsilon, N_\varepsilon$ такие, что

$$\mu^*_{(J)}\left(A \triangle M_\varepsilon\right) < \varepsilon, \quad \mu^*_{(J)}\left(B \triangle N_\varepsilon\right) < \varepsilon.$$

Положим $P_\varepsilon = M_\varepsilon \cup N_\varepsilon$. Тогда из включения $(A \cup B) \triangle P_\varepsilon \subset (A \triangle M_\varepsilon) \cup (B \triangle N_\varepsilon)$ следует неравенство $\mu^*_{(J)}\left((A \cup B) \triangle P_\varepsilon\right) < 2\varepsilon$, доказывающее требуемое.

Измеримость дополнения A' произвольного измеримого множества A до куба K_I следует непосредственно из определения, а тогда измеримость пересечения, разности и симметрической разности двух измеримых по Лебегу (Жордану) множеств следует из равенств

$$A \cap B = (A' \cup B')', \quad A \backslash B = A \cap B', \quad A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) . \blacksquare$$

Теорема 7. *(Конечная аддитивность мер Лебега и Жордана). Если непересекающиеся множества $A_1, \ldots, A_m$ измеримы по Лебегу (Жордану), то*

$$\mu^*_{(J)} \left(\bigsqcup_{l=1}^{m} A_l = \sum_{l=1}^{m} \mu^*_{(J)}(A_l) \right).$$

Доказательство. Доказательство достаточно провести для $m = 2$. Согласно критерию измеримости для любого $\varepsilon > 0$ существуют элементарные множества $M_{i,\varepsilon}, i = 1, 2$, такие, что (предыдущая теорема позволяет не писать звездочки, поскольку все внешние меры совпадают с мерами)

$$\mu_{(J)} \left(A_i \triangle M_{i,\varepsilon} \right) < \varepsilon, \quad i = 1, 2.$$

Включения

$$M_{i,\varepsilon} \subset A_i \cup \left(A_i \triangle M_{i,\varepsilon} \right), \quad A_i \subset M_{i,\varepsilon} \cup \left(A_i \triangle M_{i,\varepsilon} \right), \quad i = 1, 2$$

влекут соотношения

$$M_{1,\varepsilon} \cup M_{2,\varepsilon} \subset (A_1 \cup A_2) \cup (A_1 \triangle M_{1,\varepsilon}) \cup (A_2 \triangle M_{2,\varepsilon}),$$

$$A_1 \cup A_2 \subset (M_{1,\varepsilon} \cup M_{2,\varepsilon}) \cup (A_1 \triangle M_{1,\varepsilon}) \cup (A_2 \triangle M_{2,\varepsilon}).$$

Все эти включения вместе дают, по свойству внешних мер, неравенства

$$\mu_{(J)} \left(M_{i,\varepsilon} \right) < \mu_{(J)} \left(A_i \right) + \varepsilon, \quad \mu_{(J)} \left(A_i \right) < \mu_{(J)} \left(M_{i,\varepsilon} \right) + \varepsilon, \quad i = 1, 2,$$

$$\mu_{(J)} \left(M_{1,\varepsilon} \cup M_{2,\varepsilon} \right) < \mu_{(J)} \left(A_1 \cup A_2 \right) + 2\varepsilon,$$

$$\mu_{(J)} \left(A_1 \cup A_2 \right) < \mu_{(J)} \left(M_{1,\varepsilon} \cup M_{2,\varepsilon} \right) + 2\varepsilon.$$

Полученные неравенства можно переписать в следующем виде:

$$\left| \mu_{(J)} \left(A_i \right) - \mu_{(J)} \left(M_{i,\varepsilon} \right) \right| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \tag{13}$$

$$\left| \mu_{(J)} \left(A_1 \cup A_2 \right) - \mu_{(J)} \left(M_{1,\varepsilon} \cup M_{2,\varepsilon} \right) \right| < 2\varepsilon. \tag{14}$$

Далее включение

$$M_{1,\varepsilon} \cap M_{2,\varepsilon} \subset (A_1 \cup (A_1 \triangle M_{1,\varepsilon})) \bigcap (A_2 \cup (A_2 \triangle M_{2,\varepsilon})) =$$

$$= \Big((A_1 \cup (A_1 \triangle M_{1,\varepsilon})) \bigcap (A_2 \triangle M_{2,\varepsilon})\Big) \bigcup ((A_1 \triangle M_{1,\varepsilon}) \cap A_2) \subset$$

$$\subset (A_1 \triangle M_{1,\varepsilon}) \bigcup (A_2 \triangle M_{2,\varepsilon})$$

доказывает неравенство

$$|M_{1,\varepsilon} \cap M_{2,\varepsilon}| < 2\varepsilon.$$

Теперь пункт 2 теоремы 1 §1 дает неравенство

$$||M_{1,\varepsilon} \cup M_{2,\varepsilon}| - |M_{1,\varepsilon}| - |M_{2,\varepsilon}|| < 2\varepsilon.$$

Отсюда с учетом (13) и (14) и предшествующим им неравенств получаем

$$\mu_{(J)}\left(A_1 \cup A_2\right) = \mu^*_{(J)}\left(A_1 \cup A_2\right) \le \mu^*_{(J)}(A_1) + \mu^*_{(J)}(A_2) = \mu_{(J)}(A_1) + \mu_{(J)}(A_2) <$$

$$< \mu_{(J)}\left(M_{1,\varepsilon}\right) + \mu_{(J)}\left(M_{2,\varepsilon}\right) + 2\varepsilon = |M_{1,\varepsilon}| + |M_{2,\varepsilon}| + 2\varepsilon < |M_{1,\varepsilon} \cup M_{2,\varepsilon}| + 4\varepsilon =$$

$$= \mu_{(J)}\left(M_{1,\varepsilon} \cup M_{2,\varepsilon}\right) + 4\varepsilon < \mu_{(J)}\left(A_1 \cup A_2\right) + 6\varepsilon.$$

