§1. Дифференциальные формы на области, операции над ними.

Пусть U – область в $\mathbb{R}^n$.

Определение 1. *Дифференциальной формой валентности 1 (1-формой) в* U *называется выражение вида* $\sum_{j=1}^n \omega_j(x)dx_j$, *где* $\omega_j : U \to \mathbb{R}$ *– функции,* dx_j *– линейные функционалы на* $\mathbb{R}^n = E$, *определяемые позже.*

Дифференциальные формы высших валентностей определяются по индукции с помощью операции внешнего умножения.

Определение 2. *Внешним произведением форм* Ω, Π *валентностей* p *и* q *соответственно* ($\Omega(x) = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_p\le n} \omega_{i_1\ldots i_p}(x)dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$, $\Pi(x) = \sum_{1\le j_1<\ldots<j_q\le n} \varpi_{j_1\ldots j_q}(x)dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_q}$) *называется форма валентности* $p+q$, *задаваемая формулой*

$$\Omega \wedge \Pi(x) = \sum_\sigma \omega_{i_1\ldots i_p}(x)\varpi_{j_1\ldots j_q}(x)\mathrm{sign}(\sigma)dx_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\sigma(p+q)},$$

где суммирование производится по всем наборам различных индексов $\{i_1 < \ldots < i_p, j_1 < \ldots < j_q\} = \{\sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(p+q)\} \subset \{1, \ldots, n\}$, *а* $sign\sigma$ *определяется как количество транспозиций, необходимых для преобразования перестановки* $(i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q)$ *в* $(\sigma(1), \ldots, \sigma(p+q))$.

Значение дифференциальной формы валентности p в точке x – это антисимметрическая полилинейная форма, определенная на E^p. Точнее, для набора векторов $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_p$, имеющих координаты $(\vec{a}_i)_j, j = 1, \ldots, n$ в некотором фиксированном ортонормированном базисе $\vec{e}^{\,0}_1, \ldots, \vec{e}^{\,0}_n$, значение формы задается равенством

$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_p) = \det\left((\vec{a}_j)_{i_k}\right)_{j,k=1}^p.$$

Дифференциальная форма $\Omega(x) = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_p\le n} \omega_{i_1\ldots i_p}(x)dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$ называется суммируемой, гладкой, и т.д., если все коэффициенты $\omega_{i_1\ldots i_p}(x), 1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n$, - суммируемые, гладкие, и т.д. в области U.

Справедливы следующие основные свойства внешнего умножения для любых форм $\Omega_{(i)}, \Pi, \Xi$ валентностей p, q, r соответственно и чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (доказательства можно найти в учебниках по линейной алгебре):

1. $\Omega \wedge \Pi = (-1)^{pq}\Pi \wedge \Omega$;

2. $(\Omega \wedge \Pi) \wedge \Xi = \Omega \wedge (\Pi \wedge \Xi)$;

3. $(\alpha\Omega_1 + \beta\Omega_2) \wedge \Pi = \alpha(\Omega_1 \wedge \Pi) + \beta(\Omega_2 \wedge \Pi)$.

Заметим также, что последнее свойство справедливо и для функций α, β. Очевидно, что все формы валентности $> n$ тривиальны.

Определение 3. *Внешним дифференциалом гладкой p-формы* $\Omega(x) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n} \omega_{i_1 \ldots i_p}(x) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$ *называется $p+1$-форма*

$$d\Omega(x) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n} d\omega_{i_1 \ldots i_p}(x) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p},$$

где $d\omega_{i_1 \ldots i_p}(x)$ – дифференциал 0-формы (функции) $\omega_{i_1 \ldots i_p}(x)$, рассматриваемый как дифференциальная 1-форма.

Теорема 1 (Основные свойства операции внешнего дифференцирования.**).** *1. Линейность. Для любых $p-$ форм Ω, Π и чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

$$d(\alpha\Omega + \beta\Pi) = \alpha d\Omega + \beta d\Pi.$$

2. Дифференцирование внешнего произведения. Для любых гладких форм Ω, Π валентностей p, q соответственно $d(\Omega \wedge \Pi) = (d\Omega) \wedge \Pi + (-1)^p \Omega \wedge d\Pi$.

3. Отсутствие внешних дифференциалов второго порядка. Если Ω - дважды дифференцируемая форма, то $d(d\Omega) = 0$.

Доказательство. Первое свойство очевидно. Докажем второе для базисных форм. Пусть

$$\Omega(x) = \omega(x) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}, \Pi(x) = \varpi(x) dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_q}.$$

Тогда

$$\Omega(x) \wedge \Pi(x) = \omega(x)\varpi(x) \mathrm{sign}(\sigma) dx_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\sigma(p+q)},$$

где $\{i_1 < \ldots < i_p, j_1 < \ldots < j_q\} = \{\sigma(1) < \sigma(2) < \ldots < \sigma(p+q)\} \subset \{1, \ldots, n\}$, а $\mathrm{sign}\sigma$ – количество транспозиций, необходимых для преобразования перестановки $(i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q)$ в $(\sigma(1), \ldots, \sigma(p+q))$. По определению

$$d(\Omega(x) \wedge \Pi(x)) = \mathrm{sign}(\sigma) d(\omega(x)\varpi(x)) \wedge dx_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge dx_{\sigma(p+q)},$$

что можно переписать как

$$(\omega(x)d\varpi(x) + \varpi(x)d\omega(x)) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_q} =$$

$$(-1)^p\omega(x)dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}\wedge d\varpi(x)\wedge dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_q}+d\omega(x)\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}\wedge\big(\varpi(x)dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_q}\big) =$$

$$= (d\Omega(x)) \wedge \Pi(x) + (-1)^p\Omega(x) \wedge d\Pi(x).$$

Доказательство третьего свойства проведем для той же базисной формы Ω, что и выше.

$$d\Omega(x) = \sum_{k\neq i_1,\ldots,i_p} \frac{\partial\omega}{\partial x_k}(x)dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p},$$

откуда

$$d(d\Omega)(x) = \sum_{l\neq k,i_1,\ldots,i_p} \sum_{k\neq i_1,\ldots,i_p} \frac{\partial^2\omega}{\partial x_l\partial x_k}(x)dx_l \wedge dx_k \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} =$$

$$= \sum_{k<l,k,l\neq i_1,\ldots,i_p} \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x_k\partial x_l}(x) - \frac{\partial^2\omega}{\partial x_l\partial x_k}(x)\right) dx_k \wedge dx_l \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} = 0$$

по теореме Юнга о независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования.

