Я. М. Дымарский

Лекции по математическому анализу, второй семестр

§ 1. Векторное пространство

В этой лекции мы введем необходимые геометрические понятия для построения многомерного анализа.

1.1. Арифметическое векторное пространство (АВП). Через $\mathbb{R}^n$, где $n \in \mathbb{N}$, мы будем обозначать n-мерное АВП. Это множество, элементы которого **векторы** $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, ...)$ задаются упорядоченным набором из n чисел: $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n)$. Числа a_i называют **координатами**.

1) Все векторы образуют **линейное пространство** с операциями **сложения** и **умножения на действительное число** по правилам:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} := (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n), \quad \alpha\mathbf{a} := (\alpha a_1, ..., \alpha a_n),$$

т.е. "покоординатно". Введенные операции удовлетворяют всем аксиомам линейного пространства:

1. коммутативность сложения;
2. ассоциативность сложения;
3. существование нулевого вектора: $\mathbf{0} = (0, ..., 0)$;
4. существование противоположного вектора: $-\mathbf{a} = (-a_1, ..., -a_n)$;
5. ассоциативность умножения на число;
6. дистрибутивность умножения вектора на число по сложению чисел;
7. дистрибутивность умножения вектора на число по сложению векторов;
8. нейтральность умножения вектора на число 1.

Задача. Самостоятельно расшифруйте, что подразумевают называнные аксиомы. Указание: введенные операции "вдохновлены" операциями с координатами векторов в геометрическом трехмерном пространстве.

Векторы $\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., \mathbf{e}_n = (0, ..., 0, 1)$ образуют **базис** линейного пространства; в этом базисе компоненты a_i вляются именно коорлинатами вектора (вспомните определение базиса и координат из курса линейной алгебры). Следовательно, данное пространство n-мерное.

2) Для того, чтобы ввести в обращение **метрические** понятия, мы вводим **скалярное произведение векторов**:

$$\mathbf{ab} := a_1 b_1 + ... + a_n b_n.$$

Очевидно, что выполнены аксиомы скалярного произведения:

1. коммутативность: $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$;
2. линейность по каждому сомножителю: $(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b})\mathbf{c} = \alpha\mathbf{ac} + \beta\mathbf{bc}$;
3. положительная определенность: 1) $\forall\mathbf{a} \hookrightarrow \mathbf{a}^2 := \mathbf{aa} \geqslant 0$, 2) $\mathbf{a}^2 = 0 \hookrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Линейное пространство вместе со скалярным произведением называется **евклидовым**. Напомним фундаментальное неравенство, порожденное скалярным произведением.

Лемма 1.1. ***Неравенство Коши-Буняковского*** *(Буняковский Виктор Яковлевич, 1804-1889):* $(\boldsymbol{ab})^2 \leqslant \boldsymbol{a}^2 \cdot \boldsymbol{b}^2$. *Знак равенства имеет место только в случае коллинеарности векторов (т.е.* $\boldsymbol{b} = \alpha\boldsymbol{a}$*).*

Доказательство основано на положительной определенности скалярного произведения. Числовая функция $f(t) := (t\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 \geqslant 0$ является квадратичной по t. Условие ее неотрицательности эквивалентно неположительности ее дискриминанта: $D/4 = (\mathbf{ab})^2 - \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 \leqslant 0$. Обнуление функции f возможно только тогда, когда $\exists t_0 : \ t_0\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$. ■

Следствие 1.1. *(неравенство Коши в* $\mathbb{R}^n$*).*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Скалярное произведение позволяет ввести "длину" вектора (модуль или норма вектора) и угол между векторами.

Определение 1.1. **Нормой** вектора называется неотрицательное число

$$|\mathbf{a}| := \sqrt{\mathbf{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2}.$$

Лемма 1.2. *(свойства нормы)*

1. *Неотрицательность:* $|\boldsymbol{a}| \geqslant 0$, $|\boldsymbol{a}| = 0 \hookrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.
2. *Однородность* $|\alpha\boldsymbol{a}| = |\alpha||\boldsymbol{a}|$.
3. *Неравенство Коши-Буняковского:* $|\boldsymbol{ab}| \leqslant |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.
4. *Неравенство треугольника:* $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$.

Задача. Докажите лемму 1.2. Запишите неравенство Коши-Буняковского и неравенство треугольника в координатах.

Определение 1.2. **Угол** между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ определяется по правилу

$$\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}} := \arccos \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}.$$

Определение "эксплуатирует" геометрическое определение скалярного произведения $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$. Оно корректно в силу неравенства Коши: $\left|\frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}\right| \leqslant 1$.

3) Наряду с нормой (длиной) вектора удобно применять понятие расстояния $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ между векторами. Чтобы привлечь геометрическую интуицию, будем, используя расстояние, называть векторы точками. Напомним, что разность $\mathbf{y} - \mathbf{x} := \mathbf{y} + (-1) \cdot \mathbf{x}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Назовем **расстоянием** между точками неотрицательное число $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := |\mathbf{y} - \mathbf{x}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + ... + (y_n - x_n)^2}$.

ЛЕММА 1.3. *(свойства расстояния)*

1. *Неотрицательность:* $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geqslant 0, \quad \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \hookrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.
2. *Симметричность:* $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.
3. *Неравенство треугольника:* $\forall \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{y}, \forall \boldsymbol{z} \hookrightarrow \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqslant \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \rho(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$.

Задача. Докажите лемму 1.3. Указание: см. лекцию 16 из первого семестра.

После введения всех структур АВП $\mathbb{R}^n$ можно назвать **арифметическим векторным n-мерным евклидово-метрическим пространством**.

Для использования нескольких АВП, применяют конструкцию

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. (прямого произведения)

1. **Прямым произведением** двух АВП называют множество всех упорядоченных пар
$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m := \{(x; y) : x \in \mathbb{R}^n, \ y \in \mathbb{R}^m\}$$
2. Прямом произведением двух подмножеств $A \subset \mathbb{R}^n$ и $B \subset \mathbb{R}^m$ называют подмножество прямого произведения пространств
$$A \times B := \{(x; y) : x \in A, \ y \in B\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

В прямым произведении $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ линейные операции определены "покоординатно" :
$$\alpha(x_1; y_1) + \beta(x_2; y_2) := (\alpha x_1 + \beta x_2; \alpha y_1 + \beta y_2).$$

Между прямым произведением $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и пространством $\mathbb{R}^{n+m}$ существует каноническая биекция
$$\Pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n+m},$$
$$\Pi(x, y) = \Pi(x^{(1)}, ..., x^{(n)}; y^{(1)}, ..., y^{(m)}) = (x^{(1)}, ..., x^{(n)}, y^{(1)}, ..., y^{(m)}),$$
т.е. координатам $y^{(1)}, ..., y^{(m)}$ присваиваются номера $n + 1, ..., n + m$. При этом сохраняются линейные операции:
$$\Pi(\alpha(x_1; y_1) + \beta(x_2; y_2)) = \alpha\Pi(x_1; y_1) + \beta\Pi(x_2; y_2).$$
Такая биекция называется **линейным изоморфизмом** (т.е. "одинаковостью" линейных пространств): $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$.

Примеры прямых произведений:

1. произведение двух отрезков $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$ – прямоугольник, трех отрезков $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3$ – прямоугольный параллелепипед, n отрезков $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ – n-мерный прямоугольный параллелепипед (см. рис. ???);
2. произведение окружности на прямую $S^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ – цилиндрическая поверхность (см. рис. ???);
3. произведение окружностей $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4$ – тор (см. рис. ???).

Рис. ???

1.2. Типы точек и подмножеств. Здесь мы изучим возможное расположение точек относительного выделенного подмножества и типы подмножеств. Там, где мы не будем непосредственно использовать векторные операции, точки обозначаем обычным шрифтом.

Определение 1.5. (двух типов окрестностей)

1. **Шаровой ε-окрестностью** ($\varepsilon > 0$) точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется подмножество
$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \rho(x, x_0) < \varepsilon\}.$$
Шаровую ε-окрестность мы будем называть просто "окрестностью".
2. **Проколотой шаровой ε-окрестностью** ($\varepsilon > 0$) точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется подмножество
$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ 0 < \rho(x, x_0) < \varepsilon\}.$$

Если $n = 1$, то определения совпадают с введенными ранее. Если $n = 2$ ($n = 3$), то ε-окрестность называют открытым кругом (шаром) с центром в точке x_0 и радиусом ε. Название **открытый n-мерный шар** используют для $U_\varepsilon(x_0)$ в общем случае, а **$(n-1)$-мерной сферой** с центром в точке x_0 и радиусом ε называют подмножество
$$S^{n-1}(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \rho(x, x_0) = \varepsilon\}.$$

Замечание. Наряду с шаровыми применяют и другие типы окрестностей. Например, открытые прямоугольные параллелепипеды $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times ... \times (a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ – точечное подмножество. Обозначим через X^C (от "complement") **дополнение** к X в $\mathbb{R}^n$: $X^C = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x \notin X\}$. Очевидно, что $(X^C)^C = X$.

Определение 1.6. (типов точек относительно подмножества) Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется по отношению к подмножеству X

1. **внутренней**, если x_0 принадлежит X вместе с некоторой окрестностью:
$$\exists \varepsilon > 0 : \ U_\varepsilon(x_0) \subset X;$$
2. **точкой прикосновения**, если в любой ее окрестности находятся точки из X:
$$\forall \varepsilon > 0 : \ U_\varepsilon(x_0) \cap X \neq \emptyset;$$
3. **предельной**, если в любой ее окрестности находятся точки из X, **отличные от** x_0 $\Leftrightarrow$ в любой ее **проколотой** окрестности находятся точки из X:
$$\forall \varepsilon > 0 : \ \dot{U}_\varepsilon(x_0) \cap X \neq \emptyset;$$
4. **изолированной**, если она принадлежит X, и существует ее проколотая окрестность, не пересекающаяся с X:
$$x_0 \in X \quad \& \ \ \exists \dot{U}_\varepsilon(x_0) : \ \dot{U}_\varepsilon(x_0) \cap X = \emptyset;$$

5. **граничной**, если в любой ее окрестности находятся как точки из X, так и точки из дополнения X^C:

$$\forall \varepsilon > 0 : \ U_\varepsilon(x_0) \cap X \neq \emptyset \quad \& \ U_\varepsilon(x_0) \cap X^C \neq \emptyset.$$

Введенные типы точек изображены на рис. ???

Рис. ???

Замечание. Точки прикосновения, предельные и граничные могут принадлежать как X, так и дополнению X^C.

Лемма 1.4. *(некоторые связи между типами точек)*

1. *Любая точка $x_0 \in X$ является точкой прикосновения (в частности внутренняя и изолированная).*
2. *Предельная точка является точкой прикосновения, но в общем случае не наоборот.*
3. *Если точка $x_0 \in X$, то она является предельной только в том случае, когда она не является изолированной.*
4. *Если точка $x_0 \in X$, то она является граничной только в том случае, когда она не является внутренней.*

Задача. Доказать лемму 1.4.

Определение 1.7. (типов подмножеств) Подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется

1. **открытым**, если все его точки внутренние;
2. **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки;
3. **ограниченным**, если оно целиком содержится в некотором шаре;
4. **компактным** если оно ограничено и замкнуто.

Лемма 1.5. *(фундаментальные свойства открытых и замкнутых подмножеств)*

1. *Дополнение к открытому (замкнутому) подмножеству замкнуто (открыто).*
2. *Пустое подмножество $\emptyset$ и все пространство $\mathbb{R}^n$ одновременно открыты и замкнуты.*
3. *Произвольное объединение (пересечение) открытых (замкнутых) подмножеств открыто (замкнуто).*
4. *Любое **конечное** пересечение (объединение) открытых (замкнутых) подмножеств открыто (замкнуто).*

Задача. Докажите лемму 1.5.

Примеры открытых и замкнутых подмножеств.

1. Открытый n-мерный шар и открытый прямоугольный параллелепипед являются открытыми подмножествами. (Докажите, опираясь на неравенство треугольника. Рис. ???)
2. Замкнутый n-мерный шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке x_0 это

$$\overline{U}_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \rho(x, x_0) \leqslant \varepsilon\} = U_\varepsilon(x_0) \cup S^{n-1}(x_0).$$

Замкнутый шар и прямоугольный параллелепипед – замкнутые подмножества (докажите!).

Определение 1.8. (типов подмножеств, порожденных X)

1. **Внутренностью** X^0 множества X называется совокупность всех его внутренних точек.
2. **Замыканием** $\overline{X}$ множества X называется совокупность всех его точек прикосновения.
3. **Границей** ∂X множества X называется совокупность всех его граничных точек.

Лемма 1.6. *(некоторые свойства подмножеств, порожденных X)*

1. *а) Внутренность $X^0 \subset X$ – наибольшее открытое подмножество, содержащееся в X. б) Множество открыто тогда и т.т., когда совпадает со своей внутренностью. в) $(X^0)^0 = X^0$.*
"Наибольшее" означает, что любое открытое подмножество, принадлежащее X, принадлежит X^0.
2. *а) Замыкание $\overline{X} \supset X$ – наименьшее замкнутое множество, содержащее X. б) Множество замкнуто тогда и т.т., когда оно совпадает со своим замыканием. в) $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.*
"Наименьшее" означает, что любое замкнутое подмножество, содержащее X, содержит $\overline{X}$.
3. *а) Границы множества X и его дополнения X^C совпадают: $\partial X = \partial X^C$. б)Граница есть замыкание минус внутренность: $\partial X = \overline{X} \setminus X^0$. в) $\partial(\partial X) \subset \partial X$, $\partial(\partial(\partial X)) = \partial(\partial X)$.*

Доказательство пп. 1 и 2 следует из определения. Доказательство п. 3а и 3б видны из классификации, данной ниже (рис. ???) Заметим, что операции внутренности и замыкания стабилизируются на первом шаге, а граница – на втором.

Пример. $\partial(U_\varepsilon(x_0)) = S^{n-1}(x_0)$, $\partial S^{n-1}(x_0) = S^{n-1}(x_0)$. Но на числовой прямой $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, а $\partial\mathbb{R} = \emptyset$.

Замечание 1. Введенные понятия зависят не только от множества X, но и от объемлющего пространства. Рассмотрим подмножество $\mathbb{Q}_x$ всех рациональных чисел на оси x в двумерном пространстве $\mathbb{R}^2$. Между $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}_x \subset \mathbb{R}^2$ существует естественная биекция $\cong$, сохраняющая расстояния между точками. И $\partial\mathbb{Q}_x = \mathbb{R}_x \cong \mathbb{R}$. Но $\partial\mathbb{R}_x = \mathbb{R}_x \neq \emptyset$, а $\partial\mathbb{R} = \emptyset$.

Замечание 2. Исследуя свойства точек по отношению к подмножеству X, во-первых, полезно работать одновременно с X и с его дополнением X^C. Во-вторых, можно применять следующую классификацию (т.е. разбиение на попарно непересекающиеся подмножества) множества X:

$$X = X^0 \bigcup Is(X) \bigcup Lm(X),$$

где $Is(X)$ – подмножество всех изолированных точек, а $Lm(X)$ – множество всех граничных точек из X, которые не являются изолированными. Последние будем называть **межевыми** (landmark).

<table>
<tr><td rowspan="4">X^0</td><td>$Is(X)$</td><td rowspan="4">$(X^C)^0$</td></tr>
<tr><td>$Lm(X)$</td></tr>
<tr><td>$Lm(X^C)$</td></tr>
<tr><td>$Is(X^C)$</td></tr>
</table>

Рис. ???

Заметим, что граница ∂X может формироваться как точками из X, так и точками из дополнения X^C, и граница является общей, т.е. $\partial X = \partial(X^C)$:

$$\partial X = Is(X) \cup Lm(X) \cup Lm(X^C) \cup Is(X^C) = \partial(X^C).$$

Задача. Докажите:

1. X открытое подмножество $\Leftrightarrow X = X^0 \Leftrightarrow Is(X) = Lm(X) = \varnothing$.
2. X замкнутое подмножество $\Leftrightarrow \partial X \subset X \Leftrightarrow Is(X^C) = Lm(X^C) = \varnothing$.
3. $\overline{X} = X^0 \bigcup \partial X = X \bigcup Is(X^C) \bigcup Lm(X^C)$.

1.3. Предел последовательности точек в $\mathbb{R}^n$. Здесь мы построим теорию пределов последовательностей в многомерном пространстве, аналогичную теории пределов числовых последовательностей.

Определение 1.9. **Последовательностью точек в** $\mathbb{R}^n$ называется отображение из множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ в пространство $\mathbb{R}^n$

Определение 1.10. Точка $x_0 = (x_0^{(1)}, ..., x_0^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$ называется **пределом** последовательности $\{x_k = (x_k^{(1)}, ..., x_k^{(n)})\}$, если $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(x_k, x_0) = 0$. Последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**.

Замечание. Предел последовательности в $\mathbb{R}^n$ можно определить на языке "$\varepsilon - k$" но мы свели его к старому понятию – пределу числовой последовательности $\{\rho(x_k, x_0)\}_{k=1}^{\infty}$. В $\mathbb{R}^n$ мы не будем вводить аналогов бесконечностей $\pm\infty \in \overline{\mathbb{R}}$, $\infty \in \mathbb{R}P$, т.е. предел в $\mathbb{R}^n$ всегда конечен.

Лемма 1.7. *(критерии сходимости) Последовательность сходится к точке x_0 тогда и т.т., когда:*

1. *геометрический критерий: в любой окрестности точки x_0 содержатся почти все элементы последовательности, кроме конечного их количества;*
2. *координатный критерий: $\forall i = 1, ..., n \hookrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_k^i = x_0^i$.*

Доказательство п. 2. $\Rightarrow$ очевидно, поскольку $|x_k^i - x_0^i| \leqslant \rho(x_i, x_0) \to 0$.

$\Leftarrow$ Для каждой координаты $i = 1, ..., n$ сущетвует номер K_i такой, что $\forall k > K_i$ выполняется оценка $|x_k^{(i)} - x_0^{(i)}| < \varepsilon/\sqrt{n}$. Следовательно, эта оценка верна $\forall k > K = \max_i\{K_i\}$. Поэтому $\forall k > K = \max_i\{K_i\}$ справедливо неравенство $\rho(x_k, x_0) < \varepsilon$. (В доказательстве принципиально, что количество координат **конечно**.) $\blacksquare$

Определение 1.11. Последовательность называется **ограниченной**, если ограничено множество ее значений.

Лемма 1.8. *(необходимое условие сходимости) Если последовательность сходится, то она ограничена.*

Задача. Докажите лемму 1.8.

В обратную сторону работает понятие подпоследовательности.

ТЕОРЕМА 1.1. *(теорема Больцано-Вейерштрасса в $\mathbb{R}^n$) Если последовательность точек $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ ограничена, то существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{k_m}\}$ $(k_1 < k_2 < ... < k_m, \quad \mathbb{N} \ni m \to \infty)$.*

Доказательство. Если последовательность ограничена, то каждая координатная последовательность $\{x_k^{(i)}\}$ $(i = 1, ..., n)$ тем более. Возьмем первую координатную последовательность. В силу теоремы Больцано-Вейерштрасса, из нее выберем сходящуюся подпоследовательность с номерами $k_1, k_2, ...$. Теперь оставляем во второй координатной последовательности подпоследовательность именно с этими номерами: $x_{k_1}^{(2)}, x_{k_2}^{(2)}, ..., x_{k_m}^{(2)}, ...$. Из этой последовательности, которая занумерована индексом m (!), выберем сходящуюся подпоследовательность и составим из третьей координатной последовательности подпоследовательность именно с этими номерами. И т.д. За **конечное** количество шагов мы получим нумерацию для n-й сходящейся координатной подпоследовательности. При этой нумерации будут сходиться все координатные подпоследовательности. Остается сослаться на координатный критерий сходимости. ■

Ценность понятия компактного множества объясняет

ТЕОРЕМА 1.2. *(критерий компактности) Подмножество X компактно тогда и т.т., когда из любой последовательности, принадлежащей X, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к **точке из** X.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Из ограниченности X следует, что найдется сходящаяся подпоследовательность, которая целиком принадлежит X. А из замкнутости X следует, что предельная точка этой подпоследовательности также принадлежит подмножеству X.

$\Leftarrow$ От противного. 1) Пусть X не является ограниченным множеством. Тогда найдется неограниченная последовательность точек $\{x_k\} \subset X$, для которой не выполняется необходимое условие сходимости (лемма 1.8). Значит, X – ограниченное подмножество.