Использование произвольности $\varepsilon > 0$ завершает доказательство.■

Теорема 8. *Если множества* $A_1, A_2, \ldots,$ *измеримы по Лебегу, то их объединение* $A = \cup_{l=1}^{+\infty} A_l$ *также измеримо по Лебегу.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots$. Поскольку при любом натуральном L измеримое по Лебегу множество $\sqcup_{l=1}^{L} A_l$ является подмножеством A, по свойству внешней меры $\sum_{l=1}^{L} \mu(A_l) \le \mu^*(A)$. Отсюда в силу произвольности L получаем $\sum_{l=1}^{+\infty} \mu(A_l) \le \mu^*(A)$. Следовательно, ряд $\sum_{l=1}^{+\infty} \mu(A_l)$ сходится, и, значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число r, что

$$\sum_{l=r+1}^{+\infty} \mu(A_l) < \varepsilon/2. \tag{15}$$

Применяя критерий измеримости к каждому из множеств $A_1, \ldots, A_r$, найдем элементарные множества $M_{i,\varepsilon}, i = 1, \ldots, r$ такие, что

$$\mu\left(A_i \triangle M_{i,\varepsilon}\right) < \varepsilon/(2r), \quad i = 1, \ldots, r. \tag{16}$$

Обозначим через M_ε элементарное множество $M_\varepsilon = \cup_{i=1}^r M_{i,\varepsilon}$. Цепочка включений

$$A \triangle M_\varepsilon = (A \setminus M_\varepsilon) \cup (M_\varepsilon \setminus A) \subset (\cup_{i=1}^r A_i \setminus M_\varepsilon) \bigcup \left(\cup_{l=r+1}^{+\infty} A_l\right) \bigcup (M_\varepsilon \setminus \cup_{i=1}^r A_i) \subset$$

$$\subset \left(\bigcup_{i=1}^r (A_i \setminus M_{i,\varepsilon})\right) \bigcup \left(\bigcup_{l=r+1}^{+\infty} A_l\right) \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^r (M_{i,\varepsilon} \setminus A_i)\right) =$$

$$= \left(\bigcup_{i=1}^r (A_i \triangle M_{i,\varepsilon})\right) \bigcup \left(\bigcup_{l=r+1}^{+\infty} A_l\right)$$

позволяет вывести неравенство

$$\mu^*(A \triangle M_\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^r \mu^*(A_i \triangle M_{i,\varepsilon}) + \sum_{l=r+1}^{+\infty} \mu^*(A_l) < \varepsilon,$$

которое по критерию измеримости с помощью неравенств (15), (16) и доказывает измеримость по Лебегу множества A.

Чтобы свести общий случай к уже разобранному, представим множество A в виде

$$A = \cup_{l=1}^{+\infty} A_l = \sqcup_{l=1}^{+\infty} \tilde{A}_l,$$

где $\tilde{A}_l = A_l \setminus \cup_{i=1}^{l-1} A_i$. ■

Доказанная теорема означает, по определению, что алгебра измеримых по Лебегу подмножеств куба K_I является σ-алгеброй.

Теорема 9. *($\sigma-$аддитивность меры Лебега).*

Если непересекающиеся множества $A_1, A_2, \ldots,$ измеримы по Лебегу, то

$$\mu(\sqcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i).$$

Доказательство. Обозначим через A объединение $A = \sqcup_{l=1}^{+\infty} A_l$. По предыдущей теореме оно измеримо по Лебегу. Для любого натурального числа r из включения $\sqcup_{l=1}^r A_l \subset A$ и конечной аддитивности меры Лебега получаем неравенство $\sum_{l=1}^r \mu(A_l) \leq \mu(A)$. С другой стороны, по свойству внешней меры Лебега

$$\mu(A) = \mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu^*(A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i). ■$$

Определение 7. *Назовем супремумом последовательности множеств их объединение*

$$\sup_m\{A_m\} = \cup_{m=1}^{+\infty} A_m,$$

инфимумом последовательности множеств их пересечение

$$\inf_m\{A_m\} = \cap_{m=1}^{+\infty} A_m.$$

Назовем пределом возрастающей последовательности множеств их супремум: если $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, *то* $\lim_{m\to\infty} A_m = \sup_m\{A_m\}$, *аналогично для убывающей последовательности: если* $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, *то* $\lim_{m\to\infty} A_m = \inf_m\{A_m\}$. *Верхним пределом последовательности множеств называется, подобно случаю числовых последовательностей, выражение*

$$\overline{\lim}_{m\to\infty} A_m = \lim_{m\to\infty} \sup_{k\geq m}\{A_k\},$$

аналогично определяется нижний предел:

$$\underline{\lim}_{m\to\infty} A_m = \lim_{m\to\infty} \inf_{k\geq m}\{A_k\}.$$

Если множества $\overline{\lim}_{m\to\infty} A_m$ *и* $\underline{\lim}_{m\to\infty} A_m$ *(которые существуют для любой последовательности множеств* $A_1, A_2, \dots,$*) равны, то это множество называется пределом последовательности множеств* $A_1, A_2, \dots$*:*

$$\lim_{m\to\infty} A_m = \overline{\lim}_{m\to\infty} A_m = \underline{\lim}_{m\to\infty} A_m.$$

Например, последовательность отрезков $\{[1/m, 1+1/m]\}_{m=1}^{\infty}$ не является ни возрастающей, ни убывающей, но она имеет предел:

$$\sup_{k\geq m}\{[1/k, 1+1/k]\} = (0, 1+1/m]; \quad \inf_{k\geq m}\{[1/k, 1+1/k]\} = [1/m, 1],$$

$$\lim_{m\to\infty}[1/m, 1+1/m] = \cap_{m=1}^{+\infty}(0, 1+1/m] = \cup_{m=1}^{+\infty}[1/m, 1] = (0, 1].$$

Теорема 10. *(Непрерывность меры Лебега). Если последовательность измеримых по Лебегу подмножеств* $A_1, A_2, \dots,$ *куба* K_I *имеет предел* $A = \lim_{m\to\infty} A_m$, *то этот предел измерим по Лебегу, причем*

$$\mu\left(\lim_{m\to\infty} A_m\right) = \lim_{m\to\infty} \mu(A_m).$$

Доказательство. Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 2. *Для возрастающей последовательности измеримых по Лебегу множеств $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$ ее предел $\lim_{m\to\infty} B_m = \sup_m\{B_m\}$ измерим по Лебегу, причем*

$$\mu\left(\lim_{m\to\infty} B_m\right) = \lim_{m\to\infty} \mu(B_m) = \sup_m\{\mu(B_m)\}.$$