■

Определение 4. *Операция дополнения (звездочка Ходжа) для базисной формы* $\Omega(x) = \omega(x)dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$ *определяется как*

$$\star\Omega(x) = (-1)^{[i,j]}\omega(x)dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_{n-p}},$$

где $[i, j]$ *– число беспорядков в перестановке* $(i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_{n-p})$ *чисел* $1, 2, \ldots, n$. *На произвольные формы эта операция распространяется по линейности.*

В случае трехмерного евклидова пространства

$$\star dx = dy \wedge dz, \star dy = dz \wedge dx, \star dz = dx \wedge dy, \star dx \wedge dy \wedge dz = 1.$$

Нетрудно видеть, что для любой p-формы Ω $\star(\star\Omega) = (-1)^{p(n-p)}\Omega$. В самом деле, равенство $(-1)^{[i,j]}(-1)^{[j,i]} = (-1)^{p(n-p)}$ следует из того, что число соответствующих беспорядков может быть подсчитано как число перестановок, необходимых для преобразования $(i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_{n-p})$ в $(j_1, \ldots, j_{n-p}, i_1, \ldots, i_p)$ плюс $2[j, i]$.

Векторным полем на области U будем называть вектор-функцию (отображение) $\vec{a} : U \to E$.

Каждому векторному полю естественным образом можно сопоставить дифференциальную 1-форму по правилу

$$(a_1(x)\vec{e}_1{}^0 + \ldots + a_n(x)\vec{e}_n{}^0)^\sharp = a_1(x)dx_1 + \ldots + a_n(x)dx_n.$$

Обратное сопоставление будем обозначать знаком $\flat$. В трехмерном простанстве с помощью такого сорта сопоставлений каждой возможной операции внешнего дифференцирования будет соответствовать операция векторного анализа (теории поля). Дифференцирование 0-форм дает уже известную операцию взятия градиента:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz, (df)^\flat = \operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}.$$

Дифференцирование 1-форм дает 2-форму, поэтому для записи соответствующего векторного поля нужно еще применить операцию дополнения, что приводит к операции взятия ротора (вихря):

$$\operatorname{rot}\vec{a} = (\star d\vec{a}^\sharp)^\flat.$$

Получим ее выражение в координатах:

$$d\vec{a}^\sharp = d(a_1)\wedge dx + d(a_2)\wedge dy + d(a_3)\wedge dz = \left(\frac{\partial a_1}{\partial y}dy + \frac{\partial a_1}{\partial z}dz\right)\wedge dx + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x}dx + \frac{\partial a_2}{\partial z}dz\right)\wedge dy +$$

$$+\left(\frac{\partial a_3}{\partial x}dx + \frac{\partial a_3}{\partial y}dy\right)\wedge dz = \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}\right)dy\wedge dz + \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}\right)dz\wedge dx + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right)dx\wedge dy,$$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Чтобы получить 2-форму, соответствующую векторному полю, нужно взять дополнение соответствующей 1-формы. После дифференцирования получится 3-форма, дополнение которой дает 0-форму (функцию), которая называется дивергенцией исходного векторного поля:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \star d(\star\vec{a}^\sharp).$$

Получим ее выражение в координатах:

$$d(\star\vec{a}^\sharp) = d(a_1 dy\wedge dz + a_2 dz\wedge dx + a_3 dx\wedge dy) = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz,$$

откуда $\mathrm{div}\vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}$. Нетрудно видеть, что формулы для градиента и дивергенции имеют смысл и в размерностях больше, чем 3.

Посмотрим на следствия свойства отсутствия второго дифференциала для форм в терминах операций с векторными полями:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f = (\star d\left((df)^\flat\right)^\sharp)^\flat = (\star d(df))^\flat = \vec{0};$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\vec{a} = \star d(\star\left((\star d\vec{a}^\sharp)^\flat\right)^\sharp) = \star d(\star\star\, d\vec{a}^\sharp) = \star d(d\vec{a}^\sharp) = 0.$$

Полезно также подсчитать выражение

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, f = \star d\star df = \star d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dy\wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y}dz\wedge dx + \frac{\partial f}{\partial z}dx\wedge dy\right) =$$

$$\star\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)dx\wedge dy\wedge dz = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f,$$

которое называется лапласианом функции f.

Удобно также использовать оператор дифференцирования $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$, который удовлетворяет правилу Лейбница, т.е. действует по очереди на каждую из переменных, что отмечается стрелкой. Основные операции запишутся так:

$$\mathrm{grad}\, f = \nabla f,\ \mathrm{rot}\vec{a} = [\nabla, \vec{a}],\ \mathrm{div}\vec{a} = (\nabla, \vec{a}).$$

Пример подсчета:

$$\mathrm{div}[\vec{a}, \vec{b}] = (\nabla, [\vec{a}, \vec{b}]) =$$

$$(\nabla, [\overset{\downarrow}{\vec{a}}, \vec{b}]) + (\nabla, [\vec{a}, \overset{\downarrow}{\vec{b}}]) = ([\nabla, \vec{a}], \vec{b}) - (\vec{a}, [\nabla, \vec{b}]) = (\mathrm{rot}\vec{a}, \vec{b}) - (\vec{a}, \mathrm{rot}\vec{b}).$$

Пусть φ – гладкое отображение области $V\subset\mathbb{R}^m$ в $U\subset\mathbb{R}^n$,

$$x = \varphi(y), \quad x_i = \varphi_i(y_1, \ldots, y_m),\ i = 1, \ldots, n.$$

Тогда для каждой p-формы Ω, заданной в U, можно определить замену переменной, получив заданную в области V форму $\varphi^*\Omega$ по правилу

$$\varphi^*\Omega(y)(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_p) = \Omega(\varphi(y))(\varphi'(y)\vec{b}_1, \ldots, \varphi'(y)\vec{b}_p).$$

Теорема 2 (Вычисление замены переменной в формах.)**.** *Если* $\Omega(x) = \omega(x)dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}$, *то*

$$\varphi^*\Omega(y) = \omega(\varphi(y))d\varphi_{i_1}(y)\wedge\ldots\wedge d\varphi_{i_p}(y).$$

Доказательство. Форма $\varphi^*\Omega$, как и всякая p-форма, заданная в V, может быть записана в терминах базисных форм:

$$\varphi^*\Omega(y) = \sum_{1\le k_1<\ldots<k_p\le m} (\varphi^*\Omega(y))_{k_1\ldots k_p}\, dy_{k_1}\wedge\ldots\wedge dy_{k_p}.$$