2) Пусть X не является замкнутым множеством. Тогда существует точка x_0, которая является предельной множества X, но множеству не принадлежит. Поскольку точка предельная, то существует последовательность точек из X, которая к ней сходится (возьмем систему ее окрестностей радиуса $1/k$, $(k = 1, 2, ...)$ и в каждой окрестности выберем точку из X). Поскольку последовательность сходится к x_0, то и **любая** ее подпоследовательность к ней сходится. Противоречие. ■

Замечание. Понятие компактности применяется в функциональном анализе, дифференциальных уравнениях и уравнениях математической физики для доказательства существования решений бесконечномерных уравнений как предельной точки последовательности приближений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.12. Последовательность x_k называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 = k_0(\varepsilon) : \ \forall k > k_0 \ \forall m \ \hookrightarrow \ \rho(x_k, x_{k+m}) < \varepsilon.$$

ТЕОРЕМА 1.3. *(критерий Коши сходимости последовательности) Последовательность $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ сходится тогда и т.т., когда она фундаментальна.*

Доказательство. Последовательность в многомерном пространстве сходится тогда и т.т., когда сходятся координатные последовательности (лемма 1.7). Каждая координатная последовательность сходится тогда и т.т., когда она фундаментальна (критерий Коши для числовой последовательности). Наконец, последовательность в многомерном пространстве фундаментальна тогда и т.т., когда фундаментальна каждая координатная последовательность (доказательство осуществляется так же, как доказательство координатного критерия сходимости – докажите!). ■

1.4. Линейно связные и выпуклые подмножества. Порядок точек на числовой прямой существенно упрощает исследование числовых функций числового аргумента. Мы уже видели, что для вектор-функций числового аргумента не верна в полном объеме теорема Лагранжа. У числовых функций нескольких аргументов, которые мы будем изучать, сложности возникают за счет нетривиальной формы области определения. Чтобы избежать патологических ситуаций, рассмотрим специальные типы множеств, которые важны в приложениях – связные и выпуклые множества.

Определение 1.13. Рассмотрим отображение числового отрезка в пространство $\mathbb{R}^n$:

$$x:\ [a,b]\to\mathbb{R}^n,\ x(t)=(x^{(1)}(t),...,x^{(n)}(t)).$$

Пусть координатные функции $x^{(i)}(t)$ $(i=1,...,n)$ непрерывны. Тогда отображение x называется **непрерывной кривой**.

Данное определение аналогично определению кривой в геометрическом пространстве. Говорят, что непрерывная кривая **соединяет точки** x_1 и x_2, если $x(a)=x_1,\ x(b)=x_2$.

Определение 1.14. Подмножество $X\subset\mathbb{R}^n$ называется **линейно связным**, если любые две точки $x_1,x_2\in X$ можно соединить непрерывной кривой в X, т.е. образ $x([a,b])\subset X$.

Примеры. 1) Линейно связными подмножествами на числовой прямой являются только промежутки. 2) Кольцо на плоскости является линейно связным. 3) Объединение двух открытых кругов

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ (x-1)^2+y^2<1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ (x+1)^2+y^2<1\}$$

не является линейно связным подмножеством. Если добавить одну точку $O(0,0)$, получится линейно связное подмножество. Рис. ?????

Лемма 1.9. *(некоторые свойства линейно связных множеств)*

1. *Если пересечение двух связных множеств не пусто, то их объединение связно (см. рис. ???):*

$$X,Y - \textit{связны},\ X\bigcap Y\neq\emptyset\ \Rightarrow X\bigcup Y - \textit{связно}.$$

2. *Прямое произведение двух связных множеств связно (см. рис. ???).*

Рис. ???
Задача. Докажите лемму 1.9.

Определение 1.15. Открытое, линейно связное подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется **областью**.

Изучая функции нескольких переменных, в качестве области определения мы как правило берем область.

Среди всех непрерывных кривых, соединяющих две точки, самая простая – отрезок.

Определение 1.16. **Отрезком**, соединяющим точки $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$, называется кривая $x(t)$, которая задается формулой

$$\mathbf{x}(t) := (1-t)\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2, \ t \in [0,1].$$

Определение 1.17. Подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется **выпуклым**, если любые две точки $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ можно соединить отрезком в X, т.е. образ $\mathbf{x}([a,b]) \subset X$.

Примеры. 1) Круг, шар, n-мерный шар, прямоугольный параллелепипед – выпуклые подмножества. 2) Звезда не является выпуклым подмножеством. 3) Проколотая окрестность, кольцо не являются выпуклыми подмножествами (рис. ???)

Доказательство примера 1). Пусть точки x_1, x_2 принадлежат шару с центром в точке O и радиусом R. Тогда

$$|\mathbf{x}(t)| = |(1-t)\mathbf{x}_1 + t\mathbf{x}_2| \leqslant (1-t)R + tR = R.$$

Рис. ???

Лемма 1.10. *(некоторые свойства выпуклых множеств)*

1. *Любое пересечение выпуклых множеств выпукло (см. рис. ???).*
2. *Прямое произведение двух выпуклых множеств выпукло (см. рис. ???).*

Задача. Докажите лемму 1.10.

§ 2. Предел числовой функции нескольких переменных

В этой лекции мы обсудим основные понятия и факты теории пределов функции нескольких переменных. В основных чертах она повторяет теорию пределов функции одного переменного.

2.1. Понятие предела функции.

Определение 2.1. **Функцией нескольких переменных** мы называем отображение, область определения которого принадлежит n-мерному точечному пространству, а образ – числовой прямой:

$$f : \mathbb{R}^n \supset Def(f) \ \to \ \mathbb{R}^1.$$

Примеры. 1) Функция $T = f(x, y, t)$ температуры, зависящая от места $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$ и времени $t \in \mathbb{R}$. 2) Колебание струны – функция отклонения от положения равновесия $y = h(x, t)$, зависящая от точки $x \in [0, l] \subset \mathbb{R}$ на струне и времени $t \in \mathbb{R}$. 3) Распространение волны – функция вертикального отклонения поверхности жидкости $H = g(x, y, t)$, зависящая от места и времени.

Определение 2.2. **Графиком** функции f, зависящей от n переменных, называется подмножество точек

$$\Gamma = \{(x, y) = (x^{(1)}, ..., x^{(n)}, y) \in Def(f) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1} : \ y = f(x)\} =$$

$$\{(x, f(x)), \ x \in Def(f)\}.$$

Примеры. 1) Графиками квадратичных функций $z = x^2 \pm y^2$ являются параболоиды (эллиптический и гиперболический соответственно). 2) График функции $z = e^t \sin x$ – гармоническое колебание с экспоненциально растущей амплитудой (см. рис. ???).

Рис. ???

Аналогично одномерному случаю дадим два эквивалентных определения предела.

Определение 2.3. (по Коши) Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}_{\delta_0}(x_0) \subset Def(f)$ точки x_0. Точка $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\mathbb{R}P^1$) называется **пределом** функции f при $x \to x_0$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$: $\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \ \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(t_0)$.

Обозначение:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{(x^{(1)}, ..., x^{(n)}) \to (x_0^{(1)}, ..., x_0^{(n)})} f(x^{(1)}, ..., x^{(n)}) = t_0$$

Терминология: предел функции нескольких переменных будем также называть n-**арным**, чтобы отличать его от различных одномерных модификаций (см. ниже).

Определение 2.4. **Последовательностью Гейне** в точке x_0 мы называем последовательность точек $\{x_k\} \subset \dot{U}_\delta(x_0) \subset Def(f)$, которая сходится к точке x_0.

Определение 2.5. (предела функции по Гейне) Точка $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\mathbb{R}P^1$) называется **пределом** функции f при $x \to x_0$, если для **любой** последовательности Гейне $x_k \to x_0$ справедливо: $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = t_0$.

Неизменными вместе с доказательствами остаются истинными следующие утверждения из теории пределов функции одной переменной:

1. теорема 4.1: эквивалентность двух определений пределов;
2. теорема 4.2: предельный переход в неравенствах, арифметические действия с пределами;
3. теорема 4.3: критерий Коши существования конечного предела;
4. теорема 4.5: замена переменной под знаком предела, точнее, предел сложной функции:

$$f : \mathbb{R}^n \supset Def(f) \to Def(g) \subset \mathbb{R},\ g : Def(g) \to \mathbb{R},\ h := g \cdot f :\ Def(f) \to \mathbb{R},$$

   где внутренняя функция f зависит от нескольких переменных, а внешняя g – от одной переменной;
5. лемма 5.1: свойства бесконечно больших и бесконечно малых функций;
6. лемма 5.2: свойства понятий o и O.

2.2. Предел по направлению. Принципиальное отличие случая одной переменной от случая нескольких (даже двух) переменных состоит в следующем. На прямой есть только два способа приблизиться к точке x_0 – слева и справа, поэтому существование предела равносильно существованию и совпадению односторонних пределов. В многомерном случае попытки исследовать предел с помощью специальных "одномерных стремлений" к точке x_0 (по лучам, по дугам кривых и т.д.) в общем случае бесполезны. Но можно использовать специальную **криволинейную** систему координат, у которой одной из координат является расстояние $\rho(x, x_0)$. Такая система координат позволяет понять, в чем отличие основного определения предела от его одномерных "суррогатов". Ограничимся двумерным случаем. Декартовы координаты точки обозначим (x, y). Напомним

Определение 2.6. (полярной системы координат – ПСК) **Полярным радиусом** $\rho \geqslant 0$ точки (x, y) называется расстояние от точки (x, y) до точки (x_0, y_0), **полярным углом** φ – угол от положительного направления оси Ox к радиус-вектору $\mathbf{a} = (x - x_0, y - y_0) \neq \mathbf{0}$. Формулы перехода таковы:

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\varphi, \\ y = y_0 + \rho\sin\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y-y_0}{x-x_0} + \pi k + 2\pi m \end{cases},$$

где $x \neq x_0$ (иначе возьмем функцию arcctg), параметр $k = 0, 1$ зависит от координатной четверти и определяется знаками пары чисел $(x - x_0, y - y_0)$, натуральный параметр $m \in \mathbb{N}$ – произвольный. Точке $P = (x_0, y_0)$, которую называют **полюсом**, отвечает одна (а не пара!) полярных координат: $\rho = 0$, угол φ для нее не определен.

Замечание. Специфика определения ПСК такова, такова, что в любой окрестности полюса $U_\varepsilon(P)$ не соблюдается биективное соответствие между декартовыми и полярными координатами. Но существует биекция между любой проколотой окрестностью, из которой удален произвольный луч $\varphi = const = \varphi_0$ и открытым прямоугольником:

$$\dot{U}_\varepsilon(P) \setminus \{\varphi = \varphi_0\} \ \leftrightarrow \ (0 < \rho < \varepsilon) \times (\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + 2\pi)$$

На рис. ??? биекция изображена для случая $P = \mathbf{0}$, $\varphi_0 = 0$.

Рис. ???

Обозначим $\widetilde{f}(\rho, \varphi) := f(x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi))$ Из определения 2.2 следует очевидная

Лемма 2.1. *(о пределе функции двух переменных) Равносильны пределы:*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = t_0 \ \Leftrightarrow \ (uf) \lim_{\rho\to+0} \widetilde{f}(\rho, \varphi) = t_0,$$

где второй предел надо понимать как ***равномерный по*** $\varphi \in [0, 2\pi]$*, (uniform limit) т.е.*

$$(uf) \lim_{\rho\to+0} \widetilde{f}(\rho, \varphi) = t_0 \ \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \ \forall \rho \in (0, \delta) > 0 \ \hookrightarrow \ \widetilde{f}(\rho, \varphi) \in U_\varepsilon(t_0). \tag{2.1}$$

Типичная ошибка заключается в том, что подбирают малое $\delta = \delta(\varepsilon, \varphi)$, зависящее не только от ε, но и от направления φ. Фактически заменяют понятие предела понятием предела по направлению. Дадим его:

Определение 2.7. Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки (x_0, y_0). **Пределом по направлению**, определяемому углом $\varphi_0 = const$, называется предел функции одной переменной ρ:

$$\lim_{\rho\to+0} f(x_0 + \rho \cos \varphi_0, y_0 + \rho \sin \varphi_0) = \lim_{\rho\to+0} \widetilde{f}(\rho, \varphi_0).$$

Для удобства будем вместо термина "предел" использовать термин **двойной предел**. К сожалению, система обозначений не совершенна, поэтому в каждом конкретном случае нужно определяться, какой предел вы ищете: двойной или по направлению.

Очевидно, что двойной предел "сильнее" предела по направлению:

Лемма 2.2. *Если существует двойной предел* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = t_0$*, то предел по любому направлению* φ_0 *существует и равен* t_0*.*

Задача. Докажите лемму 2.2.

Из леммы получаем полезное утверждение, позволяющее доказывать **отсутствие предела**:

Следствие 2.1. *Если отсутствует предел по какому-либо направлению, или пределы по двум разным направлениям различны, то двойной предел не существует.*

Однако (это принципиальный момент!) существование и совпадение пределов по всем направлениям не влечет за собой существование двойного предела. Рассмотрим на примерах описанные ситуации.

Пример 1. Существует ли двойной предел функции $f(x,y)=(x+y)^2/(x^2+y^2)$ при $(x,y)\to(0,0)$? Воспользуемся полярными координатами:

$$\widetilde{f}(\rho,\varphi)=\frac{(\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi)^2}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}=(\cos\varphi+\sin\varphi)^2.$$

При $\varphi=\pi/4$ предел по направлению равен 2, при $\varphi=-\pi/4$ – равен 0. Следовательно, двойной предел отсутствует.

Пример 2. Существует ли двойной предел функции $f(x,y)=x^2y/(x^4+y^2)$ при $(x,y)\to(0,0)$?

$$\widetilde{f}(\rho,\varphi)=\frac{\rho^2\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^4\cos^4\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}=\frac{\rho\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^2\cos^4\varphi+\sin^2\varphi}.$$

Если $\sin\varphi=0$, то числитель тождественно равен нулю. Если $\sin\varphi\neq0$, то при **фиксированном** φ имеем

$$\left|\frac{\rho\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^2\cos^4\varphi+\sin^2\varphi}\right|\leqslant\frac{\rho\cos^2\varphi|\sin\varphi|}{\sin^2\varphi}=\frac{\rho\cos^2\varphi}{|\sin\varphi|}\to0 \text{ при } \rho\to0.$$

Следовательно, предел функции по любому направлению равен нулю. Теперь будем приближаться к началу координат по параболе $y=x^2$. Поскольку $f(x,x^2)\equiv1/2$, то предел по параболе равен 1/2. Следовательно, двойной предел отсутствует.

Чтобы разобраться, почему так происходит, исследуем так называемые **линии уровня** функции f, т.е. решения уравнения с двумя неизвестными $f(x,y)=c$, где $c=const$ – "уровень". (Терминология навеяна географическими картами.) Построить линию уровня можно следующим образом: пересечь график $Gr(f)$ горизонтальной плоскостью $z=c$ и спроектировать полученное подмножество на плоскость (x,y) (см. рис. ???).

Рис. ???

Примеры. 1) Линиями уровня $x^2+y^2=c$ квадратичной функции $z=x^2+y^2$ являются: при $c<0$ – пустое множество, при $c=0$ – точка, при $c>0$ – окружность радиуса $\sqrt{c}$ (рис. ???). 2) Линиями уровня $x^2-y^2=c$ квадратичной функции $z=x^2-y^2$ являются: при $c\neq0$ – гипербола, при $c=0$ – объединение двух пересекающихся прямых (рис. ???).

Рис. ???

Поскольку $|x^2y/(x^4+y^2)|\leqslant1/2$, параметр $-1/2\leqslant c\leqslant1/2$. Решая уравнение $x^2y/(x^4+y^2)=c$ относительно неизвестного y получаем

$$y=\frac{1\pm\sqrt{1-4c^2}}{2c}x^2.$$

Следовательно, каждая линия уровня, кроме $c\neq0$ и $c=\pm1/2$, представляет собой **две параболы**: если $c>0$ (<0) – в верхней (нижней) полуплоскости. Линия уровня $c=\pm1/2$ – одна парабола в верхней (нижней) полуплоскости. Линия уровня $c=0$ – объединение осей координат $\{x=0\}\cup\{y=0\}$ (рис. ???) Поскольку линии уровня, отличные от $c=0$, это параболы, которые **касаются оси** x, то любой луч, выходящий из начала координат (кроме осей координат), пересекает или все параболы выше оси x, или все параболы ниже оси x. Возьмем произвольный луч выше оси x: двигаясь по нему к началу координат из бесконечности, мы сначала будем подниматься до уровня $1/2$, а потом опускаться до нуля. Вот по этой причине предел по любому направлению равен нулю. Но при этом к началу координат подходят линии разных уровней, поэтому двойного предела нет.

Рис. ???

Замечание. Попутно мы поняли, что если к точке (x_0, y_0) на плоскости неограниченно приближаются линии разных уровней, в этой точке предел функции отсутствует.

Как гарантировать себя от ситуации, рассмотренной в примере 2? На этот вопрос отвечает очевидная

Лемма 2.3. *(критерий существования двойного предела) Конечный двойной предел* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = t_0 \in \mathbb{R}$ *существует тогда и т.т., когда существует такая неотрицательная функция* $F(\rho)$, *что*

$$|\widetilde{f}(\rho,\varphi) - t_0| \leqslant F(\rho), \text{ где } F(\rho) \to 0 \text{ при } \rho \to +0.$$

На практике обычно применяют лемму 2.3, а не равномерный предел (2.1).

Пример 3. Существует ли двойной предел функции $f(x,y) = x^2y/(x^2+y^2)$ при $(x,y) \to (0,0)$? Справедлива оценка

$$|\widetilde{f}(\rho,\varphi)| = \left|\frac{\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}\right| = \rho\cos^2\varphi|\sin\varphi| \leqslant \rho.$$

Следовательно, предел существует и равен нулю. Заметим, из того, что $\lim\limits_{\rho\to+0}(\rho\cos^2\varphi|\sin\varphi|) = 0$, еще не следует, что $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0!$

Рассмотрим случай высоких размерностей $n \geqslant 3$

Определение 2.8. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$. **Пределом по направлению** единичного вектора $\mathbf{e}$ $(|\mathbf{e}| = 1)$ называется предел функции одной переменной ρ:

$$\lim_{\rho\to+0} f(x_0 + \rho\mathbf{e}).$$

При $n = 2$ получим определение 2.6.

Задача. Сформулируйте и докажите аналог леммы 2.2 об n-арном пределе и пределе по направлению.

Координаты вектора $\mathbf{e} = (e_1, ..., e_n)$ определяют положение точки на единичной $(n-1)$-мерной сфере. Хотя координат n, но независимых среди них $(n-1)$. В трехмерном случае можно воспользоваться сферической системой координат:

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\theta\cos\varphi, \\ y = y_0 + \rho\cos\theta\sin\varphi, \\ z = z_0 + \rho\sin\theta, \end{cases}$$

где $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ – "географическая широта" , а $\varphi \in [-\pi, \pi]$ – "долгота"(см. рис. ???).

Рис. ???

Замечание. Как и в случае полярных координат, между сферическими и декартовыми координатами отсутствует биекция.

Задача. Пусть $P = (x_0, y_0, z_0)$. Какие точки из шаровой окрестности $U_\varepsilon(P)$ надо удалить, чтобы получить биекцию между сферическими и декартовыми координатами?

2.3. Предел по множеству и повторный предел. Предел по множеству является достаточно общей конструкцией, включающей в себя различные случаи вычисления пределов.

Определение 2.9. Пусть $E \subset Def(f) \subset \mathbb{R}^n$ – подмножество области определения функции f. Пусть x_0 – предельная точка подмножества E. Точка $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\mathbb{R}P^1$) называется пределом функции f **по множеству** E при $x \to x_0$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$: $\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \cap E \ \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(t_0)$.

Обозначение:

$$\lim_{x \to x_0, x \in E} f(x) = t_0.$$

Примерами пределов по множеству являются: 1) односторонние пределы функции одной переменной ($E = (x_0, x_0 + \delta)$); 2) предел по направлению (или по дуге кривой) функции нескольких переменных (пример 2); 3) предел по области определения, которая не содержит целиком малую δ-окрестность точки x_0.

Пример нахождения предела по нетривиальной области определения. Найти предел $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |xy|^{xy}$. Хотя о множестве E ничего не сказано, но область определения $Def(h) = \{x \neq 0,\ y \neq 0\}$ такова, что в любой проколотой окрестности точки $(0,0)$ найдутся точки, которые не принадлежат $E := Def(h)$. Будем рассматривать данную функцию как сложную:

$$f(x,y) = xy,\ g(u) = |u|^u,\ \ h(x,y) = g(f(x,y)) = |xy|^{xy}.$$

Предел "внутренней" функции равен нулю, поскольку

$$0 \leqslant |xy| = \rho^2 |\cos\varphi \sin\varphi| \leqslant \rho^2 \to 0 \text{ при } \rho \to +0.$$

При этом $f(x,y) \neq 0$, если $(x,y) \in Def(h)$. Предел "внешней" функции $\lim\limits_{u\to 0} |u|^u = 1$. Доказательство основано на потенциировании и применении правила Лопиталя. Все условия теоремы 4.5 выполнены. (Не трудно убедиться, что и доказательство теоремы остается без изменения.) Поэтому

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |xy|^{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(f(x,y)) = 1.$$

Еще один способ перехода от многомерного предела к одномерному состоит в последовательном применении предельных переходов по каждой координате в отдельности. Рассмотрим двумерный случай.