Доказательство. Положим $\tilde{B}_m = B_m \setminus B_{m-1}, B_0 = \emptyset$. Тогда $\tilde{B}_m \cap \tilde{B}_k = \emptyset$ при $k \neq m$ (для $k > m$ $\tilde{B}_k \cap B_{k-1} = \emptyset$, $\tilde{B}_m \subset B_m \subset B_{k-1}$). Так как $\cup_{m=1}^{+\infty} B_m = \sqcup_{m=1}^{+\infty}\tilde{B}_m$, то из σ-аддитивности меры Лебега получаем

$$\mu\left(\lim_{m\to\infty} B_m\right) = \mu\left(\cup_{m=1}^{+\infty} B_m\right) = \mu\left(\sqcup_{m=1}^{+\infty}\tilde{B}_m\right) = \sum_{m=1}^{+\infty}\mu(\tilde{B}_m) =$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty}(\mu(B_m) - \mu(B_{m-1})) = \lim_{m\to\infty}\mu(B_m).$$

■

Лемма 3. *Для убывающей последовательности измеримых по Лебегу подмножеств $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ куба K_I ее предел $\lim_{m\to\infty} B_m = \inf_m\{B_m\}$ измерим по Лебегу, причем*

$$\mu\left(\lim_{m\to\infty} B_m\right) = \lim_{m\to\infty} \mu(B_m) = \inf_m\{\mu(B_m)\}.$$

Доказательство. Положим $\tilde{B}_m = B_1 \setminus B_m$. Тогда последовательность множеств $\{\tilde{B}_m\}_{m=1}^{+\infty}$– возрастающая последовательность измеримых по Лебегу множеств и по предыдущей лемме ее предел $\cup_{m=1}^{+\infty}\tilde{B}_m = B_1 \setminus \cap_{m=1}^{+\infty} B_m$ измерим, и справедливы равенства

$$\mu\left(\cup_{m=1}^{+\infty}\tilde{B}_m\right) = \lim_{m\to\infty}\mu(\tilde{B}_m) = \mu(B_1) - \lim_{m\to\infty}\mu(B_m) = \mu(B_1) - \mu\left(\cap_{m=1}^{+\infty} B_m\right). \blacksquare$$

Лемма 4. *Для любой последовательности измеримых по Лебегу подмножеств $A_1, A_2, \ldots,$ куба K_I ее верхний предел измерим, и справедливо неравенство*

$$\mu\left(\overline{\lim}_{m\to\infty} A_m\right) \geq \overline{\lim}_{m\to\infty}\mu(A_m).$$

Доказательство. Обозначим $B_m = \cup_{k=m}^{+\infty} A_k$. Тогда последовательность $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ удовлетворяет условиям предыдущей леммы, и поэтому ее предел (по определению совпадающий с верхним пределом исходной последовательности) измерим, причем

$$\mu\left(\lim_{m\to\infty} B_m\right) = \lim_{m\to\infty}\mu(B_m).$$

Но $\mu(B_m) = \mu(\cup_{k=m}^{+\infty} A_k) \geq \mu(A_m)$ для любого $m \in \mathbb{N}$, откуда по свойствам верхнего предела числовых последовательностей $\lim_{m\to\infty} \mu(B_m) \geq \overline{\lim}_{m\to\infty}\mu(A_m)$. ■

Лемма 5. *Для любой последовательности измеримых по Лебегу подмножеств $A_1, A_2, \ldots$, куба K_I ее нижний предел измерим, и справедливо неравенство*

$$\mu\left(\underline{\lim}_{m\to\infty} A_m\right) \leq \underline{\lim}_{m\to\infty}\mu(A_m).$$

Доказательство. Обозначим $B_m = \cap_{k=m}^{+\infty} A_k$. Тогда последовательность $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$ удовлетворяет условиям первой леммы, и поэтому ее предел (по определению совпадающий с нижним пределом исходной последовательности) измерим, причем

$$\mu\left(\lim_{m\to\infty} B_m\right) = \lim_{m\to\infty} \mu(B_m).$$

Но $\mu(B_m) = \mu(\cap_{k=m}^{+\infty} A_k) \leq \mu(A_m)$ для любого $m \in \mathbb{N}$, откуда по свойствам нижнего предела числовых последовательностей $\lim_{m\to\infty} \mu(B_m) \leq \underline{\lim}_{m\to\infty}\mu(A_m)$. ■

Для завершения доказательства теоремы остается записать цепочку неравенств, использующую две последние леммы и наличие предела у последовательности $A_1, A_2, \ldots$:

$$\overline{\lim}_{m\to\infty}\mu(A_m) \leq \mu\left(\overline{\lim}_{m\to\infty} A_m\right) = \mu\left(\lim_{m\to\infty} A_m\right) =$$
$$= \mu\left(\underline{\lim}_{m\to\infty} A_m\right) \leq \underline{\lim}_{m\to\infty}\mu(A_m),$$

и заметить, что по свойству нижнего и верхнего пределов числовой последовательности $\underline{\lim}_{m\to\infty}\mu(A_m) \leq \overline{\lim}_{m\to\infty}\mu(A_m)$, откуда следует, что в этой цепочке неравенств вместо всех неравенств имеет место знак равенства. ■

Заметим теперь, что вместо куба K_I можно взять ячейку $I = \prod_{i=1}^{n}[0,1)$ или ее целочисленные сдвиги $I_{\vec{m}} = I + \vec{m}$, $\vec{m} = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$. Все ранее доказанные свойства мер очевидным образом переносятся и на случай подмножеств каждой из этих ячеек. Кроме того, $\mathbb{R}^n = \sqcup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^n} I_{\vec{m}}$, в связи с чем естественно считать произвольное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ измеримым по Лебегу (Жордану) тогда и только тогда, когда измеримы по Лебегу (Жордану) все множества $A \cap I_{\vec{m}}$, $\vec{m} \in \mathbb{Z}^n$, при этом под (возможно, бесконечной) мерой Лебега (Жордана) понимать сумму соответствующих мер: $\mu_{(J)}(A) = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^n} \mu_{(J)}(A \cap I_{\vec{m}})$.

Заметим, что отсутствие свойства σ-аддитивности для меры Жордана приводит к тому, что чаще всего в определении измеримости и меры Жордана дополнительно предполагается, что лишь конечное число множеств из $A \cap I_{\vec{m}}$, $\vec{m} \in \mathbb{Z}^n$ непусто.