Если $\vec{g}_1,\ldots,\vec{g}_m$ - ортонормированный базис, соответствующий координатам $y_1,\ldots,y_m$, то

$$\varphi^*\Omega(y)(\vec{g}_{k_1},\ldots,\vec{g}_{k_p}) = (\varphi^*\Omega(y))_{k_1\ldots k_p} = \Omega(\varphi(y))(\varphi'(y)\vec{g}_{k_1},\ldots,\varphi'(y)\vec{g}_{k_p}) =$$

$$= \omega(\varphi(y))dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}\left(\varphi'(y)\vec{g}_{k_1},\ldots,\varphi'(y)\vec{g}_{k_p}\right) =$$

$$= \omega(\varphi(y))\det\left(\left(\varphi'(y)\vec{g}_{k_j}\right)_{i_l}\right)_{j,l=1}^{p} = \omega(\varphi(y))\det\left(\frac{\partial\varphi_{i_l}}{\partial y_{k_j}}\right)_{j,l=1}^{p}.$$

Подсчитаем теперь на том же наборе векторов правую часть доказываемого равенства:

$$\omega(\varphi(y))d\varphi_{i_1}(y)\wedge\ldots\wedge d\varphi_{i_p}(y)\left(\vec{g}_{k_1},\ldots,\vec{g}_{k_p}\right) =$$

$$= \omega(\varphi(y))\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\varphi_{i_1}}{\partial y_j}dy_j\right)\wedge\ldots\wedge\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\varphi_{i_p}}{\partial y_j}dy_j\right)\left(\vec{g}_{k_1},\ldots,\vec{g}_{k_p}\right).$$

Лишь формы $dy_{k_1},\ldots,dy_{k_p}$ дают ненулевые значения на векторах $\vec{g}_{k_1},\ldots,\vec{g}_{k_p}$ соответственно. Учитывая первое свойство внешнего умножения, это дает равенство

$$\omega(\varphi(y))d\varphi_{i_1}(y)\wedge\ldots\wedge d\varphi_{i_p}(y)\left(\vec{g}_{k_1},\ldots,\vec{g}_{k_p}\right) = \omega(\varphi(y))\sum_{\sigma\in S_p}\operatorname{sign}(\sigma)\frac{\partial\varphi_{i_{\sigma(1)}}}{\partial y_{k_1}}\cdots\frac{\partial\varphi_{i_{\sigma(p)}}}{\partial y_{k_p}} =$$

(суммирование производится по всем перестановкам чисел $1,2,\ldots,p$)

$$= \omega(\varphi(y))\det\left(\frac{\partial\varphi_{i_l}}{\partial y_{k_j}}\right)_{j,l=1}^{p}.$$

■

Следствие 1. *Операции замены переменной и дифференцирования коммутируют:*

$$d\varphi^* = \varphi^* d. \tag{1}$$

Доказательство. Проверим (1) для 0-форм (функций): $d\varphi^* f(y) = d(f(y))$, $\varphi^* df(y) = \varphi^* \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k\right)(y) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi(y)) d\varphi_k(y)$, и (1) следует из правила дифференцирования сложной функции.

Пусть теперь $\Omega(x) = \omega(x) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$, тогда

$$\varphi^* d\Omega(y) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial x_k}(\varphi(y)) d\varphi_k(y) \wedge d\varphi_{i_1}(y) \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_p}(y).$$

С другой стороны, по свойствам операций замены переменной и внешнего дифференцирования

$$d\varphi^* \Omega(y) = d(\omega(\varphi(y))) \wedge d\varphi_{i_1}(y) \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_p}(y) + \omega(\varphi(y)) d\left(d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_p}\right).$$

Второе слагаемое в последней сумме равно нулю, поскольку последовательное применение правила дифференцирования внешнего произведения приводит к слагаемым, являющимся внешними произведениями p форм, одна из которых имеет вид $d(d\varphi_{i_j}(y))$, т.е. равна нулю. Применение правила дифференцирования сложной функции завершает доказательство.

■

Определение 5. *Дифференциальная форма Ω называется замкнутой в области U, если $d\Omega = 0$ в U. Дифференциальная форма Ω называется точной в области U, если существует дифференциальная форма Π такая, что $d\Pi = \Omega$ в U.*

Из свойства отсутствия второго дифференциала следует, что каждая гладкая точная в области U форма замкнута в U.

Определение 6. *Область U называется звездной, если найдется такая точка $x_0 \in U$, что для любого $x \in U$ отрезок, соединяющий x_0, x лежит в U, $\{x_0 + (1-t)(x - x_0) | 0 \leq t \leq 1\} \subset U$. В этом случае отображение $\varphi : U \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$, задаваемое формулой $\varphi(x,t) = x_0 + (1-t)(x-x_0)$ называется прямым стягиванием U в точку x_0.*

Область называется звездообразной, если она является диффеоморфным образом звездной области.

Лемма 1. *Если U – звездная, то для любой гладкой p – формы Ω в $U \times [0,1]$ справедлива формула*

$$(dK\Omega + Kd\Omega)(x) = \Omega(x,1) - \Omega(x,0),\ x \in U,$$

где линейное отображение K определено на базисных формах равенствами

$$K(a(x,t)dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p})=0,\quad K(a(x,t)dt\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_{p-1}})=\left(\int_0^1 a(x,t)dt\right)dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_{p-1}},$$

и сужение формы Ω, $\Omega(x,t_0)=\Omega|_{U\times t_0}(x,t_0)$ задано на векторах из $\mathbb{R}^n$, т.е. не имеющих ненулевой компоненты в направлении в $\mathbb{R}^{n+1}$, соответствующем переменной t:

$$a(x,t)dt\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_{p-1}})|_{U\times t_0}=0;$$

$$a(x,t)dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}|_{U\times t_0}=a(x,t_0)dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}.$$

Доказательство этой леммы опущено, так как использует дифференцирование интегралов, зависящих от параметра, которое будет изучаться позже.

Теорема 3 (Лемма Пуанкаре.)**.** *Всякая замкнутая форма в звездообразной области точна в ней.*

Доказательство. Пусть U – звездная. Если Ω – замкнутая форма, заданная в U, то для прямого стягивания φ форма $\varphi^*\Omega$ – замкнутая форма, заданная в $U\times[0,1]$. По лемме справедливо равенство

$$d(K\varphi^*\Omega)=-Kd\varphi^*\Omega+\varphi^*\Omega(x,1)-\varphi^*\Omega(x,0)=\varphi^*\Omega(x,1)-\varphi^*\Omega(x,0).$$

Докажем равенства $\varphi^*\Omega(x,1)=0$, $\varphi^*\Omega(x,0)=\Omega(x)$. Достаточно рассмотреть базисную форму $\Omega(x)=\omega(x)dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}$, тогда из соотношения

$$d\varphi_i(x,t)=-(x-(x_0)_i)dt+(1-t)dx_i$$

следует представление

$$\varphi^*\Omega(x,t)=\omega(\varphi(x,t))(1-t)^p dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}-$$

$$-\sum_{s=1}^{p}(1-t)^{p-1}(x_{i_s}-(x_0)_{i_s})dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_{s-1}}\wedge dt\wedge dx_{i_{s+1}}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}.$$

Отсюда в силу сделанного в формулировке предыдущей леммы замечания о сужениях форм получаем требуемое. Значит, $d(-K\varphi^*\Omega)=\Omega(x)$, что и означает точность формы Ω.