Определение 2.10. Пусть дана функция двух переменных $f(x,y)$ и точка $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Пусть для каждого числа y из некоторой окрестности точки y_0 существует предел функции одной переменной $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) =: \varphi(y)$. Тогда

$$\lim_{y\to y_0} \varphi(y) = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

называется **повторным пределом** функции f в точке (x_0, y_0). Аналогично определяется повторный предел $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$.

В общем случае из существования повторного предела не следует существование двойного. Также из существования двойного предела в общем случае не следует существование повторного. Рассмотрим два примера.

Пример 1. $f(x,y) = x^2y/(x^4+y^2)$. Повторные пределы существуют и оба равны нулю. Двойной предел, как показано выше, отсутствует.

Пример 2.

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$$

Двойной предел существует и равен нулю. Повторные пределы отсутствуют.

2.4. Отображение конечномерных пространств. Арифметическое векторное пространство $\mathbb{R}^n$ мы будем называть **конечномерным**, если нас в данной ситуации не интересует конкретное значение размерности n.

Определение 2.11. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. Мы говорим, что на X задано **отображение** конечномерных пространств или **вектор-функция** $f : X \to \mathbb{R}^m$ от n переменных, если каждой точке $x \in X$ поставлена в соответствие единственная точка $f(x) \in \mathbb{R}^m$.

Справедлива очевидная

Лемма 2.4. *Задание отображения эквивалентно заданию m координатных функций от n переменных:*

$$f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^m \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, ..., x_n), \\ ... \\ y_m = f_m(x_1, ..., x_n). \end{cases}$$

Частными случаями отображения точечных пространств являются: 1) **числовая функция одного переменного**, т.е. $n = m = 1$; 2) **кривая**, т.е. $n = 1$, $m \geqslant 2$; 3) **числовая функция нескольких переменных**, т.е. $n \geqslant 2$, $m = 1$.

Для случаев $n = 2, 3$, имеющих физическую интерпретацию, мы различаем точки и векторы. Числовые функции $f : \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3 \supset X \to \mathbb{R}$ называют **скалярным полем**. Отображения $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^n$ точечных множеств в векторное пространство той же размерности $n = 2, 3$ называют **векторным полем**. Удобно представлять его именно как "поле" – откладывать вектор-образ из точки-прообраза (рис. ???). Примерами скалярных полей являются температура, электростатический потенциал и др., векторные поля: напряженность гравитационного поля, напряженность электростатического поля, поле установившегося течения жидкости или газа и др.

Рис. ???

Для простоты считаем, что область определения $Def(f) = X$ является областью в $\mathbb{R}^n$. Понятие окрестности позволяет без изменений сформулировать понятие предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ для отображения f.

Определение 2.12. (по Коши) Точка $y_0 \in \mathbb{R}^m$ называется **пределом** отображения f при $x \to x_0$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$: $\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(y_0)$.

Терминология. Предел отображения еще называют **сильным пределом** в отличии от его одномерных модификаций (см. ниже).

Определение 2.13. (по Гейне) Точка $y_0 \in \mathbb{R}^m$ называется **пределом** отображения f при $x \to x_0$, если для **любой** последовательности Гейне $x_k \to x_0$ справедливо: $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = y_0$.

Для отображений общего вида, т.е. $m \geqslant 2$, остаются справедливыми те понятия и утверждения о пределах, которые не используют порядок на числовой прямой в образе:

1. теорема 4.1: эквивалентность двух определений пределов;
2. теорема 4.3: критерий Коши существования конечного предела;
3. теорема 4.5: замена переменной под знаком предела, точнее, предел суперпозиции отображений:
$$f : \mathbb{R}^n \supset Def(f) \to Def(g) \subset \mathbb{R}^m, \; g : Def(g) \to \mathbb{R}^p,$$
$$h := g \cdot f : Def(f) \to \mathbb{R}^p;$$
4. предел по множеству (в частности, предел по направлению – определение 2.7), повторные пределы.

Лемма 2.5. *(покоординатный критерий предела) Точка* $y_0 = (y_0^{(1)}, ..., y_0^{(m)})$ *является пределом отображения* f *при* $x \to x_0$ *тогда и т.т., когда для каждой координатной функции* $f_i(x)$ *число* $y_0^{(i)}$ *является пределом при* $x \to x_0$ $(i = 1, ..., m)$.

Замечание. Утверждение леммы 2.5 можно сформулировать так: для отображения **конечномерных** пространств понятия сильного предела и покоординатных пределов совпадают. Оказывается, для отображения бесконечномерных пространств это утверждение в общем случае неверно.

Доказательство можно осуществить пользуясь определением предела по Гейне и применить такие же рассуждения к последовательности $f(x_k)$, как при доказательстве п. 2 леммы 1.7 (критерий сходимости последовательности). Однако полезно увидеть **геометрический смысл** утверждения. Во-первых, проекцией шара $U_\varepsilon(y_0)$ на координатные оси является ε-окрестность числа $y_0^{(i)}$ (рис. ???). Поэтому $|f^{(i)}(x) - y_0^{(i)}| \leqslant \rho(f(x), y_0)$, откуда вытекает необходимость утверждения. Во-вторых, в силу m-мерной теоремы Пифагора, открытый m-мерный куб с ребром $2\varepsilon/\sqrt{m}$ принадлежит шаровой ε-окрестности точки y_0 (рис. ???):
$$(y_0^{(1)} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}, y_0^{(1)} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}) \times ... \times (y_0^{(m)} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}, y_0^{(m)} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}) \subset U_\varepsilon(y_0).$$

Откуда следует достаточность утверждения. Заметим, что размерность пространства-образа находится в знаменателе, поэтому предельный переход при $m \to \infty$ исключен. ■

Рис. ???

Наконец, налогично лемме 2.2 формулируется и доказывается

Лемма 2.6. *(необходимое условие существования предела) Если существует предел* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$*, то предел по любому направлению существует и равен* y_0*. В обратную сторону утверждение в общем случае неверно.*

Задача. Докажите лемму 2.6.

Замечание. В пространстве-образе сходимость эквивалентна покоординатный сходимости (п. 2 леммы 1.7, лемма 2.5), в пространстве-прообразе сходимость является только достаточным условием покоординатной сходимости (леммы 2.2 и 2.6).

§ 3. Непрерывность отображения конечномерных пространств

В этой лекции мы обсудим специфику понятия непрерывности отображений конечномерных пространств. Также мы исследуем понятие равномерной непрерывности.

3.1. Непрерывность отображения в точке.

Определение 3.1. Отображение $f:\mathbb{R}^n \supset Def(f) =: X \to \mathbb{R}^m$ называется **непрерывным в точке** $x_0 \in X$, если:

1. или x_0 является изолированной точкой подмножества X;
2. или x_0 является предельной точкой подмножества X и

$$\lim_{x\to x_0, x\in X} f(x) = f(x_0).$$

Определение можно сформулировать на языке $\varepsilon - \delta$ по Коши или на языке последовательностей по Гейне как это сделано для понятия предела. Но теперь нужно пользоваться не проколотой, а обычной окрестностью точки x_0, поскольку отображение в этой точке определено.

Лемма 3.1. *(покоординатный критерий непрерывности в точке) Отображение f непрерывно в точке x_0 тогда и т.т., когда каждая координатная функция $f_i(x)$ $(i = 1, ..., m)$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство сразу следует из леммы 2.5.

Понятие предела по направлению порождает понятие непрерывности по переменной.

Определение 3.2. Отображение f называется **непрерывным по переменной** $x^{(i)}$ в точке $x_0 = (x_0^{(1)}, ..., x_0^{(i)}, ..., x_0^{(n)})$, если функция одной переменной

$$\varphi(x^{(i)}) := f(x_0^{(1)}, ..., x_0^{(i-1)}, x^{(i)}, x_0^{(i+1)}, ..., x_0^{(n)})$$

непрерывна в точке $x_0^{(i)}$.

Терминология. Если точка x_0 является внутренней для множества X, то непрерывность по определению 1 еще называют **непрерывностью по совокупности переменных** в точке x_0.

Лемма 3.2. *(необходимое условие непрерывности) Если отображение f непрерывно по совокупности переменных в точке x_0, то оно непрерывно по каждой переменной в отдельности. В обратную сторону утверждение в общем случае неверно.*

Доказательство необходимости очевидно. Для обоснования второго утверждения достаточно привести пример (см. пример 2 из п 2.2) функции

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & x^2+y^2>0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases},$$

которая непрерывна по каждой переменной в точке $(0,0)$, но разрывна в этой точке поскольку в ней отсутствует предел.

Замечание. В пространстве-образе $\mathbb{R}^m$ непрерывность эквивалентна покоординатный непрерывности (лемма 3.1), в пространстве-прообразе $\mathbb{R}^n$ непрерывность является только достаточным условием покоординатной непрерывности (лемма 3.2).

Если трактовать пространство-образ $\mathbb{R}^m$ как векторное, то справедлива

Лемма 3.3. *(о непрерывности операций) Пусть даны два отображения $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ с общей областью определения $X \subset \mathbb{R}^n$, которые действуют в векторное пространство $\mathbb{R}^m$. Пусть эти отображения непрерывны в точке x_0. Тогда:*

1. *их линейная комбинация $\alpha\boldsymbol{f} + \beta\boldsymbol{g}$ также непрерывна в точке x_0;*
2. *если $m = 1$ (т.е. даны числовые функции нескольких переменных), то произведение функций $f(x)g(x)$ и их частное $f(x)/g(x)$ ($g(x_0) \neq 0$!) непрерывны в точке x_0.*

Доказательство немедленно вытекает из утверждений об арифметических действиях с пределами.

Аналогично случаю числовых функций числового аргумента формулируется и доказывается

Лемма 3.4. *(о непрерывности в точке суперпозиции отображений) Если отображение $f : \mathbb{R}^n \supset U_\varepsilon(x_0) \to \mathbb{R}^m$ непрерывно в точке x_0, а отображение $g : \mathbb{R}^m \supset U_\delta(y_0) \to \mathbb{R}^p$ непрерывно в точке $y_0 = f(x_0)$, то суперпозиция отображений $h = g \cdot f$, заведомо определенная в некоторой окрестности точки x_0, непрерывна в этой точке.*

3.2. Непрерывность отображения на множестве.

Определение 3.3. Отображение $f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^m$ называется непрерывным на X, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Ниже даются пять базовых утверждения, которые справедливы для отображений пространств произвольной размерности.

Теорема 3.1. *(о непрерывности операций на подмножестве) Пусть даны два отображения $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ с общей областью определения $X \subset \mathbb{R}^n$, которые действуют в векторное пространство $\mathbb{R}^m$. Пусть эти отображения непрерывны на X. Тогда:*

1. *их линейная комбинация $\alpha\boldsymbol{f} + \beta\boldsymbol{g}$ также непрерывна на X;*
2. *если $m = 1$ (т.е. даны числовые функции нескольких переменных), то произведение функций $f(x)g(x)$ непрерывно на X, и при дополнительном условии $\forall x \in X \hookrightarrow g(x) \neq 0$ их частное $f(x)/g(x)$ также непрерывно на X.*

Доказательство немедленно следует из леммы 3.3.

Теорема 3.2. *(о непрерывности на подмножестве суперпозиции отображений) Если отображение $f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^m$ непрерывно на подмножестве X, отображение $g : \mathbb{R}^m \supset Y \to \mathbb{R}^p$ непрерывно на подмножестве Y, и $f(X) \subset Y$, то суперпозиция отображений $h = g \cdot f : X \to \mathbb{R}^p$ непрерывна на X.*

Доказательство немедленно следует из леммы 3.4.

Задача. Отображение конечномерных пространств назовем **элементарным**, если каждая его координатная функция получена с помощью линейных операций и операции суперпозиции из элементарных функций одной переменной. С помощью теорем 3.1 и 3.2 докажите, что элементарное отображение конечномерных пространств непрерывно всюду, где оно определено.

Теорема 3.3. *(критерий непрерывности) Отображение $f:\mathbb{R}^n\supset X\to\mathbb{R}^m$, область определения которого открытое подмножество, непрерывно на X тогда и т.т., когда прообраз любого открытого подмножества из $\mathbb{R}^m$ открыт в $\mathbb{R}^n$:*

$$f \text{ непрерывно на } X=X^0\subset\mathbb{R}^n \;\Leftrightarrow\; \forall\, V=V^0\subset\mathbb{R}^m \;\hookrightarrow\; f^{-1}(V) \text{ открыто в } \mathbb{R}^n.$$

Замечание. Подмножество $V\subset\mathbb{R}^m$ не обязано принадлежать образу $f(X)$, но автоматически $f^{-1}(V)\subset X$.

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть $V\subset\mathbb{R}^m$ – открытое подмножество. Покажем, что каждая точка $x\in f^{-1}(V)$ является внутренней для $f^{-1}(V)$, т.е. "окружена" точками из $f^{-1}(V)$. Полный прообраз $f^{-1}(V)=\{x\in X:\ f(x)=y\in V\}$. Поскольку V открытое подмножество, существует $U_\varepsilon(y)\subset V$. В силу открытости подмножества X и непрерывности отображения f в точке x, существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)$, что: 1) $U_\delta(x)\subset X$, 2)$f(U_\delta(x))\subset U_\varepsilon(y)\subset V$. Значит, $U_\delta(x)\subset f^{-1}(V)$.

$\Leftarrow$ Пусть $x\in X$ – произвольная точка из области определения и $f(x)=y\in V$. Возьмем произвольную окрестность $U_\varepsilon(y)\subset V$ (такая окрестность существует в силу открытости подмножества V). Поскольку окрестность открытое подмножество, то его прообраз $f^{-1}(U_\varepsilon(y))\subset X$ открытое подмножество. По определению каждая точка открытого подмножества входит в него вместе с некоторой δ-окрестностью. Значит, существует окрестность $U_\delta(x)\subset f^{-1}(U_\varepsilon(y))$. Что означает непрерывность отображения в точке $x\in X$. ■

Следствие 3.1. *(решение строгого неравенства) Если числовая функция $f:\mathbb{R}^n\supset X\to\mathbb{R}$ определена на открытом подмножестве и непрерывна на нем, то решение строгого неравенства $f(x)>0$ $(<0,\neq)$ представляет собой открытое подмножество $\mathbb{R}^n$. В частности, если $n=1$ (т.е. f – числовая функция), то решение строгого неравенства есть объединение (конечное или счетное) открытых интервалов.*

Примеры.

1. $x^2-4>0 \;\Leftrightarrow\; (-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.
2. $\sin x\neq 0 \;\Leftrightarrow\; \bigcup_{i\in\mathbb{Z}}(k\pi,(k+1)\pi)$.

Задача. Самостоятельно сформулируйте и докажите утверждение о решении **системы** строгих неравенств, аналогичное следствию 3.1.

Теорема 3.4. *(образ компактного множества) Пусть отображение $f:\mathbb{R}^n\supset X\to\mathbb{R}^m$ непрерывно на компактном множестве X. Тогда множество значений $f(X)$ – компактное подмножество в $\mathbb{R}^m$. Коротко говоря, непрерывный образ компактного множества компактен.*

Доказательство основано на критерии компактности (теорема 1.2). Пусть $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset f(X)$ – произвольная последовательность. Она порождает (необязательно однозначно!) некоторую последовательность прообразов

$$\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X, \quad f(x_k) = y_k.$$

В силу компактности X, из последовательности $\{x_k\}$ можно выбрать сходящуюся в X подпоследовательность: $x_{k_i} \to x_0 \in X$ при $i \to \infty$. Тогда, в силу непрерывности отображения f в точке x_0, получаем сходимость образов: $y_{k_i} = f(x_{k_i}) \to y_0 = f(x_0) \in f(X)$. ■

Теорема 3.5. *(сохранение линейной связности при непрерывном отображении) Пусть отображение $f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^m$ непрерывно на линейно связным подмножестве X. Тогда его образ $f(X)$ также линейно связен.*

Доказательство. Пусть $y_1, y_2 \in f(X)$. Следовательно существуют прообразы $x_1, x_2 \in X$: $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$. Возьмем непрерывную кривую φ, соединяющую точки x_1 и x_2 в X, т.е. такое непрерывное отображение $\varphi : [a, b] \to X$, для которого $\varphi(a) = x_1$, $\varphi(b) = x_2$ (рис. ???). Тогда суперпозиция $f \cdot \varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ есть непрерывная функция на отрезке (следствие 3.1), для которой $(f \cdot \varphi)(a) = y_1$, $(f \cdot \varphi)(b) = y_2$. ■

Рис. ???

Замечание. Итак, компактность и линейная связность сохраняются в образах, а открытость – в прообразах.

3.3. Свойства числовых функций, непрерывных на множестве. Рассмтрим случай $m = 1$. Специфические свойства непрерывных числовых функций (одного или нескольких аргументов) связаны с **упорядоченностью** точек прямой.

Теорема 3.6. *(о промежуточных значениях) Пусть область определения $X \subset \mathbb{R}^n$ функции $f : X \to \mathbb{R}$ является линейно связной. Пусть $y_1 = f(x_1) < f(x_2) = y_2$. Тогда для любого значения $y_0 \in (y_1, y_2)$ найдется такая точка $x_0 \in X$, что $f(x_0) = y_0$.*

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы. Линейная связность позволяет свести функцию нескольких переменных к одной переменной. Возьмем непрерывную кривую φ, соединяющую точки x_1 и x_2 в X, т.е. такое непрерывное отображение $\varphi : [a, b] \to X$, для которого $\varphi(a) = x_1$, $\varphi(b) = x_2$. Тогда суперпозиция $f \cdot \varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ есть непрерывная числовая функция на отрезке, для которой $(f \cdot \varphi)(a) = y_1$, $(f \cdot \varphi)(b) = y_2$ (рис. ???). По теореме о промежуточных значениях 7.4 найдется число $t_0 \in [a, b]$, для которого $(f \cdot \varphi)(t_0) = y_0$. Обозначим $\varphi(t_0) = x_0 \in X$. Тогда $f(x_0) = y_0$, что и т.д. ■

Теорема 3.7. *(Вейерштрасса о достижимости точных граней) Пусть числовая функция $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывна на компактном подмножестве $X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда существуют точки $x_1, x_2 \in X$, в которых $f(x_1) = \inf_X f(x) = \min_X f(x)$, $f(x_2) = \sup_X f(x) = \max_X f(x)$. Т.е. непрерывная на компактном подмножестве функция достигает своих точных граней.*

Доказательство. Из теоремы 3.4 следует, что образ $f(X)$ является компактным подмножеством числовой прямой. Дальнейшие рассуждения, как и в доказательстве теоремы 7.2 (вторая теорема Вейерштрасса).

3.4. Равномерная непрерывность функции на множестве. Это свойство функции быть "одинаково" непрерывной во всех точках рассматриваемого множества.

Определение 3.4. Функция f называется **равномерно непрерывной** (РН) **на подмножестве** $X \subset \mathbb{R}^n$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых двух точек $x, x' \in X$ таких, что $\rho(x, x') < \delta$, справедлива оценка $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Непрерывность в точке означает, что малое **отклонение аргумента от выбранной точки** влечет малое отклонение функции. При равномерной непрерывности отклонение функции зависит **только от отклонения аргумента**, но не от самого аргумента. Свойство функции быть РН является глобальным в отличие от локального свойства непрерывности в точке.

Очевидно, что

Лемма 3.5. *Функция, РН на некотором множестве X, является РН на любом его подмножестве $X' \subset X$.*

Примеры. Равномерно непрерывны функции:

1. $y = x^2$ на любом **конечном** промежутке $\langle a, b\rangle$;
2. $y = \sin x$ на всей числовой оси $\mathbb{R}$;
3. $y = \arctan x$ на всей числовой оси $\mathbb{R}$;
4. $y = x$ на всей числовой оси $\mathbb{R}$.
5. $y = x \sin \frac{1}{x}$ на всей числовой оси $\mathbb{R}$.

Контрпримеры. Следующие функции НЕ являются РН:

1. $y = sign(x)$ на любом промежутке, содержащем точку $x_0 = 0$;
2. $y = \frac{1}{x}$ на промежутке $(0, b\rangle$;
3. $y = x^2$ на любом **бесконечном** промежутке $\langle a, +\infty)$;
4. $y = \sin \frac{1}{x}$ на промежутке $(0, b\rangle$.

Задача. Дайте определение равномерной непрерывности для отображения конечномерных пространств.