Нетрудно проверить, что данное определение мер согласовано с ранее введенным понятием объема в случае элементарных множеств. Кроме того, все ранее полученные результаты этого параграфа справедливы и для подмножеств произвольного фиксированного ограниченного измеримого по Лебегу (Жордану). Более того, все предыдущие теоремы (кроме критерия измеримости и непрерывности меры) справедливы (для случая меры Лебега) и для произвольных измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$. Пример множеств $A_m = [m, +\infty) \subset \mathbb{R}, \mu(A_m) = \infty$, $\mu(\lim_{m\to\infty} A_m) = \mu(\emptyset) = 0 \neq \lim_{m\to\infty} \mu(A_m)$, показывает, что свойство непрерывности для множеств бесконечной меры может нарушаться.

Отметим, что, поскольку объем элементарных множеств не меняется при сдвигах, то тем же свойством обладает и мера Жордана (Лебега) для измеримых множеств:

$$\mu_{(J)}(A + \vec{x}) = \mu_{(J)}(A), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Заметим также, что для ограниченных множеств можно ввести другое определение внутренней меры Жордана, что вместе с очевидно эквивалентным ранее сделанному определению (для подмножеств куба K_I) внешней меры дает равенства

$$\mu_J^*(A) = \inf_{M \supset A} |M|, \quad \mu_*^J(A) = \sup_{M \subset A} |M|.$$

Теорема 11. *(Структура открытых множеств в $\mathbb{R}^n$).*

Всякое открытое множество G в $\mathbb{R}^n$ представимо в виде счетного объединения непересекающихся брусьев.

Доказательство. Представим $\mathbb{R}^n$ в виде объединения непересекающихся сдвигов уменьшающихся ячеек:

$$\mathbb{R}^n = \sqcup_{\vec{l} \in \mathbb{Z}^n} I_{\vec{l}} = \sqcup_{\vec{l} \in \mathbb{Z}^n} \left(\prod_{k=1}^{n} [l_k, l_k + 1) \right),$$

$$\mathbb{R}^n = \sqcup_{\vec{l} \in \mathbb{Z}^n} \left(\prod_{k=1}^{n} \left[\frac{l_k}{2^m}, \frac{l_k + 1}{2^m} \right) \right) = \sqcup_{\vec{l} \in \mathbb{Z}^n} P_{\vec{l},m}.$$

Обозначим

$$M_0 = \sqcup_{\vec{l}: P_{\vec{l},0} \subset G} P_{\vec{l},0}, \quad M_s = \sqcup_{\vec{l}: P_{\vec{l},s} \subset G \setminus \cup_{k=0}^{s-1} M_k} P_{\vec{l},s}.$$

По построению очевидно включение

$$\sqcup_{s=0}^{\infty} M_s \subset G,$$

причем $\sqcup_{s=0}^{\infty} M_s$ является счетным объединением непересекающихся (возможно вырожденных) брусьев. Докажем обратное включение. Пусть $\vec{x}_0 \in G$. Так как G открыто, найдется положительное число ε такое, что каждое $\vec{x}, |\vec{x}-\vec{x}_0| < \varepsilon$ принадлежит G. Выберем $s_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ так, чтобы $\sqrt{n}2^{-s_0} < \varepsilon$. Тогда найдется $\vec{l}_0$ такое, что $\vec{x}_0 \in P_{\vec{l}_0, s_0}$. Элементарные геометрические соображения (теорема Пифагора) показывают, что каждая точка $\vec{x} \in P_{\vec{l}_0, s_0}$ удовлетворяет неравенству $|\vec{x} - \vec{x}_0| < \varepsilon$, а, следовательно, в силу выбора ε, $\vec{x} \in G$.

■

Следствие 1. *Все открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$ измеримы по Лебегу.*

Следствие 2. *Для любого открытого ограниченного множества G в $\mathbb{R}^n$ $\mu_*^J(G) = \mu(G)$. Для любого замкнутого ограниченного множества F в $\mathbb{R}^n$ $\mu_J^*(F) = \mu(F)$.*

Доказательство оставляем в качестве упражнения.

Теорема 12. *(Структура измеримых по Лебегу множеств в $\mathbb{R}^n$).*

Пусть A - измеримое по Лебегу множество конечной меры. Тогда оно представимо в виде

$$A = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j} \right) \setminus A_0,$$

где $A_{i,j}, i = 1, 2, \ldots; j = 1, 2, \ldots,$ - элементарные открытые множества, причем $A_{i,1} \subset A_{i,2} \subset \ldots, i = 1, 2, \ldots;$ а $B_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}, i = 1, 2, \ldots,$ таковы, что $B_1 \supset B_2 \supset \ldots,$ $\mu(B_1) < \infty$, $\mu(A_0) = 0$.

Доказательство. По определению внешней меры Лебега (объединяя соответствующие элементарные множества для всех сдвигов ячеек) для любого $i \in \mathbb{N}$ найдется множество C_i, представимое в виде счетного объединения элементарных множеств, такое, что $C_i \supset A$ и $\mu(C_i \setminus A) < 1/i$. Счетное объединение элементарных множеств является и счетным объединением брусьев, причем, беря при необходимости подходящие ε-расширения этих брусьев, можно считать, что $C_i = \cup_{j=1}^{\infty} D_{i,j}$, где все $D_{i,j}$ - открытые брусья. Положим теперь $B_i = \cap_{r=1}^{i} C_r$. По построению $B_i = \cup_{j=1}^{\infty} E_{i,j}$, где все $E_{i,j}$ - открытые брусья. Но тогда $A_{i,j} = \cup_{l=1}^{j} E_{i,l}$ - элементарные открытые множества, причем $\mu(B_1) = \mu(C_1) < \mu(A) + 1 < \infty$ и для последовательностей множеств $A_{i,j}, i = 1, 2, \ldots; j = 1, 2, \ldots,$ и $B_i, i = 1, 2, \ldots$ выполнены все требуемые включения.

Для завершения доказательства осталось проверить, что множество $A_0 = \cap_{i=1}^{\infty} B_i \setminus A$ имеет нулевую меру Лебега:

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \setminus A\right) = \lim_{i\to\infty}(\mu(B_i) - \mu(A)) \leq \overline{\lim}_{i\to\infty}(\mu(C_i) - \mu(A)) = \overline{\lim}_{i\to\infty}\mu(C_i \setminus A) = 0. \blacksquare$$

Следствие 3. *Каждое измеримое по Лебегу множество A представимо в любом из следующих видов:*

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i \setminus P_1, \quad A = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j \cup P_2,$$

$G_1 \supset G_2 \supset \ldots$ *- открытые,* $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$ *- замкнутые,* $\mu(P_1) = \mu(P_2) = 0$.