Пусть теперь V – звездообразная область, т.е. $V=\psi(U)$, где ψ - диффеоморфизм звездной области U. Тогда для заданной в V замкнутой формы Ω форма $\psi^*\Omega$ -

замкнута в звездной области U, значит, по доказанному, точна в U, т.е. существует форма Π такая, что $\psi^*\Omega = d\Pi$. Но тогда обратная замена доказывает теорему: $\Omega = (\psi^{-1})^* d\Pi = d\left((\psi^{-1})^*\Pi\right)$. ■

Определение 7. *Векторное поле $\vec{A}$ называется потенциальным, если найдется функция f (скалярное поле) такая, что $\vec{A} = \operatorname{grad} f$. Векторное поле $\vec{B}$ называется соленоидальным, если найдется векторное поле $\vec{A}$ такое, что $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$.*

В качестве следствия из леммы Пуанкаре получаем, что для заданных в звездообразной области векторных полей $\vec{A}, \vec{B}$

- из тождественного равенства $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{0}$ следует потенциальность поля $\vec{A}$;
- из тождественного равенства $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ следует соленоидальность поля $\vec{B}$.

§2. Интегрирование форм по области.

В курсе линейной алгебры было установлено, что для любых базисов $\{\vec{e}_i\}, \{'\vec{e}_j\}$ пространства $\mathbb{R}^n$ определитель матрицы перехода от одного базиса к другому отличен от нуля: для $'\vec{e}_j = \sum_{i=1}^n t_j^i \vec{e}_i$ имеем $\det(t_j^i)_{i,j=1}^n = \det(T) \neq 0$. В дальнейшем мы не будем делать различий между матрицей T и соответствующим линейным оператором, действующим по правилу $T(\vec{e}_j) = {}'\vec{e}_j, j = 1, \ldots, n$.

Назовем два базиса $\{\vec{e}_i\}, \{'\vec{e}_j\}$ одинаково ориентированными, если определитель матрицы перехода для них положителен. Нетрудно видеть, что введенное отношение на множестве базисов является отношением эквивалентности, разбивающим это множество на два класса. Назовем элементы одного класса положительно ориентированными базисами, а элементы другого – отрицательно ориентированными. Зафиксируем положительно ориентированный ортонормированный базис $\{\vec{e}_i^{\,0}\}$. Рассмотрим в этом базисе дифференциальную форму $dx_1^0 \wedge \ldots \wedge dx_n^0$.

Докажем, что для любого другого базиса $\{\vec{e}_i\}, T(\vec{e}_i^{\,0}) = \vec{e}_i, i = 1, \ldots, n$, между соответствующими формами имеется следующее соотношение:

$$dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = (\det T)^{-1} dx_1^0 \wedge \ldots \wedge dx_n^0.$$

В самом деле, обе рассматриваемые формы имеют старшую валентность, а линейное пространство значений таких форм в точке одномерно, значит, они отличаются лишь числовым (возможно зависящим от точки) множителем. Поэтому для доказательства требуемого соотношения достаточно проверить его на каком-то наборе векторов. Выберем в качестве такого набора базис $\{\vec{e}_i\}$:

$$dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = 1;$$

$$dx_1^0 \wedge \ldots \wedge dx_n^0(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = \det(T),$$

что и требовалось доказать.

Отсюда следует, что знак числа $dx_1^0 \wedge \ldots \wedge dx_n^0(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ позволяет определить ориентацию базиса $\{\vec{e}_i\}$. Выясним геометрический смысл модуля этого числа. Для этого рассмотрим призму, натянутую на векторы $\{\vec{e}_i\}$, т.е. $\Pi = \{\vec{x} : 0 < x_i < 1\}$. Нетрудно видеть, что $\Pi = T(\Pi_0)$, где $\Pi_0 = \{\vec{y} : 0 < y_i^0 < 1\}$ – стандартный единичный куб. Тогда соотношение

$$\mu(\Pi) = \int_\Pi d\mu(x) = \int_{\Pi_0} |\det(T)| d\mu(y) = |\det(T)|$$

объясняет, почему форма $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ называется формой (ориентированного) объема.

Определение 8. *Интегралом от суммируемой n-формы $\Omega(x) = f(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = f(x)V$ по области D, ориентированной согласованно с формой объема V, называется*

$$\int_D \Omega = \int_D f(x)V = \int_D f(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int_D f(x)d\mu(x).$$

Выясним, как действует операция замены переменной на интеграл от формы. Пусть $x = \varphi(y)$ диффеоморфизм области $G \subset \mathbb{R}^n$ на D, тогда $\varphi^*\Omega$ – дифференциальная n-форма на G. Получаем

$$\int_G \varphi^*\Omega = \int_G f(\varphi(y))d\varphi_1(y) \wedge \ldots \wedge d\varphi_n(y) = \int_G f(\varphi(y)) \det(\varphi'(y))dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n;$$

$$\int_D \Omega = \int_D f(x)d\mu(x) = \int_G f(\varphi(y))|\det(\varphi'(y))|d\mu(y),$$

откуда $\int_G \varphi^*\Omega = \pm \int_D \Omega$.

Основной целью этого параграфа является доказательство теоремы Стокса-Пуанкаре для куба. Частный случай этого утверждения – основная теорема интегрального исчисления, которую можно записать в виде $\int_{[a,b]} dF = F(b) - F(a)$. Правую часть этой формулы можно также рассматривать как интеграл от 0-формы F по нуль-мерной цепи $\{b\} - \{a\}$.

Определение 9. *Цепью k-мерных кубов называется формальная целочисленная комбинация $\sum_{i=1}^{N} n_i K_i$, где $n_i \in \mathbb{Z}$, K_i – k-мерные кубы, ориентированные некоторым образом.*

Будем считать, что стандартный n-мерный куб $K = (0,1)^n$ ориентирован формой $V_0 = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, отвечающей положительному ортонормированному базису $\vec{e}_1{}^0, \ldots, \vec{e}_n{}^0$.

Множества

$$K_\alpha^j = \{x : x_j = \alpha, 0 < x_i < 1, i = 1, \ldots, n, i \neq j\},\ j = 1, \ldots, n; \alpha = 0, 1,$$

называются гранями стандартного куба (они являются $(n-1)$-мерными кубами).