Лемма 3.6. *Из равномерной непрерывности функции на X следует ее непрерывность на $x \in X$.*

Доказательство. Хотя утверждение очевидно, рассмотрим ситуацию формально-логически на языке кванторов. Определение непрерывности на X:

$$\forall x \in X \ \hookrightarrow \ \lim_{x' \to x} f(x') = f(x) \ \Leftrightarrow$$

$$\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(x, \varepsilon) : \ \forall x' \in X \ \ \rho(x, x') < \delta \ \hookrightarrow \ |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Определение РН на X:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \ \forall x, x' \in X \ \ \rho(x, x') < \delta \ \hookrightarrow \ |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

В первом определении точка x стоит перед выбором δ, поэтому δ зависит от x. Во втором определении δ не зависит от x. Поэтому из второго определения следует первое. ■

Из леммы, во-первых, следует, что отсутствие непрерывности является достаточным условием для отсутствия РН (контрпример 1). Во-вторых, следует помнить, что обратное утверждение в общем случае неверно (контрпримеры 2-4).

Доказательство отсутствия РН опирается на отрицание определения РН: функция НЕ является РН, если

$$\exists\varepsilon_0 > 0 : \ \forall\delta \ \hookrightarrow \ \exists x, x' \in X : \ \rho(x, x') < \delta \ \hookrightarrow \ |f(x) - f(x')| \geqslant \varepsilon_0. \tag{3.1}$$

Контрпримеры. 2) $f(x) = 1/x$ на $(0, 1)$:

$$x = \frac{1}{k}, \ x' = \frac{1}{2k}, \text{ при } k \to \infty \ \rho(x, x') = \frac{1}{2k} \to 0 \ \wedge \ |f(x) - f(x')| = k \to \infty.$$

3) $f(x) = x^2$ на $[0, +\infty)$:

$$x = k + \frac{1}{k}, \ x' = k, \text{ при } k \to \infty \ \rho(x, x') = \frac{1}{k} \to 0 \ \wedge \ |f(x) - f(x')| = 2 + \frac{1}{k^2} \geqslant 2.$$

4) $f(x) = \sin 1/x$ на $(0, 1)$:

$$x = \frac{1}{2\pi k}, \ x' = \frac{1}{2\pi k + \pi/2},$$

$$\text{при } k \to \infty \ \rho(x, x') = \frac{\pi}{8\pi^2 k^2 + 2\pi^2 k} \to 0 \ \wedge \ |f(x) - f(x')| = 1.$$

Обратим внимание, что во всех случаях подмножество X некомпактно.

Теорема 3.8. *(Кантора о РН на компакте) Если функция f непрерывна на компактном подмножестве, то она РН на нем.*

Доказательство от противного. Тогда выполняется (3.1). Чтобы построить последовательность точек, возьмем последовательность чисел $\delta = \delta_k = 1/k$ $(k = 1, 2...)$ Возникают две последовательности точек $x_k, x'_k \in X$ таких, что $\rho(x_k, x'_k) < 1/k$, но $|f(x_k) - f(x'_k)| \geqslant \varepsilon_0$. В силу компактности X, из последовательности $\{x_k\}$ выбираем сходящуюся подпоследовательность: $x_{k_m} \to x_0 \in X$ при $m \to \infty$. Поскольку

$$\rho(x'_{k_m}, x_0) < \rho(x'_{k_m}, x_{k_m}) + \rho(x_{k_m}, x_0) < \frac{1}{k_m} + \rho(x_{k_m}, x_0) \to 0 \text{ при } m \to \infty,$$

то получаем вторую сходящуюся к той же точке x_0 подпоследовательность $x'_{k_m} \to x_0$. В силу **непрерывности функции в точке** x_0, получаем

$$\lim_{m\to\infty} f(x_{k_m}) = \lim_{m\to\infty} f(x'_{k_m}) = f(x_0).$$

Поэтому $\lim\limits_{m\to\infty} |f(x_{k_m}) - f(x_{k_m})| = 0$. Что противоречит допущению. ■

Следствие 3.2. *Функция f одной переменной, непрерывная на отрезке $[a, b]$, РН на нем.*

См. пример 1.

Следующая теорема связывает РН с операциями в образе.

Теорема 3.9. *Пусть функции f и g РН на множестве X. Тогда:*

1. *их линейная комбинация $\alpha f + \beta g$ также РН на X;*
2. *если дополнительно функции ограничены на X, то их произведение fg также РН на X.*

Задача. Докажите теорему

Для функций одной переменной получены "тонкие" результаты о РН. Докажем некоторые из них.

Теорема 3.10. *(критерий РН на конечном интервале) Функция, непрерывная на конечном интервале (a, b), РН на нем тогда и т.т., когда существуют конечные односторонние пределы $f(a+0)$ и $f(b-0)$.*

Доказательство. $\Leftarrow$ **Доопределим** функцию в концах интервала:

$$f(a) := f(a+0),\ f(b) := f(b-0).$$

Получили функцию, непрерывную на отрезке. Из теоремы Кантора следует, что она РН на $[a, b]$. Следовательно, f РН на (a, b)

$\Rightarrow$ Если для функции f выполнено условие РН на всем интервале (a, b), то оно тем более выполнено в правой полуокрестности точки a:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon):\ \forall x, x' \in (a, a+\delta)\ \hookrightarrow\ |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Но это условие (критерий) Коши существования конечного предела (теорема 4.3) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)$. Аналогично с точкой b. ■

Для бесконечного интервала имеет место только достаточное условие РН

Теорема 3.11. *(достаточное условие РН на луче) Если функция f непрерывна на луче $[a, +\infty)$ и имеет конечный предел $f(+\infty) \in \mathbb{R}$, то она РН на $[a, +\infty)$.*

Доказательство. Идея доказательства в том, что значения функции $f(x)$ попадают в малую окрестность числа $f(+\infty)$ для всех "далеких" значений x, а для "близких" значений аргумента работает теорема Кантора.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем по нему подходящее $\delta > 0$. Во-первых, из критерия Коши существования конечного предела следует, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\Delta > 0:\ \forall x, x' \geqslant \Delta\ \hookrightarrow\ |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.2}$$

Во-вторых, по Кантору, на отрезке $[a, \Delta]$ функция РН, поэтому

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0:\ \forall x, x' \in [a, \Delta]\ |x - x'| < \delta\ \hookrightarrow\ |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.3}$$

Теперь покажем, что число δ подходящее под определение РН, т.е.

$$\forall x, x' \in [a, +\infty)\ |x - x'| < \delta\ \hookrightarrow\ |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \tag{3.4}$$

Возможны три случая. Если $x, x' \in [a, \Delta]$, то (3.4) следует из (3.3). Если $x, x' \in [\Delta, +\infty]$, то (3.4) следует из (3.2). Наконец, если $x \in [a, \Delta]$, $x' \in [\Delta, +\infty]$, то

$$|f(x) - f(x')| \leqslant |f(x) - f(\Delta)| + |f(\Delta) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \ \blacksquare$$

Теорема 3.12. *(о стыковке области определения) Если функция f является РН на промежутках $\langle a, b]$ и $[b, c\rangle$, то она РН на $\langle a, c\rangle$.*

Доказательство аналгично доказательству теоремы 3.11.

Задача. Докажите теорему 3.12.

Задача. С помощью теорем 3.11 и 3.12 докажите РН функций из примеров 3 и 5.

Задача. Приведите пример функции, которая РН на промежутках $[a, b]$ и $(b, +\infty)$ в отдельности, но не является РН на их объединении $[a, +\infty)$.

Задача.Докажите, что непрерывная периодическая функция, определенная на всей числовой оси, является РН (см. пример 2).

РН удобно исследовать с помощью производной.

Теорема 3.13. *(достаточное условие РН через производную) Если функция f непрерывна на промежутке и имеет равномерно ограниченную производную внутри него, то она РН на этом промежутке.*

Доказательство. Пусть для любого x из внутренности промежутка $|f'(x)| < M$. Тогда из теоремы Лагранжа о среднем для любых x, x' из промежутка справедливо

$$|f(x) - f(x')| \leqslant M|x - x'|.$$

Следовательно, по $\varepsilon > 0$ нужно брать $\delta = \varepsilon/M$, чтобы удовлетворить условию РН. $\blacksquare$

См. пример. 4.

Теорема 3.14. *(достаточное условие отсутствия РН на луче через производную) Если функция f непрерывна на луче $[a, +\infty)$, дифференцируема на нем и $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, то f не является РН на $[a, +\infty)$.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = 1$. Берем произвольное (малое) число $\delta > 0$. Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, существует такое Δ, что для всех $x \geqslant \Delta$ выполняется $f'(x) > 2/\delta$. Теперь возьмем два числа: произвольное число $x \geqslant \Delta$ и $x' = x + \delta/2$. Выполняется условие $|x - x'| = \delta/2 < \delta$. Для этих значений аргумента справедлива (теорема о среднем!) оценка снизу для функции:

$$f(x') - f(x) = f'(\xi)(x' - x) > \frac{2}{\delta}\frac{\delta}{2} = 1. \ \blacksquare$$

См. контрпример 3.

§ 4. Производная отображения конечномерных пространств

В этой лекции мы изучим дифференцируемость функции нескольких переменных и отображения конечномерных пространств. Мы будем использовать возможности АВП. Во-первых, алгебраические операции с векторами, модуль вектора, угол между векторами, в частности понятие ортогональности. Там где мы непосредственно не применяем векторные операции, мы, как и выше, называем векторы точками; например, мы говорим о расстоянии между точками. Если мы хотим подчеркнуть векторную природу объекта, то обозначаем его жирным шрифтом.

4.1. Основные определения и понятия. Пусть функция f определена в некоторой окрестности $U_\delta(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ точки x_0. Пусть $x \in U_\delta(x_0)$ – произвольная точка. Разность точек $\Delta\mathbf{x} := x - x_0$ мы называем **приращением** аргумента в т. x_0.

Определение 4.1. (дифференцируемости)

1. Функция называется **дифференцируемой** в точке x_0, если существует вектор $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ такой, что
$$f(x) = f(x_0) + (\mathbf{a}, \Delta\mathbf{x}) + o(|\Delta\mathbf{x}|) \text{ при } x \to x_0,$$
где $o(|\Delta\mathbf{x}|)$ – это такая функция $\varphi(\Delta\mathbf{x})$, что $\lim\limits_{\Delta\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\varphi(\Delta\mathbf{x})}{|\Delta\mathbf{x}|} = 0$.
2. Вектор $\mathbf{a}$ называется **производной** или **градиентом** функции f в точке x_0. **Обозначение**: $\mathbf{a} = f'(x_0) = \mathbf{grad} f(x_0)$.
3. **Дифференциалом** функции f в точке x_0 называется линейная относительно приращения аргумента $\Delta\mathbf{x}$ функция $df(x_0) := (\mathbf{grad} f(x_0), \Delta\mathbf{x})$.

Замечание. При $n = 1$ данное определение совпадает с определением 9.2 производной и определением 9.4 дифференциала функции одной переменной. Воспользоваться определением 9.1 невозможно, поскольку нет операции деления на вектор.

Теорема 4.1. *(Единственность производной) Если производная существует, то она единственна.*

Доказательство. В противном случае существует вектор $\mathbf{b}$, для которого
$$f(x) = f(x_0) + (\mathbf{b}, \Delta\mathbf{x}) + o(|\Delta\mathbf{x}|) \text{ при } x \to x_0.$$

Сравнивая оба представления функции f, получаем что для любых $\Delta\mathbf{x}$ таких, что $|\Delta\mathbf{x}| < \delta$ верно: $(\mathbf{b\text{-}a}, \Delta\mathbf{x}) = o(|\Delta\mathbf{x}|)$. Возьмем $\Delta\mathbf{x} = t(\mathbf{b\text{-}a})$, где $0 < t < \delta/|\mathbf{b\text{-}a}|$, и поделим обе части равенства на t. Получим:
$$|\mathbf{b\text{-}a}|^2 = \frac{o(t|\mathbf{b\text{-}a}|)}{t} \ \Leftrightarrow \ |\mathbf{b\text{-}a}| = \frac{o(t|\mathbf{b\text{-}a}|)}{t|\mathbf{b\text{-}a}|} \to 0 \text{ при } t \to 0.$$

Значит, $|\mathbf{b\text{-}a}| = 0 \ \Leftrightarrow \ \mathbf{a} = \mathbf{b}$. ■

Следствие 4.1. *(Аналитический смысл дифференциала) Дифференциал – единственная функция, линейная относительно приращения аргумента, которая отличается от приращения данной функции на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем приращение аргумента:*

$$\Delta f(x_0) := f(x) - f(x_0) = df(x_0) + o(|\Delta \boldsymbol{x}|). \tag{4.1}$$

Доказательство. Равенство (12.2) следует из определения 4.1. Единственность дифференциала – из теоремы 4.1.

Условие дифференцируемости сильнее, чем непрерывность.

Лемма 4.1. *(Первое необходимое условие дифференцируемости) Если функция f дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство немедленно следует из определения:

$$f(x) - f(x_0) = (\mathbf{a}, \Delta\mathbf{x}) + o(|\Delta\mathbf{x}|) \to 0 \text{ при } x \to x_0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \blacksquare$$

Замечание. Указанное условие в общем случае не является критерием дифференцируемости (достаточно вспомнить функцию $f(x) = |x|$ в точке $x_0 = 0$).

4.2. Производная по направлению и частные производные. Сейчас мы дадим аналоги определения 9.1 для функции нескольких переменных. Пусть $\mathbf{e}$ – произвольный единичный ($|\mathbf{e}| = 1$) вектор.

Определение 4.2. **Производной** функции f в точке x_0 **по направлению** $\mathbf{e}$ называется предел

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(x_0) := \lim_{t\to+0} \frac{f(x_0 + t\mathbf{e}) - f(x_0)}{t}.$$

Лемма 4.2. *(Второе необходимое условие дифференцируемости) Если функция f дифференцируема в точке x_0, то у нее в этой точке существует производная по любому направлению, равная проекции градиента на выбранное направление:*

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(x_0) = (\boldsymbol{grad} f(x_0), \boldsymbol{e}).$$

Доказательство. Подставим в определение дифференцируемости $x = x_0 + t\mathbf{e}$:

$$f(x_0 + t\mathbf{e}) - f(x_0) = (\mathbf{grad} f(x_0), t\mathbf{e}) + o(t).$$

Следовательно

$$\lim_{t\to+0} \frac{f(x_0 + t\mathbf{e}) - f(x_0)}{t} = \lim_{t\to+0} \frac{(\mathbf{grad} f(x_0), t\mathbf{e}) + o(t)}{t} =$$

$$(\mathbf{grad} f(x_0), \mathbf{e}) + \lim_{t\to+0} \frac{o(t)}{t} = (\mathbf{grad} f(x_0), \mathbf{e}). \blacksquare$$

Замечание 1. Если в точке x_0 существуют производные по всем направлениям, то по переменной $\mathbf{e}$ определена функция

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(x_0) : \; S^{n-1} \to \mathbb{R}, \text{ где } S^{n-1} = \{\mathbf{e} : \; |\mathbf{e}| = 1\}.$$

Замечание 2. Из существования производной в точке x_0 по всем направлениям вовсе не следует, что функция дифференцируема. Рассмотрим функцию двух переменных

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y = x^2 \neq 0 \\ 0, & \text{если } y \neq x^2 \text{ или } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(график на рис. ???). В точке $(0,0)$ производная по любому направлению существует и равна нулю. Между тем в точке $(0,0)$ функция разрывна.

Рис. ???

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. **Частной производной** функции $f(x) = f(x^{(1)}, ..., x^{(n)})$ по переменной $x^{(i)}$ в точке $x_0 = (x_0^{(1)}, ..., x_0^{(n)})$ называется производная функции одной переменной $\varphi(x^{(i)}) := f(x_0^{(1)}, ..., x_0^{(i-1)}, x^{(i)}, x_0^{(i+1)}, ..., x_0^{(n)})$ в точке $x_0^{(i)}$, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial x^{(i)}}(x_0) = f'_{x^{(i)}}(x_0) = \varphi'(x_0^{(i)}) =$$

$$\lim_{x^{(i)} \to x_0^{(i)}} \frac{f(x_0^{(1)}, ..., x_0^{(i-1)}, x^{(i)}, x_0^{(i+1)}, ..., x_0^{(n)}) - f(x_0)}{x^{(i)} - x_0^{(i)}}.$$

ЛЕММА 4.3. *(Связь частных производных с производными по направлению) Обозначим через $\boldsymbol{e}_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ единичный вектор, указывающий направление i-й оси координат. Частная производная $f'_{x^{(i)}}(x_0)$ существует тогда и т.т., когда обе производные по направлениям $\boldsymbol{e}_i$ и $(-\boldsymbol{e}_i)$ существуют и отличаются знаком. При этом*

$$\frac{\partial f}{\partial x^{(i)}}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}_i}(x_0) = -\frac{\partial f}{\partial(-\boldsymbol{e}_i)}(x_0)$$

Доказательство. Частная производная $f'_{x^{(i)}}(x_0)$ существует тогда и т.т., когда функция $\varphi(x^{(i)})$ имеет в точке $x_0^{(i)}$ равные односторонние производные. Но

$$\varphi'_+(x^{(i)}) = \lim_{x^{(i)} \to x_0^{(i)}+0} \frac{f(x_0^{(1)}, ..., x_0^{(i)}, x^{(i)}, x_0^{(i)}, ..., x_0^{(n)}) - f(x_0)}{x^{(i)} - x_0^{(i)}} =$$

$$\lim_{t \to +0} \frac{f(x_0 + t\mathbf{e}_i) - f(x_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_i}(x_0),$$

$$\varphi'_-(x^{(i)}) = \lim_{x^{(i)} \to x_0^{(i)}-0} \frac{f(x_0^{(1)}, ..., x_0^{(i)}, x^{(i)}, x_0^{(i)}, ..., x_0^{(n)}) - f(x_0)}{x^{(i)} - x_0^{(i)}} =$$

$$\lim_{t \to +0} \frac{f(x_0 - t\mathbf{e}_i) - f(x_0)}{-t} = -\lim_{t \to +0} \frac{f(x_0 + t(-\mathbf{e}_i)) - f(x_0)}{t} = -\frac{\partial f}{\partial(-\mathbf{e}_i)}(x_0). \quad \blacksquare$$

ЛЕММА 4.4. *(Третье необходимое условие дифференцируемости) Если функция f дифференцируема в точке x_0, то у нее в этой точке существуют все частные производные, которые совпадают с соответствующими координатами градиента:*

$$\boldsymbol{grad} f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^{(1)}}(x_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x^{(n)}}(x_0) \right).$$

Доказательство. Мы знаем, что i-я координата градиента есть его проекция на единичный вектор $\mathbf{e}_i$. Из леммы 4.2 следует, что указанная проекция как раз есть производная по направлению вектора $\mathbf{e}_i$. С другой стороны, из леммы 4.3 следует, что: во-первых, существуют все частные производные; во-вторых, i-я частная производная равна производной по направлению вектора $\mathbf{e}_i$. ■

Замечание. Как мы показали, частная производная по переменной $x^{(i)}$ – это специальный случай производной по направлению: это две производные по направлениям $\pm\mathbf{e}_i$, которые отличаются знаком. Выше приведен пример функции, у которой производные в точке $O(0,0)$ по направлениям $\pm\mathbf{e}_i$ совпадают (равны нулю). Но функция не являющейся даже непрерывной в O.

Следствие 4.2. *(Выражение дифференциала через частные производные)*

$$df(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^{(i)}}(x_0)(x^{(i)} - x_0^{(i)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^{(i)}}(x_0)\Delta x^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^{(i)}}(x_0)\ dx^{(i)}.$$

Доказательство сразу следует из определения 4.1 дифференциала и леммы 4.4.

4.3. Геометрический смысл градиента. Теперь мы можем исследовать геометрический смысл градиента. Нам понадобятся понятие графика функции (определение 2.2) и вспомогательные понятия из аналитической геометрии. Мы знаем, что в трехмерном пространстве уравнение $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0 \quad (A^2+B^2+C^2 > 0)$ задает плоскость, проходящую через точку (x_0, y_0, z_0), с вектором нормали $\mathbf{N} = (A, B, C)$. По аналогии дадим

Определение 4.4. **Гиперплоскостью** в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящей через точку $z_0 = (x_0, y_0) = (x_0^{(1)}, ..., x_0^{(n)}, y_0)$, с вектором нормали $\mathbf{N} = (N_1, ..., N_n, N_{n+1})$ называется подмножество, определяемое уравнением

$$(\mathbf{N}, z - z_0) = 0, \text{ где } z = (x, y) = (x^{(1)}, ..., x^{(n)}, y) \ \Leftrightarrow$$

$$N_1(x^{(1)} - x_0^{(1)}) + ... + N_n(x^{(n)} - x_0^{(n)}) + N_{n+1}(y - y_0) = 0, \quad N_1^2 + ... + N_{n+1}^2 > 0.$$

(Размерность **гипер**плоскости равна n, т.е. она максимальна для многомерных плоскостей в пространстве размерности $n+1$; отсюда приставка "гипер".)