Доказательство. Для множеств конечной меры первая часть уже доказана. В общем случае воспользуемся уже доказанной частью для пересечений $A \cap I_{\vec{m}}, \vec{m} \in \mathbb{Z}^n$, и объединим полученные результаты. Для даказательства второй части теперь достаточно перейти к дополнениям до всего пространства $\mathbb{R}^n$. $\blacksquare$

Отметим, что две последние теоремы позволяют строить меру Лебега другим способом. Точнее, пользуясь теоремой о структуре открытых множеств, можно определить меру Лебега любого открытого множества как (возможно, бесконечную) сумму объемов составляющих его элементарных множеств. Далее через дополнение до подходящего куба определяется мера любого компактного множества, после чего следующее утверждение можно рассматривать и как определение внешней и внутренней мер Лебега.

Замечание 1. *Для любого ограниченного множества A справедливы равенства*

$$\mu^*(A) = \inf_{G\supset A} \mu(G), \quad \mu_*(A) = \sup_{F\subset A} \mu(F),$$

где инфимум и супремум берутся по всем открытым $G \supset A$ *и замкнутым* $F \subset A$ *множествам соответственно.*

Теорема 13. *(Критерий измеримости по Жордану).*

Ограниченное множество A измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда мера Жордана его границы равна нулю: $\mu_J(\partial A) = 0$.

Доказательство. Необходимость.

В силу отмеченной ранее возможности другого определения меры Жордана для любого положительного ε найдутся элементарные множества E_1, E_2 такие, что $E_1 \subset A \subset E_2$ и $|E_2 \setminus E_1| < \varepsilon$. При этом, поскольку объем внутренности $\mathrm{int}\, E$ и замыкания $\bar{E}$ элементарного множества E совпадают с объемом самого этого множества, мы можем считать, что E_1 открыто, а E_2 - замкнуто. Но тогда $\partial A = \bar{A} \setminus \mathrm{int}\, A \subset E_2 \setminus E_1$, откуда $\mu_J^*(\partial A) < \varepsilon$. Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $\mu_J^*(\partial A) = 0$, что и требовалось.

Достаточность.

В силу следствия 2 к теореме о структуре открытых множеств $\mu_J^*(A) \leq \mu_J^*(\bar{A}) = \mu(\bar{A}) = \mu(\mathrm{\ int\ } A) + \mu(\partial A) = \mu(\mathrm{\ int\ } A)$. Учитывая, что внутренность - открытое множество, отсюда имеем $\mu_*^J(A) \geq \mu_*^J(\mathrm{\ int\ } A) = \mu(\mathrm{\ int\ } A) \geq \mu_J^*(A)$. ∎

Пример. Рассмотрим отрезок $I_0 = [0,1]$. Разобъем его на три равных отрезка $I_{1,1} = [0,1/3], [1/3,2/3], I_{1,2} = [2/3,1]$ и удалим внутренность среднего отрезка $J_1 = (1/3,2/3)$. Получим множество $I_1 = I_{1,1} \cup I_{1,2}$, состоящее из двух отрезков. Повторим этот процесс на каждом из этих отрезков. Получим множество $I_2 = I_{2,1} \cup I_{2,2} \cup I_{2,3} \cup I_{2,4}$, состоящее из четырех отрезков, полученных из I_1 удалением двух интервалов $J_2 = J_{2,1} \cup J_{2,2}$, $I_{2,1} \cup I_{2,2} = I_{1,1} \setminus J_{2,1}$, $I_{2,3} \cup I_{2,4} = I_{1,2} \setminus J_{2,2}$. Продолжим этот процесс бесконечно много раз. Канторовым множеством называется множество $P = \cap_{i=0}^{\infty} I_i$. Заметим, что $|J_1| = 1/3$, $|J_2| = 2/9$, $|J_3| = 4/27, \ldots$, и, значит,

$$|I_i| = |I_0| - \sum_{k=1}^{i} |J_k| = 1 - (1/2 + 2/9 + \ldots + 2^{i-1}/3^{i-1}) = 1 - \frac{1}{3}\frac{1-(2/3)^i}{1-(2/3)}.$$

По непрерывности меры Лебега $\mu(P) = \lim_{i\to\infty} |I_i| = 0$. Канторово множество состоит из тех и только тех точек отрезка $[0,1]$, которые можно представить в виде бесконечной дроби в троичной системе счисления без использования единиц. Значит, оно равномощно множеству всевозможных бесконечных двоичных дробей на отрезке $[0,1]$ (достаточно поставить в соответствие каждой троичной дроби двоичную, получающуюся заменой «троичной 2» на «двоичную 1»), а следовательно имеет мощность континуума.

Канторово множество компактно, следовательно, $\mu_J^*(P) = \mu(P) = 0$, т.е. оно измеримо и по Жордану. Нетрудно модифицировать его построение, чтобы получить неизмеримое по Жордану компактное множество. Для этого достаточно разбивать на каждом шаге отрезки на пять равных частей, и удалять внутренность средней части. Тогда $|\tilde{J}_1| = 1/5$, $|\tilde{J}_2| = 2/25$, $|\tilde{J}_3| = 4/125, \ldots$, и для получающегося в результате удаления всех $\tilde{J}_k$ множества $\tilde{P}$ имеем $\mu^*_J(\tilde{P}) = \mu(\tilde{P}) = 2/3$. В то же время множество $\tilde{P}$ нигде не плотно (в частности, не содержит ни одного невырожденного интервала, а значит не содержит непустых элементарных множеств), поэтому $\mu^J_*(\tilde{P}) = 0$.

§4. Отображения измеримых множеств.

Определение 8. *Отображение $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ называется (непрерывно) дифференцируемым во внутренней точке $\vec{x}_0 \in D$, если $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ и функции f_i, $i = 1, \ldots, m$, (непрерывно) дифференцируемы в точке $\vec{x}_0$. При этом производной отображения $\vec{f}$ в точке $\vec{x}_0$ называется соответствующая матрица Якоби*

$$\vec{f}'(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\bigg|_{\vec{x}_0} \right)_{i=1,j=1}^{m,n}.$$

Отображение $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$, являющееся взаимно однозначным, непрерывно дифференцируемым и неособым (т.е. для всех $\vec{x} \in D$ $det\vec{f}'(\vec{x}) \neq 0$), называется диффеоморфизмом.

Примеры.