Кубу K_α^j соответствует $(n-1)$-мерное линейное подпространство $E_0^j = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : x_j = 0\}$, на котором определена форма объема $V^j = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$. На любом наборе $n-1$ векторов пространств $E_0^i, i \neq j$, форма V^j обращается в нуль, а на любом наборе $n-1$ линейно независимых векторов пространства E_0^j ее значение равно (по модулю) $(n-1)$-мерной мере Лебега призмы, натянутой на эти векторы.

Зададим ориентацию куба K_α^j, выбрав положительный базис в E_0^j так, чтобы, приписав к нему спереди (т.е. первым) вектор $\pm\vec{e}_j{}^0$, направленный вовне K (выходящий вектор), получившийся базис был бы положителен для куба K (т.е. для всего пространства $\mathbb{R}^n$).

Этому правилу ориентации граней отвечает выбор формы объема $V_\alpha^j = (-1)^{\alpha+j} V^j$.

В самом деле, выходящий вектор для грани K_α^j – это $(-1)^{\alpha+1}\vec{e}_j{}^0$. Значит, для нужной формы объема $V_\alpha^j = \varepsilon_\alpha^j V^j$ имеем

$$(-1)^{\alpha+1} dx_j \wedge \varepsilon_\alpha^j V^j = (-1)^{\alpha+1} \varepsilon_\alpha^j dx_j \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_n = V_0,$$

откуда $\varepsilon_\alpha^j = (-1)^{\alpha+j}$, что и требовалось доказать.

Определение 10. *Границей (краем) куба K назовем сумму ориентированных в соответствии с правилом выходящего вектора граней*

$$\partial K = \sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ \alpha=0,1}} (-1)^{\alpha+i} K_\alpha^i$$

(т.е. каждая грань $(-1)^{\alpha+i} K_\alpha^i$ ориентирована формой V_α^i).

Если Ω – k-форма, сужение которой на k-мерный куб K_i имеет вид $\Omega|_{K_i} = \Omega_i = f_i(x)V_i$, где V_i – форма объема, отвечающая ориентированному кубу K_i, то интегралом по цепи $\Pi = \sum_{i=1}^{N} n_i K_i$ от формы Ω называется

$$\int_{\Pi} \Omega = \sum_{i=1}^{N} n_i \int_{K_i} \Omega_i = \sum_{i=1}^{N} n_i \int_{K_i} f_i(x) d\mu(x).$$

Теорема 4 (Стокса-Пуанкаре для стандартного куба). *Пусть Ω – гладкая $(n-1)$-форма, определенная на замыкании cl K. Тогда*

$$\int_K d\Omega = \int_{\partial K} \Omega.$$

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $\Omega(x) = f(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$. Тогда $d\Omega = (-1)^{j-1} \frac{\partial f}{\partial x_j} V_0$. Значит,

$$\int_K d\Omega = (-1)^{j-1} \int_{\mathrm{cl}\, K} \frac{\partial f}{\partial x_j} d\mu(x) = (-1)^{j-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1} \cap \mathrm{cl}\, K} \int_{\mathbb{R} \cap \mathrm{cl}\, K} \frac{\partial f}{\partial x_j} d\mu(x_j) d\mu(y) =$$

$$= (-1)^{j-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1} \cap \mathrm{cl}\, K} (f(y,1) - f(y,0)) d\mu(y) = (-1)^{j-1} \left(\int_{K_1^j} f(y,1) d\mu(y) - \int_{K_0^j} f(y,0) d\mu(y) \right).$$

С другой стороны,

$$\int_{\partial K} \Omega = \int_{(-1)^{j+1} K_1^j + (-1)^{j+0} K_0^j} \Omega = \int_{(-1)^{j+1} K_1^j + (-1)^{j+0} K_0^j} f(x) V^j =$$

$$= (-1)^{j+1} \left(\int_{(-1)^{j+1} K_1^j} f(x) V_1^j - \int_{(-1)^{j+0} K_0^j} f(x) V_0^j \right) = (-1)^{j-1} \left(\int_{K_1^j} f(y,1) d\mu(y) - \int_{K_0^j} f(y,0) d\mu(y) \right).$$

Здесь было использовано обозначение $f(y, \alpha) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, \alpha, x_{j+1}, \ldots, x_n), \alpha = 0, 1$. ■

§3. Интегрирование форм на многообразиях.

Определение 11. *Элементарным многообразием (клеткой) гладкости C^k называется образ стандартного куба K при отображении φ, являющемся диффеоморфизмом класса C^k (т.е. непрерывным вместе со всеми производными до порядка k включительно) некоторой окрестности замыкания cl(K) (неособость матрицы Якоби при этом заменяется требованием максимальности ее ранга).*

Пусть $K \subset \mathbb{R}^m$, $\varphi : K \to M \subset \mathbb{R}^n, m \leq n$. Тогда φ называется параметризацией, $\psi = \varphi^{-1}$ – координатным отображением, пара (M, ψ) – картой.

Касательным пространством $T(x)$ клетки M в точке x называется подпространство, порожденное всевозможными касательными векторами к кривым, лежащим в M и проходящим через точку x. Оно m-мерное, состоит из векторов $\varphi'(u)\vec{H}$, где $\vec{H} \in \mathbb{R}^m, u = \psi(x)$.

Совокупность элементов вида $(x, T(x))$ называется касательным расслоением клетки M.

Векторным полем на клетке называется функция, заданная на M и принимающая значения $\vec{A}(x) \in T(x)$.

Опишем несколько способов задания дифференциальных форм на клетке. В каждой точке x значение формы – антисимметрическая полилинейная форма, определенная на векторах из касательного пространства $T(x)$.

Форма может быть задана как сужение формы, заданной в некоторой области пространства $\mathbb{R}^n$, содержащей клетку M :

$$\Omega|_M(x)(\vec{G}_1, \ldots, \vec{G}_p) = \Omega(x)(\vec{G}_1, \ldots, \vec{G}_p)$$

для любых векторов $\vec{G}_1, \ldots, \vec{G}_p$ из $T(x)$.

Другой способ - замена переменной в форме, заданной на параметризующем кубе: если Ω задана на K, то

$$\psi^*\Omega(x)(\vec{G}_1, \ldots, \vec{G}_p) = \Omega(\psi(x)) \left(\psi'(\vec{G}_1), \ldots, \psi'(\vec{G}_n)\right).$$

И наоборот, по форме, заданной на клетке, можно построить форму на параметризующем кубе: если Π задана на M, то

$$\varphi^*\Pi(u)(\vec{H}_1, \ldots, \vec{H}_p) = \Pi(\varphi(u)) \left(\varphi'(\vec{H}_1), \ldots, \varphi'(\vec{H}_p)\right).$$

Например, $dx_i|_M = \psi^* \sum_{s=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_s} du_s$. В самом деле, для произвольного вектора $\vec{G} \in T(x)$, представимого в виде $\vec{G} = \varphi'(u)\vec{H}$,

$$dx_i|_M(x)(\vec{G}) = dx_i(\varphi'(u)\vec{H}) = \sum_{s=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_s}(u) H_s =$$

$$= \sum_{s=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_s}(u) du_s(\vec{H}) = \left(\psi^* \sum_{s=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_s}(u) du_s\right)(\vec{G}).$$

Дифференциальная $m-$ форма, заданная на клетке, называется невырожденной, если в каждой точке она принимает ненулевые значения на каком-нибудь наборе векторов соответствующего касательного простанства.