Ранее (см. пример 2 в лекции 2.2) мы использовали линии уровня функции двух переменных. Дадим общее

Определение 4.5. **Поверхностью уровня** c функции f называется полный прообраз

$$f^{-1}(c) = \{x \in Def(f):\ f(x) = c\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Примеры. Для функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ поверхность уровня $c < 0$ есть пустое множество, $c = 0$ – точка $O(0, ..., 0)$, $c > 0$ – сфера радиуса $\sqrt{c}$. Для линейной невырожденной функции $u = Ax + By + Cz$ поверхности уровней c есть параллельные плоскости.

Задача. Что представляют собой поверхности уровней $c \in \mathbb{R}$ квадратичной функции $u = x^2 + y^2 - z^2$?

Теперь сформулируем основное

Определение 4.6. **Касательной плоскостью** в точке $(x_0, f(x_0))$ к графику $Gr(f)$ называется гиперплоскость, проходящая через эту точку, с вектором нормали $(\mathbf{grad}f(x_0), -1) = (a_1, ..., a_n, -1)$:

$$a_1(x^{(1)} - x_0^{(1)}) + ... + a_n(x^{(n)} - x_0^{(n)}) - (y - f(x_0)) = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$y = f(x_0) + (\mathbf{grad}f(x_0), \Delta\mathbf{x}).$$

Теорема 4.2. *(Геометрический смысл дифференциала и градиента)*

1. *Касательная плоскость к графику функции f в точке касания $(x_0, f(x_0))$ существует тогда и т.т., когда функция f дифференцируема в точке x_0.*
2. *Касательная плоскость – единственная плоскость, которая приближает график функции в точке касания $(x_0, f(x_0))$ с точностью до $o(|\Delta\boldsymbol{x}|)$.*
3. *Касательная плоскость получается из графика градиента в результате параллельного переноса в точку касания $(x_0, f(x_0))$ (см. рис. ???).*
4. *Если градиент отличен от нуля $\boldsymbol{grad}f(x_0) \neq \boldsymbol{0}$, то он указывает направление наиболее быстрого роста функции f в точке x_0, а противоположный вектор $-\boldsymbol{grad}f(x_0)$ указывает направление наиболее быстрого убывания функции f в точке x_0. Другими словами,*
   (a) $\max_{\boldsymbol{e}} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(x_0)$ *достигается на векторе* $\boldsymbol{e}_{gr} := \frac{\boldsymbol{grad}f(x_0)}{|\boldsymbol{grad}f(x_0)|}$;
   (b) $\min_{\boldsymbol{e}} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(x_0)$ *достигается на векторе* $(-\boldsymbol{e}_{gr})$
5. *Если $\boldsymbol{grad}f(x_0) \neq \boldsymbol{0}$, то поверхность уровня $c = f(x_0)$ имеет касательную плоскость в точке x_0, а вектор $\boldsymbol{grad}f(x_0)$ является вектором нормали к этой касательной плоскости (см. рис. ???).*

Рис. ???

Доказательство пунктов 1-3 вытекают непосредственно из данных выше определений и следствия 4.1.

Прежде, чем доказывать пп. 4 и 5, заметим, что утверждеия пп. 4 и 5 относятся к пространству прообразов $\mathbb{R}^n$, а не к пространству $\mathbb{R}^{n+1}$, где находится график функции. Из леммы 4.2 следует, что равномерно по всем единичным векторам $\mathbf{e}$ справедлива оценка

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(x_0) \leqslant |(\mathbf{grad}f(x_0), \mathbf{e})| \leqslant |\mathbf{grad}f(x_0)|.$$

Но для вектора $\mathbf{e}_{gr}$ имеем

$$(\mathbf{grad}f(x_0), \mathbf{e}_{gr}) = |\mathbf{grad}f(x_0)|.$$

Т.е. верхняя оценка производной по направлению достигается в направлении $\mathbf{e}_{gr}$. Аналогично доказывается утверждение о противоположном направлении $(-\mathbf{e}_{gr})$.

Мы сейчас не готовы дать доказательство пункта 5. Более того, мы даже не сформулировали определение касательной плоскости к поверхности уровня. Ограничимся эвристическим рассуждением. Будем опираться на интуитивное представление о касательной плоскости как о наиболее тесно примыкающей к поверхности в исследуемой точке x_0. Запишем уравнение $f(x)-c=0$ поверхности уровня $c=f(x_0)$ с помощью определения градиента в точке x_0 и применим следствие 4.2:

$$f(x)-f(x_0)=0 \ \Leftrightarrow \ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^{(i)}}(x_0)(x^{(i)}-x_0^{(i)})+o(|x-x_0|)=0.$$

Отбрасывая в полученном уравнении бесконечно малую более высокого порядка, получаем линейное уравнение, которое в пространстве $\mathbf{R}^n$ задает гиперплоскость. Это и есть уравнение касательной плоскости к поверхности уровня:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^{(i)}}(x_0)(x^{(i)}-x_0^{(i)})=0.$$

Второй подход. Пересечем график гиперплоскостью $y=f(x_0)$; проекция пересечения на пространство аргументов $\mathbb{R}^n$ как раз есть поверхность уровня (см. п. 2.2). Эта же гиперплоскость $y=f(x_0)$ пересекает касательную (гипер)-плоскость к графику. Их пересечение – плоскость размерности $(n-1)$, которая параллельна гиперплоскости $y=0$ т.е. параллельна пространству аргументов $\mathbb{R}^n$. Эта плоскость определяется системой уравнений (см. определение 4.6):

$$y=f(x_0), \quad (\mathbf{grad} f(x_0), \Delta\mathbf{x})=0.$$

Примем без доказательства, что пересечение гиперплоскости $y=f(x_0)$ с касательной плоскостью к графику есть касательная плоскость к пересечению этой же гиперплоскости с графиком. Остается спроектировать полученную плоскость на пространство аргументов. ■

Замечание. В литературе общепринятым является обозначение

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x^{(i)}}:=\frac{\partial f}{\partial x^{(i)}}(x_0).$$

4.4. Достаточные условия дифференцируемости. Оказывается дополнительные требования к частным производным обеспечивают дифференцируемость.

Теорема 4.3. *Если все частные производные функции f определены в окрестности точки $x_0\in\mathbb{R}^n$ и непрерывны в точке x_0, то функция дифференцируема в этой точке.*

Доказательство проведем для функции двух переменных $f(x,y)$. Оно основано на применении теоремы Лагранжа и выделении приращений от точки x_0. Представим приращение функции f как сумму приращений по каждой переменной:

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=(f(x,y)-f(x_0,y))+(f(x_0,y)-f(x_0,y_0))=$$

$$f'_x(\chi,y)(x-x_0)+f'_y(x_0,\nu)(y-y_0)=$$

$$(f'_x(x_0,y_0)+(f'_x(\chi,y)-f'_x(x_0,y_0)))(x-x_0)+$$

$$(f'_y(x_0, y_0) + (f'_y(x_0, \nu) - f'_y(x_0, y_0)))(y - y_0) =$$
$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) +$$
$$(f'_x(\chi, y) - f'_x(x_0, y_0))(x - x_0) + (f'_y(x_0, \nu) - f'_y(x_0, y_0))(y - y_0),$$

где функция $\chi = \chi(x, y)$ принимает значения между x_0 и x, а функция $\nu = \nu(y)$ принимает значения между y_0 и y. Поэтому $\chi(x, y) \to x_0$, а $\nu(y) \to y_0$ при $y \to y_0$. В силу непрерывности частных производных в точке (x_0, y_0), справедливо

$$\varepsilon_1(x, y) := f'_x(\chi(x, y), y) - f'_x(x_0, y_0) \to 0, \quad \text{при } (x, y) \to (x_0, y_0),$$

$$\varepsilon_2(y) := f'_y(x_0, \nu(y)) - f'_y(x_0, y_0) \to 0 \ \text{ при } y \to y_0.$$

Следовательно, приращение функции в исследуемой точке имеет вид:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \varepsilon_1(x, y)(x - x_0) + \varepsilon_2(y)(y - y_0).$$

Поскольку

$$\frac{|\varepsilon_1(x, y)(x - x_0) + \varepsilon_2(y)(y - y_0)|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \leqslant |\varepsilon_1(x, y)| + |\varepsilon_2(y)| \to 0 \ \text{ при } (x, y) \to (x_0, y_0),$$

то

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) =$$
$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}). \quad \blacksquare$$

4.5. Дифференцируемость отображений. Пусть отображение $f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^m$ определено в некоторой окрестности точки $x_0 \in X$. Напомним (см. лемму 2.4), что задание отображения эквивалентно заданию m штук функций $f_i \ \ (i = 1, ..., m)$ от n переменных.

Определение 4.7. (дифференцируемости отображения)

1. Отображение f называется **дифференцируемым** в точке x_0, если существует такая матрица A размером $m \times n$, что
$$f(x) = f(x_0) + A(\Delta\mathbf{x}) + o(|\Delta\mathbf{x}|) \text{ при } x \to x_0,$$
где $o(|\Delta\mathbf{x}|)$ – это такое отображение $\varphi(\Delta\mathbf{x})$, что $\lim\limits_{\Delta\mathbf{x} \to \mathbf{0}} \frac{\varphi(\Delta\mathbf{x})}{|\Delta\mathbf{x}|} = \mathbf{0}$.
2. Матрица A называется **производной** отображения f в точке x_0. Обозначение: $A = Df(x_0) = Df|_{x=x_0} = f'(x_0)$.
3. **Дифференциалом аргумента** называется приращение аргумента $dx := \Delta\mathbf{x}$; **дифференциалом отображения** f в точке x_0 называется линейное относительно приращения аргумента $\Delta\mathbf{x}$ отображение
$$df(x_0) := Df|_{x=x_0}(\Delta\mathbf{x}) = Df(x_0)dx.$$

Для дальнейшего развития теории дифференцирования отображений нам понадобится

Определение 4.8. Пусть S^{n-1} – единичная сфера в векторном пространстве $\mathbb{R}^n$. **Нормой матрицы** A называется

$$||A|| := \sup_{|\mathbf{a}|=1} |A\mathbf{a}| = \sup_{\mathbf{a}\in S^{n-1}} |A\mathbf{a}|.$$

Лемма 4.5. *(О существовании и свойстве нормы).*

1. *Норма матрицы конечна и достижима, т.е. существует вектор* $\boldsymbol{a}_0 \in S^{n-1}$*, для которого*

$$||A|| = |A\boldsymbol{a}_0| = \max_{\boldsymbol{a}\in S^{n-1}} |A\boldsymbol{a}| < +\infty.$$

2. *Для любого вектора* $\boldsymbol{a}$ *выполняется оценка* $|A\boldsymbol{a}| \leqslant ||A|||\boldsymbol{a}|$.

Доказательство. Поскольку каждая координатная линейная функция $\mathbf{a} \to (A\mathbf{a})_i$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$, то (в силу леммы 3.1) отображение $\mathbf{a} \to A\mathbf{a}$ непрерывно. Поэтому суперпозиция $\mathbf{a} \to |A\mathbf{a}|$ – непрерывная функция. Следовательно, на компактном подмножестве S^{n-1} она достигает точной верхней грани.

Если $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, то

$$|A\mathbf{a}| = \left|A\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right| \cdot |\mathbf{a}| \leqslant \sup_{\mathbf{a}\neq\mathbf{0}}\left|A\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right| \cdot |\mathbf{a}| = ||A|||\mathbf{a}|. \blacksquare$$

Замечание. Из п. 1 леммы следует, что норма матрицы – это наибольший коэффициент растяжения длины вектора, к которому применяется матрица.

Без изменений формулируются и доказываются (с помощью леммы 4.5) все утверждения п. 4.1: единственность производной отображения, единственность и смысл дифференциала и непрерывность отображения в точке, где оно дифференцируемо. Что касается понятия частной производной, то оно без изменений сохраняется для каждой координатной функции f_i.

Определение 4.9. **Матрицей Якоби** (в честь немецкого математика Карла Якоби, 1804-1851) в точке x_0 отображения f называется матрица размером $m \times n$, составленная из частных производных координатных функций f_i, посчитанных в точке x_0:

$$J(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x^{(1)}} & \dots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x^{(n)}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(x_0)}{\partial x^{(1)}} & \dots & \frac{\partial f_n(x_0)}{\partial x^{(n)}} \end{pmatrix}$$

Заметим, что каждая строка матрицы Якоби есть градиент соответствующей координатной функции. Важными частными случаями матрицы Якоби являются:

1. $n = m = 1$: f – числовая функция числового аргумента, матрица Якоби – число;
2. $n = 1,\ m \geqslant 2$: f – вектор-функция числового аргумента (кривая), матрица Якоби – столбец длины m;
3. $n \geqslant 2,\ m = 1$: f – числовая функция нескольких переменных, матрица Якоби – n-мерный градиент, строка длины n;

4. $n = m \geqslant 2$: f – отображение пространств одинаковой размерности, матрица Якоби квадратная, ее важнейшая характеристика – определитель, называемый **якобианом**.

Аналогом леммы 4.4 является

Лемма 4.6. *(Необходимое условие дифференцируемости отображения) Если отображение f дифференцируемо в точке x_0, то у него в этой точке существуют все частные производные каждой координатной функции f_i, которые совпадают с соответствующими элементами матрицы $Df(x_0)$. Другими словами, $J(x_0) = Df(x_0)$.*

Доказательство немедленно следует из леммы 2.3 и леммы 4.4.

Задача. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – линейное отображение. Докажите, что оно дифференцируемо в каждой точке и найдите его производную в каждой точке. Чему равно в этом случае отображение φ из определения 4.7 п. 1?

Теорема 4.4. *(О дифференцировании суперпозиции отображений) Даны два подмножества $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ и два отображения*

$$f : X \to Y, \quad g : Y \to \mathbb{R}^p.$$

Пусть $x_0 \in X$ и $y_0 = f(x_0) \in Y$ – внутренние точки. Пусть отображение f дифференцируемо в точке x_0, а отображение g дифференцируемо в точке y_0. Тогда суперпозиция отображений $h(x) := (g \cdot f)(x) = g(f(x))$ дифференцируема в точке x_0 и матрица Якоби отображения h равна произведению матриц Якоби отображений g и f:

$$D(g \cdot f)(x_0) = Dg(y_0)Df(x_0),$$

или в координатной форме

$$\frac{\partial (g \cdot f)_i(x_0)}{\partial x^{(j)}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i(y_0)}{\partial y^{(k)}} \; \frac{\partial f_k(x_0)}{\partial x^{(j)}}, \quad (i = 1, ..., p, \quad j = 1, ..., n).$$

Доказательство основано на определении 4.8 и фактически повторяет доказательство теоремы 1.9.5. Мы возьмем приращение отображения h и выделим в нем главную линейную часть. Для упрощения записи мы будем опускать точку вычисления производной, т.е. $Df := Df(x_0)$, $Dg := Dg(y_0)$. Итак:

$$h(x) - h(x_0) = g(f(x)) - g(f(x_0)) = Dg(f(x) - f(x_0)) + \mathbf{o}(|f(x) - f(x_0)|) =$$

$$Dg(Df(x - x_0) + \mathbf{o}(|x - x_0|)) + \mathbf{o}(|Df(x - x_0) + \mathbf{o}(x - x_0|)|) = ...$$

Далее мы воспользуемся линейностью действия матрицы и п. 2 леммы 4.5:

$$... = Dg(Df(x - x_0)) + \mathbf{o}(|x - x_0|). \quad \blacksquare$$

Прямым следствием теоремы 4.4 является

Теорема 4.5. *(Инвариантность первого дифференциала) Пусть отображение $y = f(x)$ дифференцируемо в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$, а отображение $z = g(y)$*

дифференцируемо в точке $y_0 \in \mathbb{R}^m$. *Тогда формула дифференциала суперпозиции отображений* $z = g(f(x))$ *("сложной функции") и формула дифференциала внешнего отображения* g *("простой функции") имеют один и тот же вид* $dz = Dg(y_0)dy$, *где для простой функции* g *дифференциал* dy *– это приращение независимой переменной* y, *а в случае сложной функции* $dy = Df(x_0)dx$.

Доказательство. Для простой функции данная формула – определение дифференциала. Для сложной функции – следствие теоремы 4.4. В самом деле

$$dz = D(g \cdot f)dx = (Dg(y_0)Df(x_0))dx = Dg(y_0)(Df(x_0)dx) = Dg(y_0)dy. \ \blacksquare$$

Следствие 4.3. *(Дифференцирование арифметических операций) Пусть* $y = f(x^{(1)}, ..., x^{(n)}), y = g(x^{(1)}, ..., x^{(n)})$ *– числовые функции* n *переменных, которые дифференцируемы в точке* $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Тогда в этой точке дифференцируемы функции* $f \pm g$, $fg, f/g$ *(в последнем случае* $g(x_0) \neq 0$*). При этом:*

$$d(f \pm g) = df \pm dg, \quad d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg, \quad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2},$$

где

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^{(i)}} dx^{(i)}, \ dg = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(x_0)}{\partial x^{(i)}} dx^{(i)}.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $F : U_\varepsilon(x_0) \to \mathbb{R}^2$, где $F(x) := (f(x), g(x))$ и функцию двух переменных $\varphi(y_1, y_2) := y_1 + y_2$. Тогда функция $f + g$ есть суперпозиция $f + g = \varphi \cdot F$. Остается применить теорему 4.4. Аналогично рассматриваются остальные арифметические операции. $\blacksquare$

Задача. Выразите градиенты функций $f \pm g$, $fg, f/g$ через градиенты $\mathbf{grad} f$, $\mathbf{grad} g$ и функции f, g.

§ 5. Производные высших порядков функции нескольких переменных

5.1. Частные производные высших порядков.

Определение 5.1. Пусть в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существует частная производная $\frac{\partial f}{\partial x^{(i)}}(x)$ функции $f(x) = f(x^{(1)}, ..., x^{(n)})$. **Частной производной второго порядка** по переменной $x^{(j)}$ в точке x_0 называется производная функции одной переменной

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}}(x_0) := \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} \left(\frac{\partial f}{\partial x^{(i)}}(\widehat{x}_0^{(j)}) \right) |_{x=x_0},$$

где $\widehat{x}_0^{(j)} = (x_0^{(1)}, ..., x_0^{(j-1)}, x^{(j)}, x_0^{(j+1)}, ..., x_0^{(n)})$. Т.е. фиксируют все переменные, кроме j-й, по ней дифференцируют, после чего фиксируют и ее.

Частная производная порядка k определяется по индукции

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^{(i_1)} ... \partial x^{(i_k)}}(x_0) := \frac{\partial}{\partial x^{(i_k)}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{(i_1)} ... \partial x^{(i_{k-1})}}(\widehat{x}_0^{(i_k)}) \right) |_{x=x_0}.$$

Пример. У функции двух переменных может существовать четыре производных второго порядка.

Смешанные производные (т.е. от разных переменных) в общем случае не обязаны совпадать.

Пример. Для функции

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) \right) \Big|_{x=0} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) \right) \Big|_{y=0} = -1.$$

Однако

Теорема 5.1. *(о независимости смешанной производной от порядка дифференцирования) Если обе смешанные производные* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *и* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *определены в некоторой окрестности точки* (x_0, y_0) *и непрерывны в точке* (x_0, y_0), *то они равны в этой точке:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Доказательство. Обозначим через $\Delta_x f$ и $\Delta_y f$ приращения функции f, порожденные приращениями Δx и Δy аргументов x и y соответственно. Покажем, что

$$\Delta_y(\Delta_x f(x_0, y_0)) = \Delta_x(\Delta_y f(x_0, y_0)). \quad (5.1)$$

$$\Delta_y(\Delta_x f(x_0, y_0)) = \Delta_y(f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)) =$$

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) - (f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)) =$$

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) + f(x_0, y_0) = \Delta_x(\Delta_y f(x_0, y_0)).$$

(Заметим, что выражение симметрично относительно приращений аргументов.) Теперь применим к обеим частям равенства (5.1) теорему Лагранжа, к левой части – по переменной x, к правой части – по y:

$$\Delta_y\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)\Delta x\right) = \Delta_x\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y\right),$$

где $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$. Еще раз применяем теорему Лагранжа:

$$\Delta_y\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)\Delta x\right) =$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)\right)\Delta x =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_3\Delta y)\Delta y\Delta x = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+\theta_4\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y,$$

где $0 < \theta_3, \theta_4 < 1$. Деля обе части на произведение $\Delta x\Delta y$ и переходя к пределу при $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$, получаем требуемое. ■

Замечание 1. Утверждение, аналогичное теореме 5.1, справедливо для производной любого порядка. Его ослабленная (но удобная в приложениях) формулировка такова: если всевозможные частные производные до k-го порядка функции $f(x^{(1)}, ..., x^{(n)})$ существуют в некоторой области и непрерывны **на** ней, то частные производные порядка k на зависят от порядка дифференцирования в любой точке области.

Замечание 2. В терминах частных производных высоких порядков формулируются законы физики – это так называемые уравнения математической физики или уравнения в частных производных. Сформулированная выше теорема существенно упрощает эти уравнения и их исследование.