1. В случае $m = 1$ производная отображения $\vec{f} = f$ совпадает с вектором - градиентом функции $f : \vec{f}'(\vec{x}_0) = \text{grad } f(\vec{x}_0)$.

2. В случае $n = 1$ производная отображения $\vec{f}$ совпадает с производной вектор-функции $\vec{f}$, записанной в виде столбца: $\vec{f}'(x_0) = (f_1'(x_0), \ldots, f_m'(x_0))^T$.

3. Теорема о дифференцировании сложной функции многих переменных может быть теперь переписана так:

   Если функция f дифференцируема в $\vec{y}_0$, а отображение $\vec{y} = \vec{g}(\vec{x})$ дифференцируемо в $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0 = \vec{g}(\vec{x}_0)$, то функция $h = f \circ \vec{g}$ дифференцируема в $\vec{x}_0$, причем $h'(\vec{x}_0) = \text{grad } f(\vec{y}_0) \cdot \vec{g}'(\vec{x}_0)$.

Обозначим $|\vec{f}'(\vec{x}_0)| = \max_{i=1,\ldots,m} |\text{ grad } f_i(\vec{x}_0)|$.

Лемма 6. *(Теорема Лагранжа для отображений). Если отображение $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируемо на области $\Omega \supset \bar{D}$, и $D \subset \mathbb{R}^n$ - выпукло, то для любых $\vec{x} \in D, \vec{y} \in D$ справедлива оценка*

$$|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})| \leq \max_{\vec{t} \in \bar{D}} |\vec{f}'(t)| \sqrt{m} |\vec{x} - \vec{y}|.$$

Доказательство. Из непрерывной дифференцируемости функций f_i, $i = 1, \ldots, m$, в области Ω по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа следует равенство $f_i(\vec{x}) - f_i(\vec{y}) = df_i(\vec{\xi_i})$, где $\vec{\xi_i}$ лежит на отрезке, соединяющем $\vec{x}$ и $\vec{y}$, и dx_j в дифференциале df_i заменяются на $x_j - y_j, j = 1, \ldots, n$. Отсюда

$$|f_i(\vec{x}) - f_i(\vec{y})| \leq |(\mathrm{grad} f_i(\xi_i), \vec{x} - \vec{y})| \leq |\mathrm{grad} f_i(\xi_i)| \cdot |\vec{x} - \vec{y}| \leq \max_{\vec{t} \in \bar{D}} |\mathrm{grad} f_i(\vec{t})| \cdot |\vec{x} - \vec{y}|.$$

Поскольку это неравенство справедливо при всех $i = 1, \ldots, m$, имеем оценку

$$|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (f_i(\vec{x}) - f_i(\vec{y}))^2} \leq \max_{\vec{t} \in \bar{D}} |\vec{f}'(t)| \sqrt{m} |\vec{x} - \vec{y}|. \blacksquare$$

Теорема 14. *(Образ куба меньшей размерности). Пусть отображение $\vec{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ непрерывно дифференцируемо на области $\Omega \supset K_I$, где $K_I \subset \mathbb{R}^n, n < m$, - единичный куб. Тогда*

$$\mu_J \left(\vec{f}(K_I) \right) = 0.$$

Доказательство. Фиксируем произвольное $N \in \mathbb{N}$. Разобьем куб K_I на N^n кубов $\{K_{\delta,l}\}_{l=1}^{N^n}$ со стороною $\delta = 1/N$. По предыдущей лемме

$$\max_{\vec{x}, \vec{y} \in K_{\delta,l}} |\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})| \leq M\sqrt{m} \max_{\vec{x}, \vec{y} \in K_{\delta,l}} |\vec{x} - \vec{y}| \leq M\sqrt{mn}\delta,$$

где $M = \max_{\vec{t} \in K_I} |\vec{f}'(t)|$. Значит, каждый из образов $\vec{f}(K_{\delta,l})$, $l = 1, \ldots, N^n$, может быть покрыт m-мерным кубом со стороной $2M\sqrt{mn}\delta$. Следовательно,

$$\mu_J^*(\vec{f}(K_I)) \leq N^n \left(2M\sqrt{mn}\delta\right)^m = \left(2M\sqrt{mn}\right)^m N^{n-m}.$$

Устремляя в полученном неравенстве N к ∞, получим требуемое. $\blacksquare$

Определение 9. *Переносом множества $A \subset \mathbb{R}^n$ вдоль вектора $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ называется множество $T_{\vec{y}}(A) = \{\vec{x} : \vec{x} = \vec{x}' + \vec{y}, \vec{x}' \in A\}$.*

Определение 10. *Сжатием (растяжением) множества $A \subset \mathbb{R}^n$ с коэффициентом $\alpha \in (0,1)$ $\quad(\alpha \in (1, +\infty))$ относительно $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ называется множество $\alpha_{\vec{y}}(A) = \{\vec{x} : \vec{x} = \vec{y} + \alpha(\vec{x}' - \vec{y}), \vec{x}' \in A\}$.*

Из того, что для элементарных множеств $M \subset \mathbb{R}^n \quad |T_{\vec{y}}(M)| = |M|, |\alpha_{\vec{y}}(M)| = \alpha^n |M|$, следует, что аналогичные свойства справедливы и для мер Лебега (Жордана):$\mu_{(J)}(T_{\vec{y}}(A)) = \mu_{(J)}(A)$, $\mu_{(J)}(\alpha_{\vec{y}}(A)) = \alpha^n \mu_{(J)}(A)$.

Обобщением операции сжатия (растяжения) является линейное преобразование с диагональной матрицей $\vec{y} = U\vec{x}$, где $U = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, для которого $\mu_{(J)}(UA) = |\det U|\mu_{(J)}(A)$.

Отметим, что мера Лебега (Жордана) также инвариантна относительно поворотов (линейных преобразований вида $\vec{y} = U\vec{x}$, где $\det U = 1$). Это можно доказать непосредственно, но позже будет получено как частный случай формулы замены переменной в кратном интеграле.