С помощью замен переменных можно попытаться определить операцию внешнего дифференцирования форм на клетке по формуле $d\Omega = \psi^* d_K \varphi^* \Omega$, где d_K обозначает введенную ранее операцию внешнего дифференцирования форм на кубе (области), но необходимо установить корректность такого определения.

Лемма 2. *Результат операции дифференцирования на клетке не зависит от выбора параметризации.*

Доказательство. Пусть $\hat{\varphi} : K \to M$ – другая параметризация, $\hat{\varphi}(v) = x$. Тогда $\varphi(u) = x = \hat{\varphi}(v) = \hat{\varphi}(\pi(u))$, где $v = \pi(u)$ – диффеоморфизм куба K на себя. Так как для любой формы Ω $\varphi^*\Omega(u) = \Omega(\varphi(u)) = \Omega(\hat{\varphi}(\pi(u))) = (\hat{\varphi}^*\Omega)(\pi(u)) = \pi^*\hat{\varphi}^*\Omega(u)$, то $\varphi^* = \pi^*\hat{\varphi}^*$. Аналогично, $u = \psi(x) = \pi^{-1}(\hat{\psi}(x)), \psi^* = \hat{\psi}^* \left(\pi^{-1}\right)^*$. Отсюда

$$\psi^* d_K \varphi^* \Omega = \hat{\psi}^* \left(\pi^{-1}\right)^* d_K \pi^* \hat{\varphi}^* \Omega = \hat{\psi}^* \left(\pi^{-1}\right)^* \pi^* d_K \hat{\varphi}^* \Omega = \hat{\psi}^* d_K \hat{\varphi}^* \Omega.$$

■

Определение 12. *Набор непрерывных векторных полей $\{\vec{e}_i(x)\}_{i=1}^m$ на клетке M называется репером, если для каждого $x \in M$ векторы $\{\vec{e}_i(x)\}_{i=1}^m$ образуют юазис касательного пространства $T(x)$.*

Примером репера служит набор $\{\varphi'(u)\vec{H}_i\}_{i=1}^m$, где $\{\vec{H}_i\}_{i=1}^m$ – базис пространства $\mathbb{R}^m$.

Определение 13. *Касательные пространства $T(x)$ и $T(y)$ ориентированы согласованно, если существует репер такой, что базисы $\{\vec{e}_i(x)\}_{i=1}^m$ и $\{\vec{e}_i(y)\}_{i=1}^m$ – положительно ориентированные.*

Примем без доказательства следующее утверждение.

Предложение 1. *Все касательные пространства клетки могут быть ориентированы согласованно. Непрерывная невырожденная дифференциальная $m-$ форма, заданная на клетке, на фиксированном репере принимает значения одного знака во всех точках клетки.*

Если все базисы $\{\varphi'(u)\vec{H}_i\}_{i=1}^m$, где $\{\vec{H}_i\}_{i=1}^m$ – положительно ориентированный базис пространства $\mathbb{R}^m$, – положительно ориентированы, то параметризация φ называется положительной.

Определение 14. *Интеграл от дифференциальной $m-$ формы Ω по клетке с положительной параметризацией φ определяется как*

$$\int_M \Omega = \int_K \varphi^* \Omega.$$

Использование рассуждений, примененных в предыдущем параграфе для исследования поведения интеграла от формы при замене переменной и доказательства леммы, позволяет установить, что данное определение не зависит от выбранной положительной параметризации.

Граница (край) клетки определяется как образ границы куба при параметризации. Она является клеточной цепью (т.е. формальной целочисленной комбинацией $m-1$-мерных клеток, являющихся образами граней параметризующего куба). Ориентация границы клетки получается с помощью положительной параметризации из ориентации границы параметризующего куба.

Можно показать, что все эти понятия не зависят от выбора положительной параметризации.

Теорема 5 (Стокса-Пуанкаре для клетки)**.** *Для любой гладкой дифференциальной $m-1$-формы Ω, заданной на замыкании гладкой ориентированной m-мерной клетки, справедлива формула*

$$\int_{\partial M} \Omega = \int_M d\Omega.$$

Доказательство. Пусть $\varphi : K \to M$ – положительная параметризация. По формуле Стокса-Пуанкаре для куба $\int_{\partial K} \varphi^* \Omega = \int_K d\varphi^* \Omega$. В силу принятого определения границы клетки, ее ориентации и интеграла по клеточным цепям

$$\int_{\partial K} \varphi^* \Omega = \sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ \alpha=0,1}} (-1)^{\alpha+i} \int_{K_\alpha^i} \varphi^* \Omega = \sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ \alpha=0,1}} (-1)^{\alpha+i} \int_{M_\alpha^i} \Omega = \int_{\partial M} \Omega.$$

Для завешения доказательства осталось учесть свойство коммутирования операций дифференцирования и замены переменной: $\int_K d\varphi^* \Omega = \int_K \varphi^* d\Omega = \int_M d\Omega$. ∎

Отметим частные случаи формулы Стокса-Пуанкаре.

1.

Теорема 6 (Формула Гаусса-Остроградского)**.** *Если функции P, Q, R непрерывно дифференцируемы в области $D \subset \mathbb{R}^3$, то для любой гладкой трехмерной клетки $M \subset D$ справедлива формула*

$$\iint_{\partial M} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_M \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz.$$

Интеграл в левой части – это поверхностный интеграл второго рода, определяемый как интеграл от соответствующей формы $\int_{\partial M} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$. Тогда для доказательства достаточно применить формулу Стокса-Пуанкаре к форме $Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$.

Правило согласования ориентаций клетки и ее границы здесь выглядит очень просто геометрически (доказательство опускаем): за положительную ориентацию границы принимается направление вовне области M.

2.

Теорема 7 (Формула Стокса)**.** *Если функции P, Q, R непрерывно дифференцируемы в области $D \subset \mathbb{R}^3$, то для любой гладкой двумерной клетки $M \subset D$ справедлива формула*

$$\int_{\partial M} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_M \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx +$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Для доказательства достаточно применить формулу Стокса-Пуанкаре к форме $Pdx + Qdy + Rdz$, после чего записать интеграл от 2-формы как поверхностный второго рода.