5.2. Операторы дифференцирования. Для определения дифференциалов высших порядков удобно ввести понятия функционального пространства и дифференциального оператора.

Определение 5.2. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ – область. Функция f называется k **раз непрерывно дифференцируемой** ($k = 0, 1, 2...$) на X, если она имеет в каждой точке области все частные производные до порядка k включительно и они непрерывны на X. Множество **всех** таких функций обозначают $C^k(X)$.

Замечание. При $k = 0$ функцию подразумевают непрерывной.

Важно, что множество $C^k(X)$ обладает структурой линейного пространства, т.е. можно ввести операции сложения его элементов и умножения их на число.

Определение 5.3. Определим **сложение функций и умножение их на число** так: $\forall f, g \in C^k(X)$ и $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x) \text{ для любого } x \in X.$$

Эти правила столь естественны, что мы ими пользуемся не задумываясь. Заметим, что одинаковые значки $+, \cdot$ слева и справа имеют разный смысл, хотя первые определены через вторые.

Лемма 5.1. *Множество $C^k(X)$ с введенными операциями является линейным пространством.*

Доказательство состоит к проверке всех аксиом линейного пространства, которое сводится к операциям с числами и линейности дифференцирования.

Задача. Какая функция является нулевым вектором в пространстве $C^k(X)$?

Итак, элементами="векторами" рассматриваемых линейных пространств являются функции. Поэтому такого рода пространства называют **функциональными**. Среди всех отображений линейных пространств наиболее важны такие, которые сохраняют линейные операции.

Определение 5.4. **Отображение** $A : L_1 \to L_2$ линейных пространств называется **линейным оператором**, если для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L_1$ и любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполнено:

$$A(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha A(\mathbf{a}) + \beta A(\mathbf{b}).$$

Лемма 5.2. *Частная производная $\frac{\partial}{\partial x^{(i)}}$ является линейным оператором, действующим из $C^k(X)$ в $C^{k-1}(X)$.*

Задача. Докажите лемму 5.2.

Сделаем следующий шаг – определим операции с линейными операторами. Поступим аналогично тому, как мы вводили операции в функциональных пространствах – на образах.

Определение 5.5. Пусть $A, B : L_1 \to L_2$ – линейные операторы, действующие в одних и тех же пространствах. Определим **сложение линейных операторов и умножение их на число** так:

$$(A + B)(\mathbf{a}) := A(\mathbf{a}) + B(\mathbf{a}), \quad (\alpha \cdot A)(\mathbf{a}) := \alpha \cdot A(\mathbf{a}).$$

Задача. Докажите корректность определения, т.е. $A + B$ и $\alpha \cdot A$ являются линейными операторами.

Примеры. 1) Пусть $\mathbf{e} = (e_1, ..., e_n)$ – единичный вектор. Рассмотрим линейный оператор

$$A_{\mathbf{e}} : C^k(X) \to C^{k-1}(X), \quad A_{\mathbf{e}} := e_1 \frac{\partial}{\partial x^{(1)}} + ... + e_n \frac{\partial}{\partial x^{(n)}}.$$

На функции $f \in C^k(X)$ его действие таково:

$$A_{\mathbf{e}}(f(x)) = \left(e_1 \frac{\partial}{\partial x^{(1)}} + ... + e_n \frac{\partial}{\partial x^{(n)}} \right) (f(x)) = (\mathbf{grad} f(x), \mathbf{e}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}(x) \Leftrightarrow A_{\mathbf{e}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}}.$$

Т.е. это оператор нахождения производной по направлению вектора $\mathbf{e}$. Заметим, что в данной конструкции мы рассматриваем эту производную не в фиксированной точке (как это было в п. 4.2), а на всей области определения X, т.е. $A_{\mathbf{e}}(f)$ – это функция, которая каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие производную функции f по выбранному направлению $\mathbf{e}$.

2) Для произвольного вектора $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ определим линейный оператор

$$A_{\mathbf{a}}(f(x)) = \left(a_1 \frac{\partial}{\partial x^{(1)}} + ... + a_n \frac{\partial}{\partial x^{(n)}}\right)(f(x)) = (\mathbf{grad} f(x), \mathbf{a}).$$

Задача. Дайте определение линейного пространства всех линейных операторов, действующих из L_1 в L_2.

Для линейных операторов определена суперпозиция, как для отображений. Важно, что сохраняется линейность.

Определение 5.6. Пусть $A : L_1 \to L_2$, $B : L_2 \to L_3$ – линейные операторы. **Произведением (суперпозицией)** называется линейный оператор

$$BA : L_1 \to L_3, \ (BA)\mathbf{a} := B(A(\mathbf{a})).$$

Задача. Докажите, что определение корректно, т.е. отображение BA является линейным оператором.

Пример. Суперпозиция операторов частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial x^{(i)}} : C^k(X) \to C^{k-1}(X), \quad \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} : C^{k-1}(X) \to C^{k-2}(X) \ \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}} : C^k(X) \to C^{k-2}(X).$$

Замечание. Из теоремы 5.1 следует, что на пространствах $C^k(X)$ операторы частных производных перестановочны. В общем случае перестановка операторов AB вляеется бессмысленной! (Объясните, почему?)

5.3. Дифференциалы высших порядков.

Определение 5.7. Пусть функция $f \in C^k(X)$ $(k \in \mathbb{N})$. Дифференциал k-го порядка определяется по индукции

$$d^k f(x) = d(d^{k-1} f)(x).$$

В этом определении дифференциалы независимых переменных понимаются как постоянные множители.

Замечание. Понятие дифференциала высокого порядка может быть положено в основу определения производной высокого порядка функции нескольких переменных. Но для наших целей достаточно понятия частной производной высокого порядка.

Теорема 5.2. *(выражение дифференциала через частные производные) Пусть $f \in C^k(X)$. Тогда*

$$d^k f(x) = \sum_{i_k=1}^{n} ... \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x^{(i_1)} ... \partial x^{(i_k)}}(x) dx^{(i_1)} ... dx^{(i_k)}. \tag{5.2}$$

Доказательство по индукции. Выпишем первый дифференциал и применим к нему определение. Каждую первую частную производную $\partial f(x)/\partial x^{(i)}$ будем дифференцировать по каждой переменной $x^{(j)}$. Получим

$$d^2 f(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}}(x) dx^{(i)} dx^{(j)}.$$

Остается заменить индексы $i = i_1,\ j = i_2$ и применить этот метод до k-го порядка. ■

Заметим, что формально в сумме (5.2) n^k слагаемых. Однако среди них есть повторяющиеся. В частности, при $k = 2$ получаем симметрическую матрицу $n \times n$ частных производных второго порядка, которая называется матрицей Гессе (Людвиг Гессе', 1811-1874), а ее определитель **гессианом**. Матрица применяется для локального исследования поведения функции.

Теперь мы запишем дифференциал высокого порядка в операторном виде.

Лемма 5.3. *Пусть $f \in C^k(X)$, тогда в каждой точке $x \in X$*

$$d^k f = \left(dx^{(1)} \frac{\partial}{\partial x^{(1)}} + ... + dx^{(n)} \frac{\partial}{\partial x^{(n)}} \right)^k f = (A_{d\boldsymbol{x}})^k f. \tag{5.3}$$

Доказательство следует из ассоциативности определения 5.6.

Замечание. В условиях леммы 5.3 справедлива теорема 5.1 о совпадении смешанных производных, поэтому вычисление степени дифференциального оператора подчиняется тем же правилам, что и возведение в степень линейного выражения $(a_1 + ... + a_n)^k$. Это наблюдение облегчает нахождение дифференциалов выских порядков. В частности

Следствие 5.1. *(дифференциал функции двух переменных) Пусть в условиях леммы 5.3 количество переменных $n = 2$, тогда дифференциал вычисляется по формуле бинома Ньютона:*

$$d^k f = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i} \partial y^i} dx^{k-i} dy^i, \ \text{где } C_k^i = \frac{k!}{(k-i)!i!}.$$

Для дифференциала второго порядка функции двух переменных получаем формулу, аналогичную "школьной" формуле квадрата суммы двух слагаемых:

$$d^2 f = f''_{xx} dx^2 + 2 f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2. \tag{5.4}$$

Пример. При конкретном вычислении дифференциала можно 1) либо находить все частные производные, 2) либо действовать по определению, 3) либо применять формулу (5.3). Найти $d^2 f(3, -1)$, где $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$.

Первый способ. Найдем все частные производные до 2-го порядка включительно в произвольной точке:

$$f'_x = \frac{2x}{x^2 + y}, \quad f'_y = \frac{1}{x^2 + y},$$

$$f''_{xx} = 2\frac{y - x^2}{(x^2+y)^2},\ f''_{xy} = 2\frac{x}{(x^2+y)^2},\ f''_{yy} = \frac{1}{(x^2+y)^2}.$$

Теперь найдем производные второго порядка в точке $A(3-1)$:

$$f''_{xx}(3-1) = -\frac{20}{64},\quad f''_{xy}(3-1) = -\frac{6}{64},\quad f''_{yy}(3-1) = -\frac{1}{64}.$$

Поэтому $d^2f(3,-1) = -(1/64)(20dx^2 + 12dxdy + dy^2)$.

Второй способ. Первый дифференциал в произвольной точке

$$df = \frac{2xdx + dy}{x^2 + y}.$$

Второй дифференциал в произвольной точке:

$$d^2f = d(df) = \frac{(x^2+y)2dx^2 - (2xdx+dy)(2xdx+dy)}{(x^2+y)^2}.$$

Второй дифференциал в данной точке

$$d^2f(3,-1) = \frac{16dx^2 - (6dx+dy)^2}{64} = -\frac{20dx^2 + 12dxdy + dy^2}{64}.$$

Задача. Найдите $d^2f(3,-1)$ с помощью формулы (5.3).

Замечание. Если найден дифференциал k-го порядка, то из него можно получить значения всех производных k-го порядка.

В заключение пункта обсудим нахождение дифференциалов высокого порядка сложной функции. Пусть функция $f(u,v) \in C^2$ зависит (для простоты записи) от двух переменных, а каждая переменная $u = \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x^{(1)}, ..., x^{(n)})$, $v = \psi(\mathbf{x}) = \psi(x^{(1)}, ..., x^{(n)})$ в свою очередь зависит от n переменных. Нас интересует второй дифференциал по n внутренним переменным сложной функции $g(\mathbf{x}) := f(\varphi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x}))$. Воспользовавшись инвариантностью первого дифференциала (теорема 4.5), получаем

$$d^2g = d(dg) = d(f'_u du + f'_v dv), \text{где } du = (\mathbf{grad}\varphi, d\mathbf{x}),\ dv = (\mathbf{grad}\psi, d\mathbf{x}).$$

Поскольку du и dv зависят от переменной $\mathbf{x}$, то $d(du) = d^2u \neq 0, d(dv) = d^2v \neq 0$. Поэтому

$$d^2g = d(f'_u du + f'_v dv) = d(f'_u)\cdot du + f'_u \cdot d^2u + d(f'_v)\cdot dv + f'_v \cdot d^2v.$$

Еще раз воспользуемся инвариантностью первого дифференциала, теперь для частных производных $f'_u,\ f'_v$:

$$d^2g = (f''_{uu}du + f''_{uv}dv)\cdot du + f'_u \cdot d^2u + (f''_{vu}du + f''_{vv}dv)\cdot dv + f'_v \cdot d^2v.$$

Поскольку смешанные производные равны, окончательно получаем

$$d^2g = d^2f(u,v) = f''_{uu}du^2 + 2f''_{uv}dudv + f''_{vv}dv^2 + f'_u \cdot d^2u + f'_v \cdot d^2v, \qquad (5.5)$$

где вторые дифференциалы $d^2u = d^2\varphi(\mathbf{x}),\ d^2v = d^2\psi(\mathbf{x})$ определяются по формуле (5.3) с $k = 2$. Заметим, что мы записали второй дифференциал сложной функции в терминах только внешних переменных u и v, помня, что они выражаются через внутренние переменные.

Сравним формулу (5.5) второго дифференциала сложной функции с формулой (5.4) второго дифференциала функции от двух **независимых** переменных. Мы видим появление дополнительных слагаемых $f'_u \cdot d^2u + f'_v \cdot d^2v$, которые обнуляются в случае, если u и v – независимые переменные. Их присутствие означает, что второй дифференциал НЕ имеет инвариантной формы при замене переменных.

Задача. Найдите второй дифференциал $d^2f(3,-1)$, где $f(x,y) = \ln(x^2+y)$ (см. пример выше), четвертым способом – как дифференциал сложной функции.

5.4. Формула Тейлора.

Теорема 5.3. *(формула Тейлора в форме Лагранжа) Пусть функция $f \in C^{k+1}(U_\delta(x_0))$. Тогда для любой точки $x \in U_\delta(x_0)$ справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!} d^m f(x_0) + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(x_0 + \theta dx),$$

где приращение аргумента $dx = x - x_0 \in \mathbb{R}^n$, а число $\theta = \theta(x_0, dx) \in (0,1)$ определяется в общем случае неоднозначно.

Доказательство. Идея: свести задачу к одномерной, двигаясь по лучу от x_0 к x. Определим функцию $\varphi(t) := f(x_0+tdx)$ и дифференциальный оператор

$$A_{d\mathbf{x}} = dx^{(1)} \frac{\partial}{\partial x^{(1)}} + \ldots + dx^{(n)} \frac{\partial}{\partial x^{(n)}}.$$

Найдем производную функции $\varphi(t)$ с помощью теоремы 4.4 о дифференцировании сложной функции:

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x^{(1)}}(x_0 + tdx) \cdot dx^{(1)} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^{(n)}}(x_0 + tdx) \cdot dx^{(n)} =$$

$$(A_{d\mathbf{x}} f)(x_0 + tdx).$$

(Выражение $x_0 + tdx$ – это точка, в которой берется значение функции $A_{d\mathbf{x}}f$!) Вывод: найден линейный оператор, который равен производной сложной функции, что не очевидно! Следовательно, производные функции φ равны степеням оператора $A_{d\mathbf{x}}$, т.е. $\varphi^{(m)}(t) = (A^m_{d\mathbf{x}} f)(x_0 + tdx)$. Формула Маклорена для функции φ при $t = \Delta t = dt = 1$ имеет вид

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(0) + \frac{1}{(m+1)!} \varphi^{(m+1)}(\theta), \Leftrightarrow$$

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!} (A^m_{d\mathbf{x}} f)(x_0) + \frac{1}{(m+1)!} (A^{k+1}_{d\mathbf{x}} f)(x_0 + \theta dx),$$

где $0 < \theta < 1$. Но из формулы (5.3) следует, что $A_{d\mathbf{x}} f = df$. Что доказывает теорему. ■

Теорема 5.4. *(формула Тейлора в форме Пеано) Пусть функция $f \in C^k(U_\delta(x_0))$. Тогда для любой точки $x \in U_\delta(x_0)$ справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!} d^m f(x_0) + o(|dx|) \text{ при } dx = x - x_0 \to \boldsymbol{0}.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Тейлора в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m!} d^m f(x_0) + \frac{1}{k!} d^k f(x_0 + \theta dx),$$

где $0 < \theta < 1$. Добавим к сумме недостающее слагаемое и вычтем его:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!} d^m f(x_0) + \frac{1}{k!}(d^k f(x_0 + \theta dx) - d^k f(x_0)).$$

Оценим разность в скобках. Воспользуемся теоремой 5.2 и непрерывностью производных k-го порядка:

$$\frac{|d^k f(x_0 + \theta dx) - d^k f(x_0)|}{|dx|^k} \leqslant$$

$$\sum_{i_k=1}^{n} \dots \sum_{i_1=1}^{n} \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^{(i_1)} \dots \partial x^{(i_k)}}(x_0 + \theta dx) - \frac{\partial^k f}{\partial x^{(i_1)} \dots \partial x^{(i_k)}}(x_0) \right| \frac{|dx^{(i_1)}| \dots |dx^{(i_k)}|}{|dx|^k} \leqslant$$

$$n^k \max_{i_1, \dots i_k \in \{1, \dots, n\}} \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^{(i_1)} \dots \partial x^{(i_k)}}(x_0 + \theta dx) - \frac{\partial^k f}{\partial x^{(i_1)} \dots \partial x^{(i_k)}}(x_0) \right| \to 0$$

при $|dx| \to 0$. ■

§ 6. Определенный интеграл Римана

Понятие определенного интеграла (ОИ) является ключевым в МА. Оно постоянно применяется в дифференциальной геометрии, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, в уравнениях математической физики, в функциональном анализе, в теории вероятностей и математической статистике и других разделах математики. Понятие восходит к "методу исчерпывания" Евдокса Книдского (ок. 408 г. - ок. 355 г. до н.э.), усовершенствованный Архимедом из Сиракуз (287 - 212 до н.э.).

6.1. Интеграл по Дарбу. Нам потребуется новый понятий аппарат.

1. На отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$ $(a < b)$ выберем произвольное конечное количество упорядоченных точек, включая концы:
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b.$$
Получено **разбиение отрезка**, которое будем обозначать P. Длины отрезков разбиения обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1,..,n)$.
2. Наибольшую из длин отрезков называют **мелкостью** разбиения:
$$p(P) := \max_{i=1,\dots,n} \Delta x_i.$$
3. Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ – **ограниченная** функция. Обозначим
$$M_i(f) = M_i := \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x) < +\infty, \quad m_i(f) = m_i := \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) > -\infty,$$
$$v_i(f) = v_i := M_i - m_i \geqslant 0, \quad i = 1,...,n.$$
Неотрицательная величина v_i называется **колебанием** функции f на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$.
4. Определим
$$\textbf{верхнюю сумму Дарбу } S^*_P(f) = S^*_P := \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i < +\infty,$$
$$\textbf{нижнюю сумму Дарбу } S_{*P}(f) = S_{*P} := \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i > -\infty,$$
разность сумм Дарбу
$$V_P := S^*_P - S_{*P} = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n v_i \Delta x_i \geqslant 0.$$
5. Говорят, что разбиение P' является **измельчением** разбиения P, если P' содержит все точки P: $P \subset P'$. Через $P_1 \sqcup P_2$ обозначим разбиение, множество точек которого есть объединение точек из P_1 и P_2. Очевидно, что $P_1 \sqcup P_2$ является измельчением и для P_1, и для P_2.

Замечание. **Геометрический смысл сумм Дарбу**: если функция f неотрицательна и непрерывна, то суммы Дарбу суть площади вписанной и описанной ступенчатых фигур (см. рис. ???).

Рис. ???

Определение 6.1. (интегралы Дарбу) **Нижним интегралом Дарбу** называется $I_* := \sup_P S_{*P}$, **верхним интегралом Дарбу** называется $I^* := \inf_P S^*_P$.

Нас интересует, как измельчение и мелкость связаны с интегралами Дарбу.

Лемма 6.1. *(о монотонности сумм Дарбу при измельчении). При измельчении нижняя сумма Дарбу не уменьшается, а верхняя не увеличивается:*

$$\textit{если } P \subset P' \ \Rightarrow\ S_{*P} \leqslant S_{*P'}, \quad S^*_P \geqslant S^*_{P'}.$$

Доказательство основано на простом принципе: если $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$, то $\sup_{[a_2,b_2]} f(x) \leqslant \sup_{[a_1,b_1]} f(x)$, а $\inf_{[a_2,b_2]} f(x) \geqslant \inf_{[a_1,b_1]} f(x)$

Поскольку при измельчении добавляется конечное количество новых точек, достаточно рассмотреть случай добавления к P одной точки $x' \in (x_{i-1}, x_i)$. В этом случае все слагаемые нижней суммы S_{*P} не изменятся, кроме слагаемого с номером i: слагаемое $m_i(x_i - x_{i-1})$ заменится на два слагаемых $m''_i(x_i - x') + m'_i(x' - x_{i-1})$ ($m'_i = \inf_{[x_{i-1},x']} f(x)$, $m''_i = \inf_{[x',x_i]} f(x)$). Но $m'_i, m''_i \geqslant m_i$ поскольку $[x_{i-1}, x'], [x', x_i] \subset [x_{i-1}, x_i]$. Поэтому (см. рис. ???)

$$m'_i(x_i - x') + m''_i(x' - x_{i-1}) \geqslant m_i(x_i - x') + m_i(x' - x_{i-1}) = m_i(x_i - x_{i-1}). \ \blacksquare$$

Задача. Вспомните утверждение, аналогичное лемме 6.1.

Следствие 6.1. *При измельчении разность сумм Дарбу не увеличивается:*

$$\textit{если } P \subset P' \ \Rightarrow\ 0 \leqslant V_{P'} \leqslant V_P.$$

Из следствия вытекает, что измельчая разбиение мы сближаем нижнюю и верхнюю суммы Дарбу. Наша цель выяснить, могут ли суммы различаться сколь угодно мало, т.е. могут ли совпасть верхний и нижний интегралы Дарбу.