Теорема 15. *(Диффеоморфный образ измеримого по Лебегу множества). Если $\vec{f}$ - диффеоморфизм на множестве Ω, содержащем замыкание ограниченного измеримого по Лебегу множества D, $\Omega \supset \bar{D}$, то образ $\vec{f}(D)$ множества D измерим по Лебегу.*

Доказательство. Прежде всего докажем, что образ каждого бруса $\vec{f}(P)$ измерим по Лебегу. В самом деле, $\vec{f}(P) = \vec{f}(\operatorname{int} P) \cup \vec{f}(P \cap \partial P)$. Поскольку $P \cap \partial P$ состоит из конечного числа брусьев меньшей размерности, а каждый брус может быть получен из единичного куба соответствующей размерности с помощью переносов и линейного преобразования с диагональной матрицей, то $\mu(\vec{f}(P \cap \partial P)) = 0$ по предыдущей теореме. Из теоремы об обратном отображении следует, что $\vec{f}^{-1}$ непрерывно, а, значит, $\vec{f}(\operatorname{int} P)$ - открытое и, следовательно, измеримое по Лебегу множество.

Далее отметим, что для произвольного подмножества $E \subset D$ тем же методом, что и предыдущая теорема, доказывается неравенство

$$\mu^*(\vec{f}(E)) \leq L\mu^*(E), \tag{17}$$

где

$$L = \left(2\sqrt{n} \max_{\vec{x} \in \bar{D}} |\vec{f}'(\vec{x})|\right)^n.$$

Так как каждое открытое множество представимо в виде объединения счетного числа непересекающихся брусьев, то по свойству σ-аддитивности меры Лебега $\vec{f}(\operatorname{int} P) = \sqcup_{k=1}^{\infty} Q_k$, $\mu(\vec{f}(\operatorname{int} P)) = \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k|$. В частности, последний ряд сходится, значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $K \in \mathbb{N}$ такое, что $\sum_{k=K+1}^{\infty} |Q_k| < \varepsilon$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется элементарное множество $M_\varepsilon = \sqcup_{k=1}^{K} Q_k \subset \vec{f}(P)$ такое, что $\mu(\vec{f}(P) - |M_\varepsilon| < \varepsilon$.

Из измеримости по Лебегу множества D и критерия измеримости следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется элементарное множество N_ε такое, что $\mu^*(D \triangle N_\varepsilon) < \varepsilon$.

Из (17) следует оценка

$$\mu^*\left(\vec{f}(D) \triangle \vec{f}(N_\varepsilon)\right) = \mu^*(\vec{f}(D \triangle N_\varepsilon) \leq L\mu^*(D \triangle N_\varepsilon) < L\varepsilon. \tag{18}$$

Множество N_ε является объединением конечного числа брусьев, а тогда по ранее доказанному для любого $\delta > 0$ найдется элементарное множество $M_\delta \subset \vec{f}(N_\varepsilon)$ такое, что

$$\mu(\vec{f}(N_\varepsilon)) - |M_\delta| < \delta. \tag{19}$$

Включения

$$M_\delta \setminus \vec{f}(D) \subset \vec{f}(N_\varepsilon) \setminus \vec{f}(D),$$

$$\vec{f}(D) \setminus M_\delta \subset \vec{f}(D) \setminus \vec{f}(N_\varepsilon) \cup \left(\vec{f}(D) \cap (\vec{f}(N_\varepsilon) \setminus M_\delta)\right)$$

позволяют утверждать, что $M_\delta \triangle \vec{f}(D) \subset (\vec{f}(N_\varepsilon) \triangle \vec{f}(D)) \cup (\vec{f}(N_\varepsilon) \setminus M_\delta)$. Отсюда по свойствам внешней меры с использованием оценок (18),(19) получаем неравенство $\mu^*\left(\vec{f}(D) \triangle M_\delta\right) < L\varepsilon + \delta$, что в силу произвольности δ,ε и критерия измеримости завершает доказательство. ■

§5. Измеримые функции.

Определение 11. *Лебеговым множеством функции $f : E \to \mathbb{R}$, заданной на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, называется множество вида $\{x \in E : f(x) < a\} = E_a(f)$.*

Определение 12. *Функция $f : E \to \mathbb{R}$, заданная на измеримом по Лебегу множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, называется измеримой, если для каждого $a \in \mathbb{R}$ соответствующее лебегово множество $E_a(f)$ измеримо по Лебегу.*

Теорема 16. *(Возможность другого определения измеримой функции). Совокупность измеримых на заданном множестве функций не изменится, если в определении лебегова множества заменить знак неравенства $<$ на любой из знаков $>, \leq, \geq$.*

Доказательство. Так как $\{x \in E : f(x) \geq a\} = E \setminus E_a(f)$, и из измеримости по Лебегу одного из множеств $E_a(f)$ и $E \setminus E_a(f)$ следует измеримость по Лебегу и второго, и аналогичное рассуждение связывает знаки $>, \leq$, то достаточно проверить, что измеримость функции $f : E \to \mathbb{R}$ равносильна измеримости по Лебегу всез множеств $\{x \in E : f(x) \leq a\}$. Для этого достаточно воспользоваться представлениями $E_a(f) = \cup_{j=1}^{\infty}\{x \in E : f(x) \leq a - 1/j\}$, $\{x \in E : f(x) \leq a\} = \cap_{j=1}^{\infty} E_{a+1/j}(f)$. ■

Нетрудно видеть, что измеримость характеристической функции множества $E \subset \mathbb{R}^n$, $\chi_E(x) = 1, x \in E$ $\chi_E(x) = 0, x \notin E$, равносильна измеримости по Лебегу множества E.

Далее, каждая непрерывная на измеримом по Лебегу множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ функция измерима, так как ее лебеговы множества открыты в E, будучи прообразами открытых интервалов $(-\infty, a)$ при непрерывном отображении.

Теорема 17. *(Алгебраическая структура совокупности измеримых функций). 1. Если f непрерывна на открытом множестве G, содержащем множество значений измеримой функции $g : E \to \mathbb{R}$, то сложная функция $f \circ g$ измерима.*

2.Если f, g – измеримы на E, то измеримы функции $f \pm g, f \cdot g, f/g$ (последняя, естественно, лишь на своей области определения).

Доказательство. Так как f непрерывна на открытом множестве G , ее лебеговы множества открыты. По теореме о структуре открытых множеств они представимы в виде счетного объединения непересекающихся промежутков. А тогда лебеговы множества сложной функции являются счетным объединением прообразов промежутков при отображении измеримой функцией, а значит, измеримы по Лебегу.

Измеримость суммы двух измеримых функций следует из равенств

$$E_a(f+g) = \cup_{r\in\mathbb{Q}}\{x \in E : f(x) < r < a - g(x)\} = \cup_{r\in\mathbb{Q}}\left(E_r(f) \cap E_{a-r}(g)\right).$$

Для остальных арифметических операций можно использовать доказанную первую часть, непрерывность функций $-t; t^2; t/4; 1/t$, и равенства $f - g = f + (-g); f \cdot g = ((f+g)^2 - (f-g)^2)/4; f/g = f \cdot (1/g)$.