Здесь ориентации клетки и ее границы согласованы в том смысле, что для положительной параметризации клетки ее граница ориентирована переносом ориентации границы параметризующего куба. Это определение не очень удобно для практических приложений. Приведем геометрическое определение правила согласования ориентации клетки и ее границы, не останавливаясь на доказательстве его эквивалентности ранее принятому.

Касательное пространство к клетке (двумерное в данном случае) определено также и в точках границы клетки. Удобно говорить тогда о касательной плоскости и о нормали $\vec{n}$ к ней. Направление нормали определяет выбор ориентации самой клетки.

В касательной плоскости будет лежать вектор касательной $\vec{\tau}$ к границе (в данном случае она является кусочно-гладкой кривой). В нем же будет лежать и перпендикулярный к $\vec{\tau}$ вектор $\vec{\nu}$. Выберем для него направление вовне клетки. Тогда для согласованного с ориентацией клетки направления касательной к границе выбирается такое, что тройка векторов $(\vec{n}, \vec{\nu}, \vec{\tau})$ образует положительный базис пространства.

Интеграл в левой части формулы Стокса вычисляется как

$$\int_{\partial M} Pdx + Qdy + Rdz = \int_T \left(P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\frac{dz}{dt} \right) dt,$$

где T – объединение параметризующих части границы отрезков, и таким образом совпадает с криволинейным интегралом второго рода не только по внешнему сходству обозначения, но и по сути.

Частным случаем формулы Стокса (для плоской области $D \subset \{z = 0\}$) является формула Грина

$$\int_{\partial M} Pdx + Qdy = \iint_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Правило согласования в данном случае выглядит очень просто - интеграл в правой части понимается как обычный двойной интеграл, а направление обхода границы выбирается так, что область M остается слева.

Если форма $Pdx + Qdy$ замкнута (т.е. $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ в D), то интеграл в левой части равен нулю для любой замкнутой кривой, лежащей в D. Выбрав две точки в D и соединив их двумя различными кривыми, лежащими в D, получим, что интегралы по ним равны. В самом деле, изменив направление обхода одной из них на противоположное, получится замкнутая кривая, интеграл по которой равен нулю и в то же время он равен разности интегралов по двум выбранным кривым. Тем самым получилось условие независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования.

Вернемся к способам задания форм на клетке. Выясним, что следует взять в качестве аналога формы объема. Это должна быть форма, которая на любом наборе линейно независимых векторов из касательного пространства должна быть равна по модулю объему призмы, натянутой на эти векторы со знаком, определяемым ориентацией набора векторов. Поскольку эта форма имеет старшую валентность (m), она имеет вид $V(x) = \alpha(x)\psi^*(du_1 \wedge \ldots \wedge du_m)$.

Предложение 2. *Если параметризация $x = \varphi(u)$ положительна, то*

$$V(x) = \psi^* \left(\sqrt{\det \left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u_i}(u), \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u_j}(u) \right)_{i,j=1}^m} du_1 \wedge \ldots \wedge du_m \right).$$

Доказательство. Определитель под знаком квадратного корня здесь – это определитель Грама $\det g(u)$ для векторов $\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u_i}(u), i = 1, \ldots, m$. Из курса линейной алгебры известно, что объем призмы Π, натянутой на эти векторы, равен квадратному корню из этого определителя. Положительность параметризации обеспечивает положительную ориентацию базиса касательного пространства, состоящего из этих векторов. Отсюда

$$V(x) \left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u_1}(u), \ldots, \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u_m}(u) \right) = \mu_m(\Pi) = \sqrt{\det \left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u_i}(u), \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u_j}(u) \right)_{i,j=1}^m}.$$

С другой стороны, поскольку $\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u_i}(u) = \varphi'(u)(\vec{H}_i), i = 1, \ldots, m$, имеем

$$\alpha(x)\psi^*(du_1 \wedge \ldots \wedge du_m) \left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u_1}(u), \ldots, \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u_m}(u) \right) = \alpha(x) du_1 \wedge \ldots \wedge du_m \left(\vec{H}_1, \ldots, \vec{H}_m \right) = \alpha(x).$$

■

Теперь интеграл от любой суммируемой формы старшей валентности на клетке $\Omega(x) = f(x)V(x)$ может быть вычислен (для положительной параметризации) по формуле

$$\int_M \Omega = \int_K \varphi^* \Omega = \int_K f(\varphi(u)) \sqrt{\det g(u)} V_K = \int_K f(\varphi(u)) \sqrt{\det g(u)} d\mu(u).$$

Интеграл в правой части получившегося равенства имеет смысл для любой параметризации.

Определение 15. *Интегралом от функции f по мере Лебега на клетке M называется*

$$\int_M f(x) d\mu_M(x) = \int_K f(\varphi(u)) \sqrt{\det g(u)} d\mu(u).$$

Предложение 3. *Интеграл по мере Лебега на клетке не зависит от параметризации этой клетки.*

Доказательство. Пусть $x = \hat{\varphi}(v)$ – другая параметризация, $\varphi = \hat{\varphi} \circ \pi$, где $v = \pi(u)$ – диффеоморфизм куба K. Тогда $\pi'(u)$ – линейный оператор, и из курса линейной алгебры известно, что матрица Грама при линейной замене преобразуется следующим образом:

$$g_\varphi(u) = \left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u_i}(u), \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u_j}(u) \right)_{i,j=1}^{m} = \left(\pi'(u)\right)^T g_{\hat{\varphi}}(\varphi(u))\pi'(u),$$

Отсюда

$$\int_K f(\hat{\varphi}(v))\sqrt{\det g_{\hat{\varphi}}(v)}d\mu(v) = \int_K f(\hat{\varphi}(\pi(u)))|\det \pi'(u)|\sqrt{\det g_{\hat{\varphi}}(\pi(u))}d\mu(u) =$$

$$= \int_K f(\varphi(u))\sqrt{\det g_\varphi(u)}d\mu(u).$$

■

Рассмотрим подробнее частные случаи введенного понятия.

$1. m = 1, n = 3$.

В этом случае параметризующий куб – это отрезок $[0, 1]$,

$$\det g(u) = (\vec{\varphi}'(u), \vec{\varphi}'(u)) = \left(x'(u)\right)^2 + \left(y'(u)\right)^2 + \left(z'(u)\right)^2,$$

и интеграл по мере Лебега на одномерной клетке вычисляется как

$$\int_0^1 f(x(u), y(u), z(u))\sqrt{\left(x'(u)\right)^2 + \left(y'(u)\right)^2 + \left(z'(u)\right)^2}d\mu(u),$$

т.е. совпадает (в случае интегрируемости по Риману подинтегральной функции) с введенным ранее (во втором семестре) криволинейным интегралом первого рода $\int_M f(x, y, z)ds$.