Лемма 6.2. *(сравнение нижних и верхних сумм Дарбу) Любая нижняя сумма Дарбу не больше любой верхней суммы Дарбу:*

$$\forall P_1\ \forall P_2 \ \hookrightarrow\ S_{*P_1} \leqslant S^*_{P_2}$$

Доказательство. Возьмем разбиение $P = P_1 \sqcup P_2$. Поскольку P является измельчением и P_1, и P_2, то, в силу определения сумм Дарбу и леммы 6.1, получаем

$$S_{*P_1} \leqslant S_{*P} \leqslant S^*_P \leqslant S^*_{P_2}. \ \blacksquare$$

Лемма 6.3. *(упорядоченность сумм и интегралов Дарбу) Для любых разбиений P_1 и P_2 справедливы оценки*

$$-\infty < S_{*P_1} \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S^*_{P_2} < +\infty.$$

Доказательство. сразу следует из леммы 6.2 и теоремы 1.1.5 о разделении двух множеств ■

Лемма 6.4. *(о влиянии мелкости на приближение к интегралам Дарбу)*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\ \forall P : p(P) < \delta\ \hookrightarrow\ 0 \leqslant I_* - S_{*P} < \varepsilon\ \wedge\ 0 \leqslant S^*_P - I^* < \varepsilon$$

Доказательство. Достаточно доказать первую оценку. По определению точной верхней грани существует разбиение P_0, для которого $I_* - S_{*P_0} < \varepsilon/2$. Покажем, что существует такое δ, что для всех разбиений P с мелкостью $p(P) < \delta$ справедлива оценка $S_{*P_0} - S_{*P} \leqslant \varepsilon/2$. Тогда будет выполнено искомое неравенство

$$0 \leqslant I_* - S_{*P} = (I_* - S_{*P_0}) + (S_{*P_0} - S_{*P}) \leqslant \varepsilon.$$

Идея доказательства: отрезки разбиения P, принадлежащие отрезкам разбиения P_0, не уменьшают сумму S_{*P} по сравнению с суммой S_{*P_0}, а отрезки разбиения P, пересекающие соседние отрезки разбиения P_0, мы выберем столь малой длины, чтобы их вклад не существенно повлиял на сумму S_{*P}.

Пусть n_0 – количество отрезков разбиения P_0, p_0 – мелкость P_0, а $M = \sup_{[a,b]} |f(x)| < +\infty$. Возьмем $\delta = \min(p_0, \frac{\varepsilon}{8Mn_0})$. Пусть $p(P) \leqslant \delta$ (в результате $p(P)$ будет существенно меньше, чем p_0). Рассмотрим разбиение $P_0 \sqcup P$. Каждый отрезок $[x^{\sqcup}_{j-1}, x^{\sqcup}_j]$, порожденный разбиением $P_0 \sqcup P$, принадлежит целиком какому-то **одному** отрезку $[x^0_{i-1}, x^0_i]$, порожденному P_0, и какому-то **одному** отрезку $[x_{k-1}, x_k]$, порожденному P. Сопоставим отрезку $[x^{\sqcup}_{j-1}, x^{\sqcup}_j]$ те значения m^0_i и m_k, которые были порождены отрезками $[x^0_{i-1}, x^0_i]$ и $[x_{k-1}, x_k]$ соответственно. Теперь нижние суммы Дарбу разбиваются каждая на две суммы:

$$S_{*P_0} = \Sigma'_{*P_0} + \Sigma''_{*P_0}, \quad S_{*P} = \Sigma'_{*P} + \Sigma''_{*P},$$

где первая сумма берется по всем отрезкам из P, целиком принадлежащим отрезкам из разбиения P_0, а вторая сумма берется по всем оставшимся отрезкам из $P_0 \sqcup P$ (см. рис. ???). Тогда $\Sigma'_{*P_0} - \Sigma'_{*P} \leqslant 0$, поскольку $m^0_i \leqslant m_k$.

Рис. ???

Остается оценить модуль разности $|\Sigma''_{*P_0} - \Sigma''_{*P}|$. Оценивать будем, опираясь на мелкость δ. Оставшиеся отрезки обязательно имеют хотя бы одним концом точку x^0_i из разбиения P_0. Поэтому их не более, чем $2(n_0 - 1)$ штук. Каждый такой отрезок мельче, чем δ. Поэтому

$$|\Sigma''_{*P_0} - \Sigma''_{*P}| \leqslant |\Sigma''_{*P_0}| + |\Sigma''_{*P}| \leqslant 4(n_0 - 1)M\frac{\varepsilon}{8Mn_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

(грубая оценка через количество слагаемых!). Окончательно получаем:

$$S_{*P_0} - S_{*P} = \left(\Sigma'_{*P_0} - \Sigma'_{*P}\right) + \left(\Sigma''_{*P_0} - \Sigma''_{*P}\right) \leqslant 0 + \left|\Sigma''_{*P_0} - \Sigma''_{*P}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \blacksquare$$

Замечание. Утверждение леммы 6.4 означает, что, устремляя мелкость разбиения к нулю, можно добиться стремления сумм Дарбу к соответствующим интегралам Дарбу. Это утверждение можно записать так

$$\lim_{p(P)\to 0} S_{*P} = I_*, \quad \lim_{p(P)\to 0} S^*_P = I^*. \tag{6.1}$$

Записанный предел не есть ни предел последовательности, ни предел функции. Это новый тип предела, определяемый на языке "$\varepsilon - \delta$". Такого рода пределы мы будем постоянно применять в теории интегрирования.

Теперь мы можем дать основное

Определение 6.2. (интеграл Римана по Дарбу) Если $I_* = I^*$, то ограниченная функция f называется **интегрируемой по Риману на отрезке** $[a, b]$, а общее значение $I_D = I^* = I_*$ называется **интегралом Римана по схеме Дарбу на отрезке** $[a, b]$. Обозначение

$$I_D = \int_a^b f(x)dx.$$

Замечание. **Геометрический смысл интеграла Римана**: если функция f неотрицательна и непрерывна, то интеграл Римана – это площадь "криволинейной трапеции" расположенной между графиком и осью Ox.

Пример. Функция Дирихле неинтегрируема на любом отрезке $[a, b]$, т.к. $I_* = 0 < 1 \cdot (b - a) = I^*$.

Теорема 6.1. *(критерии интегрируемости по схеме Дарбу) Для ограниченной функции равносильны следующие утверждения:*

1. *Функция f имеет интегрирал Римана по схеме Дарбу на отрезке $[a, b]$.*
2. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется **разбиение** P отрезка $[a, b]$ такое, что разность сумм Дарбу V_P меньше ε: $\forall \varepsilon > 0\ \exists P:\ V_P < \varepsilon$.*
3. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что как только **мелкость** меньше δ, разность сумм Дарбу меньше ε:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall P:\ p(P) < \delta \hookrightarrow V_P < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{p(P) \to 0} V_P = 0. \tag{6.2}$$

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$ Из определения точной нижней грани следует, что существуют разбиения P_1, P_2, для которsых $S_{*P_1} > I_D - \varepsilon/2$ и $S^*_{P_2} < I_D - \varepsilon/2$. Тогда для разбиения $P = P_1 \sqcup P_2$ тем более $S_{*P} > I_D - \varepsilon/2$ и $S^*_P < I_D - \varepsilon/2$ (лемма 6.1). Откуда $V_P = S^*_P - S_{*P} < \varepsilon$.

$1 \Leftarrow 2$ Пусть $V(P) = S^*_P - S_{*P} < \varepsilon$. Тогда из леммы 6.3 следует, что $I^* - I_* < \varepsilon$. Поскольку ε произвольно, верхний и нижний интегралы Дарбу равны.

$1 \Leftrightarrow 3$ Из леммы 6.4 следует, что всегда существуют конечные пределы (6.1). Поэтому

$$I_* = I^* \Leftrightarrow \lim_{p(P) \to 0} S_{*P} = \lim_{p(P) \to 0} S^*_P \Leftrightarrow$$

$$\lim_{p(P) \to 0} (S^*_P - S_{*P}) = 0 \Leftrightarrow \lim_{p(P) \to 0} V_P = 0. \blacksquare$$

Замечание. Оба критерия сформулированы в терминах разности сумм Дарбу $V_P \to 0$. Из теоремы 6.1 следует, что интеграл Римана можно получить двумя равносильными способами. Первый: подбирать специальные разбиения P, при которых $M_i - m_i \to 0$ равномерно по всем i, что влечет $V_P \to 0$. Второй: устремлять мелкость $p(P) \to 0$. Мы будем пользоваться обоими подходами в зависимости от обстоятельств.

6.2. Интеграл по Риману. Это другая конструкция, приводящая к тому же результату.

Пусть P – произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. На каждом из отрезков разбиения выбрана произвольная точка $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Упорядоченный набор этих точек обозначим через $\Xi = \{\xi_1, ..., \xi_n\}$. На отрезке $[a,b]$ определена (не обязательно ограниченная!) функция f. Суммой Римана называется

$$S_{P,\Xi}(f) = S_{P,\Xi} := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{6.3}$$

Определение 6.3. **Интегралом Римана по схеме Римана** называется конечный предел

$$I_R := \lim_{p(P)\to 0} S_{P,\Xi} \in \mathbb{R} \quad ,$$

т.е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall P : p(P) < \delta\ \forall \Xi \ \hookrightarrow\ |S_{P,\Xi} - I_R| < \varepsilon. \tag{6.4}$$

Замечание 1. Если функция неотрицательна, то сумма Римана – площадь ступенчатой фигуры (см. рис. ???).

Рис. ???

Замечание 2. В схеме Римана видна роль **мелкости** в определении интеграла. (Полезно сравнить определение (6.4) с критерием (6.2))

Замечание 3. Из определений сумм Дарбу и определения (6.3) понятно, почему в обозначении интеграла стоит дифференциал dx.

Лемма 6.5. *(необходимое условие интегрируемости по схеме Римана) Если интеграл по схеме Римана (6.4) существует, то функция f ограничена.*

Доказательство. От противного. Возьмем произвольную последовательность разбиений P_n, мелкость которых $p_n \to 0$. На каждом шаге n найдется отрезок $[x'_n, x''_n]$, на котором функция неограничена. Выберем на остальных отрезках числа ξ_i произвольно. Пусть сумма Римана на всех отрезках, кроме выделенного, равна $\dot{S}_{P_n,\Xi_n}$. Возьмем такое $\xi_n \in [x'_n, x''_n]$, что

$$|f(\xi_n)| > \frac{n + |\dot{S}_{P_n,\Xi_n}|}{x''_n - x'_n}.$$

Тогда

$$|S_{P_n,\Xi_n}| = |f(\xi_n)(x''_n - x'_n) + \dot{S}_{P_n,\Xi_n}| \geqslant |n + |\dot{S}_{P_n,\Xi_n}|| - |\dot{S}_{P_n,\Xi_n}| = n \to +\infty$$

при $n \to +\infty$. ■

Теорема 6.2. *(совпадение интегралов по схемам Дарбу и Римана)*

$$I_D = I_R.$$

Доказательство. $\Rightarrow$ В силу определения, для любого разбиения P справедлива двусторонняя оценка

$$S_{*P} \leqslant S_{P,\Xi} \leqslant S^*_P.$$

Устремим мелкость к нулю. Из утверждения 3 теоремы 6.1 следует, что пределами сумм Дарбу является интеграл I_D. Из теоремы "о милиционерах"получаем, что предел суммы Римана также равен I_D.

$\Leftarrow$ Если интеграл I_R существует, то (лемма 6.5) функция f ограничена. Поэтому для любого разбиения P на каждом отрезке разбиения можно выбрать такую точку ξ_i', что $f(\xi_i') - m_i \leqslant \varepsilon/4(b-a)$. Получаем для разности суммы Римана и нижней суммы Дарбу оценку сверху:

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i') - m_i)\Delta x_i \leqslant \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Но на каждом отрезке разбиения можно выбрать и такую точку ξ_i'', что $M_i - f(\xi_i'') \leqslant \varepsilon/4(b-a)$. Аналогично рассуждая, получаем оценку для разности верхней суммы Дарбу и суммы Римана:

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i'')\Delta x_i \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Складывая полученные оценки, получаем, что

$$0 \leqslant V_P \leqslant |S_{P,\Xi''} - S_{P,\Xi'}| + \frac{\varepsilon}{2},$$

где $\Xi' = \{\xi_1', ..., \xi_n'\}$, $\Xi'' = \{\xi_1'', ..., \xi_n''\}$. В силу существования I_R, если мелкость разбиения выбрана достаточна малой, то справедлива оценка $|S_{P,\Xi''} - S_{P,\Xi'}| \leqslant \varepsilon/2$. Значит, $V_P \leqslant \varepsilon$ для любого разбиения с достаточно малой мелкостью. Из п. 3 теоремы 6.1 следует, что существует I_D, а из полученных оценок следует, что $I_D = I_R$. ■

В дальнейшем мы не различаем интегралы I по Дарбу и Риману, но будем пользоваться обоими подходами в зависимости от обстоятельств.

6.3. Свойства определенного интеграла. Поскольку ОИ определяется отрезком интегрирования и подынтегральной функцией, некоторые его свойства удается сформулировать отдельно для отрезков интегрирования (при неизменной подынтегральной функции), отдельно – для подынтегральных функций (при неизменном отрезке интегрирования).

Теорема 6.3. *(об отрезках интегрирования) Справедливы утверждения:*

1. *Если функция f интегрируема на $[a, c]$ и на $[c, b]$ $(a < c < b)$, то она интегрируема на $[a, b]$.*
2. *Если функция f интегрируема на $[a, b]$, то она интегрируема на любом подотрезке $[c, d] \subset [a, b]$.*
3. *Если функция f ограничена на $[a, b]$ и для любых $a', b' \in (a, b)$ она интегрируема на подотрезке $[a', b'] \subset [a, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$.*

Доказательство п. 1. Во-первых, функция ограничена на $[a, c]$ и на $[c, b]$, поэтому она ограничена на $[a, b]$. Применим критерий 2 теоремы 6.1. Из интегрируемости на $[a, c]$ и на $[c, b]$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют разбиения P_1 и P_2 отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ соответственно, для которых $V_{P_1}, V_{P_2} < \varepsilon/2$.

Возьмем на $[a,b]$ разбиение P, порожденное всеми точками P_1 и P_2. Тогда $V_P < \varepsilon$.

Доказательство п 2. Так как функция ограничена на $[a,b]$, то она ограничена на $[c,d]$. Применим критерий 3 теоремы 6.1. По любому $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения P с мелкостью $p(P) < \delta$ разность сумм Дарбу $V_P < \varepsilon$. Возьмем любое разбиение P_0 отрезка $[c,d]$, мелкость которого $p_0 < \delta$, и продолжим его до разбиения P всего отрезка $[a,b]$ с сохранением оценки мелкости $p(P) < \delta$. Тогда $V_{P_0} \leqslant V_P < \varepsilon$.

Доказательство п. 3. Рассмотрим случай $b' = b$. Если $f(x) \equiv 0$, то функция интегрируема. Иначе $C := \sup_{[a,b]} |f(x)| > 0$. Воспользуемся критерием 2 из теоремы 6.1. По данному $\varepsilon > 0$ подберем подходящее разбиение. Выберем $a' = a + \varepsilon/(4C) < b$. Поскольку f интегрируема на $[a',b]$, найдется разбиение P' отрезка $[a',b]$, для которого разность сумм Дарбу $V_{P'} < \varepsilon/2$. Рассмотрим разбиение P отрезка $[a,b]$, которое состоит из отрезка $[a,a']$ и всех отрезков разбиения P'. Для него

$$V_P = (M' - m')(a - a') + V_{P'} < 2C\frac{\varepsilon}{4C} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \blacksquare$$

Теорема 6.4. ***(аддитивность интеграла по отрезкам)*** *Пусть $c \in [a,b]$. Функция f интегрируема на $[a,b]$ тогда и т.т., когда f интегрируема и на $[a,c]$, и на $[c,b]$, причем*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Доказательство. Равносильность интегрируемости слева и справа доказано в теореме 6.3 (пп. 1,2). Рассмотрим последовательность разбиений P_n отрезка $[a,b]$, которые включают точку c, и для которых мелкость $p(P_n) \to 0$. Каждое такое разбиение состоит из разбиений P_n', P_n'' отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$ соответственно. Для сумм Римана получаем

$$S_{P_n,\Xi_n} = S_{P_n',\Xi_n'} + S_{P_n'',\Xi_n''}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $p(P_n) \to 0$, получаем утверждение теоремы. $\blacksquare$

Мы рассматривали интеграл при условии, что верхний предел выше нижнего. Удобно снять это ограничение.

Определение 6.4. Для произвольной функции f положим

$$\int_a^a f(x)dx := 0.$$

Если функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, положим

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx.$$

Следствие 6.2. *Если функция f интегрируема на отрезке, содержащем точки a,b,c, то при любом их расположении справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $c < a < b$. Из теоремы 6.12 следует

$$\int_c^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx \;\Leftrightarrow$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \;\blacksquare$$

Теперь обсудим свойства ОИ, связанные с подынтегральной функцией.

Теорема 6.5. ***(линейность интеграла)*** *Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ линейная комбинация функций $\alpha f + \beta g$ интегрируема на $[a,b]$, причем*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Воспользуемся определением Римана. Заметим, что сумма Римана линейна относительно подынтегральной функции. Остается взять предел от каждого слагаемого:

$$\lim_{p(P)\to 0} S_{P,\Xi}(\alpha f + \beta g) = \alpha \lim_{p(P)\to 0} S_{P,\Xi}(f) + \beta \lim_{p(P)\to 0} S_{P,\Xi}(g) =$$

$$\alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx. \;\blacksquare$$

Замечание. Утверждение теоремы 6.5 означает, что множество $I_R([a,b])$ всех функций, интегрируемых по Риману на фиксированном отрезке $[a,b]$, образует линейное пространство (заметим, функциональное!), а определенный интеграл на нем является линейным оператором (см. определение 5.4):

$$A : I_R([a,b]) \to \mathbb{R}, \quad A(f) := \int_a^b f(x)dx.$$

Следствие 6.3. *(переопределение подынтегральной функции) Изменение значений функции в конечном количестве точек не влияет на интегрируемость. Если же функция интегрируема, то значение интеграла не изменится.*

Доказательство. Пусть функция g тождественно равна нулю всюду на отрезке, кроме конечного количества точек. Функция g интегрируема и ее интеграл равен нулю (докажите!). Поэтому интегрируемость функции $f+g$ равносильная интегрируемости f, а интеграл суммы равен интегралу от f. $\blacksquare$

Теорема 6.6. *(интегрируемость произведения) Если функции f и g интегрируемы на $[a,b]$, то их произведение $h = fg$ также интегрируемо на $[a,b]$.*

Доказательство. Воспользуемся критерием 2 теоремы 6.1. Поскольку сомножители ограничены, то $|f(x)| < C, \quad |g(x)| < C$. Пусть P – произвольное разбиение $[a,b]$, $\xi,\eta \in [x_{i-1},x_i]$ – произвольные точки. Оценим колебание на отрезке разбиения :

$$|h(\xi)-h(\eta)| = |f(\xi)(g(\xi)-g(\eta))+g(\eta)(f(\xi)-f(\eta))| \leqslant$$

$$C(|g(\xi)-g(\eta)|+|f(\xi)-f(\eta)|) \leqslant C(v_i(g)+v_i(f))$$

В полученном неравенстве правая часть вообще не зависит от точек $\xi,\eta \in [x_{i-1},x_i]$. Поэтому

$$v_i(h) = M_i(h)-m_i(h) \leqslant C(v_i(g)+v_i(f)) \ \Rightarrow \ V_P(h) \leqslant C(V_P(g)+V_P(f)).$$

Существует разбиение P_1, для которого $V_{P_1}(f) \leqslant \varepsilon/(2C)$ и разбиение P_2, для которого $V_{P_2}(g) \leqslant \varepsilon/(2C)$. Возьмем $P = P_1 \sqcup P_2$. В силу следствия 6.1, при измельчении разность сумм Дарбу уменьшается, поэтому

$$V_P(h) \leqslant C(V_P(f)+V_P(g)) \leqslant C(V_{P_1}(f)+V_{P_2}(g)) \leqslant \varepsilon. \ \blacksquare$$

Теорема 6.7. *(об интегрируемости модуля) Если функция f интегрируема на $[a,b]$, то функция $|f|$ также интегрируема на $[a,b]$.*

Доказательство. Для любых точек $\xi,\eta \in [x_{i-1},x_i]$ справедлива оценка

$$||f(\xi)|-|f(\eta)|| \leqslant |f(\xi)-f(\eta)|.$$

Поэтому $v_i(|f|) \leqslant v_i(f)$ и $V_P(|f|) \leqslant V_P(f)$ (см. доказательство теоремы 6.6). Остается сослаться на второй критерий теоремы 6.1. $\blacksquare$

Замечание. Из интегрируемости функции $|f|$ не следует интегрируемость f. Пример: функция $f(x) = -1$ для рациональных точек и $f(x) = 1$ для иррациональных не интегрируема; ее модуль $|f(x)| \equiv 1$ интегрируем.