■

Теорема 18. *(Предельный переход и измеримость функций). Если последовательность измеримых на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ функций f_m сходится поточечно на E, то предельная функция измерима.*

Доказательство. Прежде всего докажем, что $\sup_m f_m$ измерима. Для этого достаточно заметить, что $\{x \in E : \sup_m f_m(x) \le a\} = \cap_{m=1}^{\infty}\{x \in E : f_m(x) \le a\}$. Аналогично доказывается измеримость $\inf_m f_m$. Далее, $\overline{\lim}_{m\to\infty} f_m(x) = \lim_{m\to\infty} \sup_{k\ge m} f_k(x) = \inf_m \sup_{k\ge m} f_k(x)$, откуда следует измеримость верхнего предела, совпадающего с исследуемой предельной функцией. ■

Заметим, что все доказанные ранее в этом параграфе результаты остаются справедливыми и в том случае, если допустить, что рассматриваемые функции могут принимать значения $+\infty$ и/или $-\infty$ на измеримых подмножествах E. Арифметические операции с такими функциями определяются естественным образом.

Так как множества меры нуль (т.е. имеющие лебегову меру нуль) не оказывают существенного влияния на результаты теории меры и интеграла Лебега, то понятно следующее соглашение: говорят, что некоторое свойство выполнено почти всюду на E, если оно справедливо во всех точках E, кроме некоторого множества меры нуль. Так, теорема 18 обычно формулируется для последовательностей функций, сходящихся почти всюду.

Определение 13. *Кусочно-постоянной или ступенчатой на измеримом по Лебегу множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ функцией будем называть измеримую функцию $f : E \to \mathbb{R}$, множество значений которой конечно или счетно.*

Теорема 19. *(Представление измеримых функций пределами последовательностей ступенчатых).*

Каждая измеримая на измеримом по Лебегу множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ функция $f : E \to [0, +\infty)$ представима пределом равномерно сходящейся на E последовательности ступенчатых функций $\{g_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$, являющейся неубывающей (невозрастающей) при каждом $x \in E$.

Доказательство. Разобьем $[0, +\infty)$ на полуинтервалы $[l/2^m, (l+1)/2^m), l = 0, 1, \ldots$. Множества $E_{l,m} = \{x \in E : f(x) \in [l/2^m, (l+1)/2^m)\}$ представимы как $E_{l,m} = E_{(l+1)/2^m} \setminus E_{l/2^m}(f)$, а поэтому измеримы по Лебегу при любых $l = 0, 1, \ldots; m = 1, 2, \ldots$. Положим $g_m(x) = l/2^m$, при $x \in E_{l,m}, l = 0, 1, \ldots$; тогда функции $g_m(x)$ являются ступенчатыми на E при каждом $m = 1, 2, \ldots$, и из очевидного неравенства $0 \leq f(x) - g_m(x) \leq 1/2^m, x \in E, m = 1, 2, \ldots$, следует равномерная сходимость последовательности $\{g_m\}_{m=1}^{\infty}$ на E к f. Неравенство $g_m(x) \leq g_{m+1}(x), x \in E, m = 1, 2, \ldots$, очевидно по построению. Аналогично строится невозрастающая последовательность. ∎

Введем еще одно понятие сходимости.

Определение 14. *Говорят, что последовательность измеримых на измеримом множестве E функций f_m сходится по мере к f на E , если для любого $\varepsilon > 0$ мера* *множества E_m тех точек $x \in E$, для которых $|f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon$, стремится к нулю при $m \to \infty$:*

$$\lim_{m\to\infty} \mu\left(\{x \in E : |f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

Заметим, что бесконечные значения функций в этом определении не исключаются, если считать, что при этом соответствующая разность не определена и такие $x \in E$ не попадают во множество E_m.

Теорема 20. *(Связь сходимости по мере и сходимости почти всюду). Если последовательность измеримых почти всюду конечных на измеримом множестве E конечной меры функций f_m сходится к конечной почти всюду на E функции f почти всюду на E, то f_m сходится к f по мере на E.*

Доказательство. Обозначим через E_0 множество тех $x \in E$, для которых какая-то из функций f_m или f принимает бесконечное значение или $f_m(x)$ не сходится к $f(x)$. Из предположений теоремы и σ-аддитивности меры Лебега следует, что $\mu(E_0) = 0$.

Докажем, что

$$\overline{\lim}_{m\to\infty} E_m \subset E_0. \tag{20}$$

Пусть $x_0 \notin E_0$. Тогда $\lim_{m\to\infty} f_m(x_0) = f(x_0)$, и по определению предела числовой последовательности любого $\varepsilon > 0$ найдется номер m_0 такой, что при всех $m > m_0$ $x_0 \notin E_m$, откуда по определению верхнего предела последовательности множеств $x_0 \notin \overline{\lim}_{m\to\infty} E_m$. Таким образом, (20) доказано, откуда по лемме 3 из доказательства теоремы 6 §3 (с учетом отмеченной там же возможности замены куба K_I на множество E конечной меры)

$$\overline{\lim}_{m\to\infty} \mu(E_m) \leq \mu\left(\overline{\lim}_{m\to\infty} E_m\right) \leq \mu(E_0) = 0.$$

■

Замечание 2. *Обратное утверждение неверно, как показывает следующий пример Ф.Рисса: представив каждое натуральное число m единственным образом в виде $m = 2^k + j, 0 \leq j < 2^k$, положим $f_m(x) = \chi_{[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}]}(x)$. Последовательность f_m сходится по мере к функции $f(x)$, тождественно равной нулю на $E = [0, 1]$, так как $\mu(E_m) = \frac{1}{2^k} \to 0$ при $m \to \infty$; в то же время для любых $x \in [0, 1]$ и $k \in \mathbb{N}$ найдутся целые числа $j_1, j_2 \in [0, 2^k)$ такие, что $f_{2^k+j_1}(x) = 0$, $f_{2^k+j_2}(x) = 1$.*

Замечание 3. *Для множеств бесконечной меры теорема, вообще говоря, неверна, как показывает пример последовательности $f_m(x) = \chi_{[-m,m]}(x)$, $x \in E = \mathbb{R}$.*