$2. m = 2, n = 3$.

В этом случае параметризующий куб – это квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$. Обозначив параметры через u, v, вычислим компоненты матрицы Грама, используя общепринятые обозначения для них:

$$E = \left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \right) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \left(\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}, \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\right) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

В этих обозначениях формула вычисления интеграла по мере Лебега на двумерной клетке выглядит так:

$$\int_M f(x,y,z)d\mu_M(x,y,z) = \iint_K f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}d\mu(u,v)$$

и этот интеграл называется поверхностным интегралом первого рода, обозначается он так:

$$\iint_M f(x,y,z)dS.$$

В случае $f \equiv 1$ значение этого интеграла $\iint_M dS$ называется площадью поверхности M.

Выясним физический смысл поверхностного интеграла второго рода.

Поток постоянного векторного поля $\vec{A} = (P,Q,R)$ через параллелограмм на векторах $\vec{\xi_1}, \vec{\xi_2}$ равен $(\vec{A}, \vec{\xi_1}, \vec{\xi_2})$.

Вычислим его для случая базисных векторов касательного пространства к двумерной клетке.

$$\left(\vec{A}, \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}, \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\right) = \left(\vec{A}, \left[\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}, \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\right]\right) = \left(\vec{A}, \vec{n}\right)\left|\left[\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}, \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\right]\right| = \left(\vec{A}, \vec{n}\right)\sqrt{EG-F^2}.$$

Тогда потоком произвольного векторного поля $\vec{A} = (P,Q,R)$ через поверхность (двумерную клетку) M в направлении нормали $\vec{n}$ естественно считать интеграл

$$\iint_K \left(\vec{A}, \vec{n}\right)\sqrt{EG-F^2}d\mu(u,v) = \iint_M \left(\vec{A}, \vec{n}\right)dS.$$

Посчитаем теперь сужения базисных 2-форм на M, ограничившись лишь одной из них (для остальных подсчеты аналогичны).

$$\varphi^*(dy \wedge dz) = \left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) \wedge \left(\frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)du \wedge dv = \left[\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}, \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\right]_1 du \wedge dv;$$

$$dy \wedge dz = \psi^*\left(\frac{\left[\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}, \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\right]_1}{\left|\left[\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}, \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\right]\right|}\sqrt{\det g(u,v)}du \wedge dv\right) = \cos(\vec{n}, \vec{i})V_M(\varphi(u,v)).$$

Отсюда $\iint_M Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_M \left(\vec{A}, \vec{n}\right) dS$, то есть поверхностный интеграл второго рода равен потоку соответствующего векторного поля.

Формула Гаусса-Остроградского может быть записана как

$$\iint_{\partial M} \left(\vec{A}, \vec{n}\right) dS = \iiint_M \operatorname{div} \vec{A} dxdydz.$$

Взяв в качестве M шар радиуса ε с центром в произвольной точке и поделив обе части получившегося равенства на объем шара, можно доказать, что предел получившегося выражения в правой части при $\varepsilon \to 0$ равен значению дивергенции векторного поля в рассматриваемой точке. Левая же часть в пределе дает «поток векторного поля в точке», т.е. значение дивергенции показывает величину источника (для положительной дивергенции) или стока поля в точке. Это называется также геометрическим определением дивергенции.

Циркуляцией векторного поля $\vec{A} = (P, Q, R)$ вдоль замкнутой кривой L называется интеграл

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \oint_L (\vec{A}, d\vec{r}).$$

Формула Стокса может быть записана как

$$\oint_{\partial M} (\vec{A}, d\vec{r}) = \iint_M (\operatorname{rot} \vec{A}, \vec{n}) dS.$$

Взяв в качестве M круг радиуса ε в плоскости с нормалью $\vec{n}$ с центром в произвольной точке и поделив обе части получившегося равенства на площадь круга, можно доказать, что предел предел получившегося выражения в правой части при $\varepsilon \to 0$ равен значению $(\operatorname{rot} \vec{A}, \vec{n})$ в рассматриваемой точке. Левая же часть в пределе дает «циркуляцию векторного поля в точке перпендикулярно вектору $\vec{n}$», что дает геометрическое определение ротора.

Отметим, что формула Стокса-Пуанкаре (а также ее частные случаи) справедлива для существенно более общих множеств, чем клетки. Например, обычная сфера не является клеткой.

Ограничимся лишь определением таких множеств.

Пусть $M = \cup_{i=1}^N M_i$, где M_i – элементарные многообразия одинаковой размерности, причем замыкания их параметризующих кубов K_i не пересекаются. Если $M_i \cap M_j \neq \emptyset$, то они называются сцепленными, когда для карт $(M_i, \psi_i), (M_j, \psi_j)$ найдется диффеоморфизм π множества $\psi_i(M_i \cap M_j) \subset K_i$ на $\psi_j(M_i \cap M_j) \subset K_j$ такой, что для $x \in M_i \cap M_j, x = \varphi_i(u) = \varphi_j(v)$ справедливо равенство $v = \pi(u)$.

Дифференцируемым многообразием класса C^k называется множество $\cup_{i=1}^N M_i$ попарно сцепленных элементарных многообразий класса C^k (при этом диффеоморфизмы – также класса C^k). Набор карт $(M_i, \psi_i)_{i=1}^N$ называется атласом многообразия. Для сферы атлас из двух карт может быть получен стереографической проекцией из северного и южного полюсов на достаточно большие квадраты.

Каждое из элементарных многообразий может быть ориентированно подходящим репером. Два сцепленных многообразия могут быть ориентированы согласованно (т.е. ориентации на пересечении совпадут), но для дифференцируемого многообразия в целом это не всегда возможно. Примером может служить лист Мебиуса, который можно представить как квадрат $[0,1]^2$, две противоположные стороны которого отождествлены (склеены) в противоположных направлениях, т.е. вершина $(0,0)$ отождествляется с $(1,1)$, а $(0,1)$ – с $(1,0)$.

Если все элементарные многообразия M_i, $i = 1, \ldots, N$, могут быть ориентированы согласованно, то дифференцируемое многообразие называется ориентируемым. Именно для ориентируемых дифференцируемых многообразий справедлива формула Стокса-Пуанкаре и ее частные случаи. При этом для частных случаев никаких дополнительных определений не требуется, а для формулы Стокса-Пуанкаре понадобится определить, что собой представляют дифференциальные формы и интегралы от них для ориентируемых дифференцируемых многообразий. Это можно сделать, составив единую форму из форм на элементарных многообразиях с помощью разбиения единицы, аналогичному использованному при доказательстве формулы замены переменной в кратном интеграле Лебега.