6.4. Классы интегрируемых функций. Пока остается открытым вопрос: какие именно функции интегрируемы? Здесь мы опишем наиболее важные классы интегрируемых функций.

Теорема 6.8. ***Непрерывная на отрезке*** *$[a,b]$ функция f интегрируема.*

Доказательство. По теореме Вейерштрасса функция равномерно ограничена на $[a,b]$, поэтому можно применить критерий 3 теоремы 6.1. Из теоремы Кантора о равномерной непрерывности следует, что по любому $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $|x'-x''| < \delta$ следует $|f(x')-f(x'')| < \varepsilon/(b-a)$. Возьмем мелкость разбиения меньше δ. В силу непрерывности, на каждом отрезке разбиения функция достигает минимума и максимума. Поэтому разность сумм Дарбу

$$V_P = \sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i')-f(x_i''))\Delta x_i <$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \varepsilon. \ \blacksquare$$

Теорема 6.9. ***Монотонная на отрезке*** *$[a,b]$ функция f интегрируема.*

Доказательство. Пусть, для определенности, функция возрастает. Тогда для любого $x \in [a,b]$ верно $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$. Значит, функция ограничена. Применим критерий 3 теоремы 6.1. Если $f(a) = f(b)$, то функция постоянна и интегрируема. Пусть $f(a) < f(b)$. Возьмем $\delta = \varepsilon/(f(b) - f(a))$. Пусть P – произвольное разбиение мелкости меньшей δ. В силу монотонности, колебание на i-м отрезке разбиения равно $v_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Поэтому

$$V_P = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i < \delta \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) =$$

$$\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}(f(b) - f(a)) = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Замечание. Если функция монотонна на интервале, то она может не быть интегрируемой. Пример: $y = 1/x$, дополненная условием $y(0) = 0$ не интегрируема на $[0, 1]$.

Теорема 6.10. *Если функция f ограничена на отрезке $[a,b]$ и имеет на нем конечное количество точек разрыва, то она интегрируема на a, b.*

Доказательство. Разобьем отрезок $[a,b]$ на конечное количество подотрезков, концами которых являются точки разрыва. На каждом таком отрезке $[\xi_{j-1}, \xi_j]$ функция ограничена и непрерывна внутри отрезка. Следовательно, она интегрируема на любом подотрезке $[\xi'_{j-1}, \xi'_j] \subset [\xi_{j-1}, \xi_j]$, где $\xi_{j-1} < \xi'_{j-1} < \xi'_j < \xi_j$. Из п. 3 теоремы 6.3 следует, что f интегрируема на $[\xi_{j-1}, \xi_j]$. А из п. 1 теоремы 6.3 – интегрируема на объединении всех подотрезков $[\xi_{j-1}, \xi_j]$, т.е. интегрируема на $[a, b]$. $\blacksquare$

Примеры. 1) Функция $f(x) = sign(x)$ имеет единственную точку разрыва первого рода – она интегрируема на любом отрезке. 2) функция $f(x) = \sin(1/x)$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$ имеет единственную точку разрыва второго рода – интегрируема на любом отрезке.

Напомним, что функция f называется **кусочно-непрерывной** на $[a, b]$, если она имеет на отрезке не более, чем конечное количество точек разрыва первого рода. Из теоремы 6.10 получаем

Следствие 6.4. *Кусочно-непрерывные функции интегрируемы на $[a, b]$.*

Класс кусочно-непрерывных функций шире класса непрерывных функций и удобнее для конструирования функций с наперед заданными свойствами.

Замечание. Описание всех функций, интегрируемых по Риману, можно дать только с помощью "меры Лебега" , которую изучим позже.

6.5. Интегральные неравенства. Как правило, вычислить интеграл невозможно, поэтому первостепенную роль играют интегральные оценки. Особенно они важны в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и в уравнениях математической физики.

Теорема 6.11. *(интегрирование неравенств) Если функции f и g интегрируемы на $[a, b]$ и $f(x) \geqslant g(x)$ на этом отрезке, то*

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Для любого разбиения P и любого набора точек Ξ для сумм Римана справедливо $S_{P,\Xi}(f) \geqslant S_{P,\Xi}(g)$. Откуда следует утверждение теоремы. ∎

Следствие 6.5. *Если функция f интегрируема на $[a,b]$, то*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

Доказательство. Из теоремы 6.7 следует, что интеграл справа существует. Из двусторонней оценки

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$$

и теоремы 6.13 следует, что

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b |f(x)|dx. \ \blacksquare$$

Теорему 6.11 можно усилить, если интегрируемые функции непрерывны.

Теорема 6.12. *Если функции f и g интегрируемы на $[a,b]$, $f(x) \geqslant g(x)$ на этом отрезке и $f(x_0) > g(x_0)$ в некоторой точке $x_0 \in [a,b]$, в которой функции непрерывны, то*

$$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что для неотрицательной интегрируемой функции $\varphi(x) := f(x) - g(x) \geqslant 0$, у которой $\varphi(x_0) > 0$, причем φ непрерывна в точке x_0 справедлива оценка: $\int_a^b \varphi(x)dx > 0$.

В силу непрерывности в точке x_0, существует окрестность $U_\delta(x_0)$, в которой $\varphi(x) \geqslant \varphi(x_0)/2 > 0$. Поэтому

$$\int_a^b \varphi(x)dx \geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi(x)dx \geqslant \frac{\varphi(x_0)}{2}2\delta > 0. \ \blacksquare$$

Замечание. Отказаться от условия непрерывности нельзя – функция f может иметь в точке x_0 "всплеск" который не повлияет на интеграл. Придумайте пример такой функции!

Теорема 6.13. *(о среднем) Если функции f и g интегрируемы на $[a,b]$, причем функция g сохраняет знак (т.е. $g(x) \geqslant 0$ или $g(x) \leqslant 0$ на $[a,b]$), то:*

1. *существует такое $\mu \in [m, M]$, где $m := \inf_{[a,b]} f(x) \leqslant \sup_{[a,b]} f(x) =: M$, что*
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx;$$
2. *если функция f непрерывна на $[a,b]$, то существует такое $\xi \in [a,b]$, что*
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Пусть $g(x) \geqslant 0$, тогда

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \;\Rightarrow\; mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x) \;\Rightarrow$$

$$m \int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M \int_a^b g(x)dx.$$

Если $\int_a^b g(x)dx = 0$, то $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ и число μ можно взять любым. Если же $\int_a^b g(x)dx > 0$, то

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leqslant M \;\Leftrightarrow\; m \leqslant \mu := \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leqslant M.$$

Если функция f непрерывна, то она принимает все промежуточные значения, поэтому существует точка $\xi \in [a,b]$, для которой $f(\xi) = \mu$. ■

6.6. Определенный интеграл как функция верхнего предела и формула Ньютона-Лейбница. Определение интеграла Римана по схеме Дарбу неконструктивно. Схема Римана требует нахождения сложного предела интегральных сумм. Оба определения не указывают на связи определенного интеграла с другими понятиями МА. Эти пробелы ликвидирует знаменитая формула Ньютона-Лейбница. Чтобы ее получить, мы введем специальную функцию, порожденную определенным интегралом.

Теорема 6.14. *(о непрерывности интеграла по верхнему пределу) Пусть функция f* ***интегрируема*** *на отрезке $[a,b]$. Тогда для любой фиксированной точки $x_0 \in [a,b]$* ***функция верхнего предела интегрирования***

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

равномерно непрерывна на $[a,b]$ (следовательно, непрерывна на $[a,b]$).

Доказательство. Заметим, что мы поменяли обозначения переменной интегрирования, иначе возникнет путаница.

Из леммы 6.5 следует, что функция f ограничена: $\exists C > 0 : \; \forall x \in [a,b] \hookrightarrow |f(x)| < C$. Поэтому $\forall \varepsilon > 0 \; \forall x_1, x_2 \in [a,b] : \; |x_2 - x_1| < \varepsilon/C$ верно

$$|F(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_{x_0}^{x_2} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt \right| =$$

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \right| \leqslant \left| \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt \right| < C|x_2 - x_1| < \varepsilon.$$

Мы учли случай $x_1 > x_2$, поэтому сохранили внешний модуль. ■

Теорема 6.15. *(о производной интеграла по верхнему пределу) Пусть функция f* ***непрерывна*** *на отрезке $[a,b]$. Тогда функция F дифференцируема на $[a,b]$, причем*

$$F'(x) := f(x).$$

В концых отрезка производные $F'(a)$, $F'(b)$ понимаются как односторонние.

Доказательство. Для любой фиксированной точки $x \in [a, b]$ и такого приращения Δx, что $x + \Delta x \in [a, b]$ справедливо:

$$\left|\frac{F(x+\Delta x) - F(x))}{\Delta x} - f(x)\right| = \left|\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} - f(x)\right| =$$

$$\left|\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} - \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(x)dt}{\Delta x}\right| = \left|\frac{\int_x^{x+\Delta x} (f(t) - f(x))dt}{\Delta x}\right|.$$

В силу непрерывности функции f,

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall t \; \exists \delta > 0 : \; |t - x| \leqslant |\Delta x| < \delta \; \hookrightarrow \; |f(t) - f(x)| < \varepsilon.$$

Поэтому

$$\left|\frac{\int_x^{x+\Delta x} (f(t) - f(x))dt}{\Delta x}\right| < \varepsilon \; \Rightarrow \; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x))}{\Delta x} = f(x). \; \blacksquare$$

Замечание. В теореме 6.17 по сравнению с теоремой 6.16 требование к подынтегральной функции f ужесточено, но и свойства функции F существенно "улучшились" .

Следствие 6.6. *(о первообразной подынтегральной функции) Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция f. Тогда для любой фиксированной точки $x_0 \in [a, b]$ функция $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ является первообразной функции $f(x)$ и справедлива формула для неопределенного интеграла:*

$$\int f(x)dx = \int_{x_0}^x f(t)dt + C. \tag{6.5}$$

Доказательство вытекает из определений первообразной и неопределенного интеграла, теоремы 6.17 и теоремы 1.15.1 о структуре множества всех первообразных. $\blacksquare$

Замечание. Формула (12.1) устанавливает связь между понятиями неопределенного и определенного интеграла и объясняет терминологию.

Теорема 6.16. *(формула Ньютона-Лейбница; Исаак Ньютон 1642 – 1727) Пусть $\Phi(x)$ – произвольная первообразная непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)|_a^b. \tag{6.6}$$

Доказательство. Возьмем $x_0 = a$. Из формулы (12.1) следует, что существует единственная постоянная C, для которой $\int_a^x f(x)dx = \Phi(x) + C$. Чтобы найти C, возьмем $x = a$. Получим $C = -\Phi(a)$. Остается подставить $x = b$. $\blacksquare$

Замечание 1. Формула (6.6): 1) устанавливает связь между понятиями неопределенного и определенного интегралов, 2) мощный инструмент для нахождения и исследования определенного интеграла, 3) выражает глобальное свойство функции f на отрезке через значения ее первообразной только на концах.

Замечание 2. В случае кусочно-непрерывной функции f можно поступать следующим образом. Сначала интегрировать функцию на каждом отрезке непрерывности, применяя формулу Ньютона-Лейбница. (Значения функции на концах отрезков не существенны в силу следствия 6.2.) Затем сложить все полученные значения интегралов.

Замечание 3. Свойства функции f быть интегрируемой (т.е. существование определенного интеграла) и иметь первообразную (т.е. существование неопределенного интеграла) являются **независимыми**. Функция может обладать одним из этих свойств, не обладая другим (приведите примеры!). Непрерывность функции f является достаточным для того, чтобы существовал и определенный интеграл, и неопределенный. Откуда уже вытекает справедливость формулы Ньютона-Лейбница. Однако требование непрерывности подынтегральной функции не является необходимым. Справедливо утверждение

Если на отрезке $[a,b]$ функция f интегрируема и имеет на нем первообразную, то выполняется формула Ньютона-Лейбница.

Задача. Докажите сформулированное утверждение: Приведите пример разрывной функции, для которой это утверждение справедливо.

6.7. Замена переменной и интегрирование по частям.

Теорема 6.17. *(замена переменной в определенном интеграле) Пусть функция φ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$ и на концах принимает значения $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Пусть функция f непрерывна на отрезке $\varphi([\alpha,\beta])$. Тогда*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_a^b f(x)dx. \tag{6.7}$$

Доказательство. Поскольку функция f **непрерывна** на $\varphi([\alpha,\beta])$, у нее существует первообразная; например, функция $F(x)=\int_{x_0}^x F(t)dt$ верхнего предела интегрирования: $F'(x)=f(x)$. Применим к f формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)).$$

С другой стороны, по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Т.е. функция $F(\varphi(t))$ – первообразная **непрерывной** функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Поэтому по формуле Н-Л

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))|_\alpha^\beta = F(\varphi(\alpha))-F(\varphi(\beta)). \quad \blacksquare$$

Замечание 1. Не обязательно $[a,b]=\varphi([\alpha,\beta])$; в общем случае $[a,b]\subset\varphi([\alpha,\beta])\subset Def(f)$.

Пример. ???

Замечание 2. Формулой (6.7) пользуются в обе стороны в зависимости от обстоятельств.

Замечание 3. В отличие от формулы замены переменной в неопределенном интеграле, в правой части формулы (6.7) не нужно возвращаться к переменной t, поскольку определенный интеграл, это число (и оно уже найдено!), а неопределенный – функция.

Замечание 4. Формулу (6.7) можно записать в терминах дифференциалов, используя инвариантность первого дифференциала:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\ d\varphi = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.$$

Примеры ???

Теорема 6.18. *(интегрирование по частям) Если функции $u(x)$, $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$, то*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx, \tag{6.8}$$

или в дифференциалах

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

Доказательство. Формула (6.8) следует из правила дифференцирования произведения функций и формулы Н-Л. ■

Задача. Докажите теорему 6.18.

§ 7. Геометрические и физические приложения определенного интеграла

Мы рассмотрим некоторые геометрические и физические понятия с применением определенного интеграла. Эти понятия в свое время стимулировали развитие МА.

7.1. Площади плоских фигур.

Определение 7.1. Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ – непрерывная неотрицательная функция. **Криволинейной трапецией** называют часть плоскости, расположенную между осью Ox и графиком функции f (рис. ???):

$$T(f) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leqslant x \leqslant b, \ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

Рис. ???

Для произвольного разбиения P отрезка $[a,b]$ рассмотрим две **ступенчатые фигуры** – внутреннюю и объемлющую:

$$G_{*P}(f) = \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \times [0, m_i], \quad G^*_P(f) = \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] \times [0, M_i];$$

$$G_{*P} \subset T \subset G^*_P.$$

Площади ступенчатых фигур совпадают с нижней и верхней суммами Дарбу:

$$Sq(G_{*P}(f)) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = S_{*P}(f), \ \ Sq(G_{*P}(f)) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = S^*_P(f)$$

Естественно дать следующее

Определение 7.2. **Площадью криволинейной трапеции**, порожденной графиком непрерывной неотрицательной функции f, называют число

$$Sq(T(f)) = \int_a^b f(x)dx.$$

Принцип **аддитивности** для площадей гласит: *площадь объединения двух криволинейных трепеций без общих внутренних точек равна сумме площадей.* Примем на веру, что он выполняется (принцип будет доказан позже). Тогда определено понятие площади фигуры

$$T(g,f) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leqslant x \leqslant b, \ g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\},$$

заключенной между двумя графиками (рис. ???) и справедлива

Теорема 7.1. *Пусть $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ – непрерывные функции, причем $g(x) \leqslant f(x)$ на $[a,b]$. Тогда площадь фигуры $T(g,f)$ равна:*

$$Sq(T(g,f)) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx. \tag{7.1}$$

Доказательство очевидно.

Замечание 1. Формула (7.1) позволяет существенно расширить класс плоских фигур, площадь которых мы можем найти. Пусть Ω – ограниченная плоская область, граница которой есть конечное объединение непрерывных замкнутых кривых (см. рис. ???). Предположим, что область можно разбить на конечное количество подобластей, заключенных между двумя графиками, причем допустимы графики функций $x = f(y)$ и $x = g(y)$. Тогда площадь каждой подобласти можно найти по формуле (7.1) и воспользоваться аддитивностью площади.

Замечание 2. Если функция f не является знакоопределенной, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ полезно трактовать, как ориентированную площадь криволинейной трапеции.

Определение 7.3. Пусть в полярных координатах (ρ, φ) задана непрерывная кривая $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, где $\rho(\varphi)$ – непрерывная неотрицательная функция. (По геометрической традиции функцию радиуса и ее значения обозначают, ради экономии записи, одной буквой.) **Криволинейным сектором** называют часть плоскости, расположенную между крайними лучами и кривой (рис. ???):

$$Sec := \{(\rho, \varphi) : \ \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta, \ 0 \leqslant \rho \leqslant \rho(\varphi)\}.$$

Рис. ???

Для произвольного разбиения P отрезка $[\alpha, \beta]$ рассмотрим два **ступенчатых сектора** – внутренний и объемлющий:

$$G_{*P}(\rho) = \bigcup_{i=1}^{n} \{(\rho, \varphi) : \ \varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i, \ 0 \leqslant \rho \leqslant m_i\},$$

$$G^*_P(\rho) = \bigcup_{i=1}^{n} \{(\rho, \varphi) : \ \varphi_{i-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_i, \ 0 \leqslant \rho \leqslant M_i\};$$

$$G_{*P} \subset Sec \subset G^*_P.$$

Из школьного курса известна площадь сектора. Поэтому мы можем записать площади ступенчатых секторов, которые совпадают с нижней и верхней суммами Дарбу определенной функции:

$$Sq(G_{*P}(\rho)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i^2 (\varphi_i - \varphi_{i-1}) = S_{*P}(\frac{1}{2}\rho^2),$$

$$Sq(G^*_P(\rho)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} M_i^2 (\varphi_i - \varphi_{i-1}) = S^*_P(\frac{1}{2}\rho^2).$$

Естественно дать следующее

Определение 7.4. **Площадью криволинейного сектора**, порожденного непрерывной кривой $\rho = \rho(\varphi)$, называют число

$$Sq(Sec(\rho)) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

Замечание. Позже будет показано, что определения 7.2 и 7.4 согласованы – это частные случаи "жордановой меры" плоских фигур.

Пример.

7.2. Длина дуги кривой. Пусть дана гладкая кривая, заданная вектор-функцией $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, где $t \in [a, b]$. У нас имеется определение 1.16.12 длины дуги кривой и доказана теорема 1.16.4 о производной длины дуги по параметру: $s'(t) = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} > 0$. Тогда из формулы Н-Л сразу получаем

Теорема 7.2. *Длина кривой равна*

$$S = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt. \tag{7.2}$$

Поскольку график гладкой функции f есть плоская кривая $\mathbf{r}(x) = (x, f(x))$, то получаем

Следствие 7.1. *Длина дуги графика функции f равна*

$$S(Gr(f)) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Полезно знать формулу длины кривой, заданной в полярной системе координат.

Следствие 7.2. *Пусть в ПСК гладкая кривая задана непрерывно дифференцируемой функцией $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Тогда ее длина вычисляется формулой*

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho'(\varphi))^2 + \rho^2(\varphi)}d\varphi.$$

Доказательство. В качестве параметра кривой возьмем φ. По определению ПСК

$$x(\varphi) = \rho(\varphi)\cos\varphi \;\Rightarrow\; x'(\varphi) = \rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi;$$

$$y(\varphi) = \rho(\varphi)\sin\varphi \;\Rightarrow\; x'(\varphi) = \rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi.$$

Подставляя в формулу (7.2), получаем ответ. ■

Пример.

7.3. Объем тела вращения.

Определение 7.5. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ – непрерывная неотрицательная функция. **Телом вращения вокруг** оси Ox, порожденным графиком $Gr(f)$, называют подмножество пространства (см. рис. ???????)

$$R(f) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; a \leqslant x \leqslant b, \; \sqrt{y^2 + z^2} \leqslant f(x)\}.$$

Для произвольного разбиения P отрезка $[a, b]$ рассмотрим два **цилиндрических ступенчатых тела** – внутреннее и объемлющее:

$$G_{*P}(f) = \bigcup_{i=1}^n \{(x, y, z) : \; x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i, \; \sqrt{y^2 + z^2} < m_i\},$$

$$G^*_P(f) = \bigcup_{i=1}^{n} \{(x,y,z): \; x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i, \; \sqrt{y^2+z^2} < M_i\};$$

$$G_{*P} \subset R \subset G^*_P.$$

Из школьного курса известен объем цилиндра. Поэтому мы можем записать объемы цилиндрических ступенчатых тел, которые совпадают с нижней и верхней суммами Дарбу:

$$Sq(G_{*P}(f)) = \pi \sum_{i=1}^{n} m_i^2 (x_i - x_{i-1}) = S_{*P}(\pi f^2),$$

$$Sq(G_{*P}(f)) = \pi \sum_{i=1}^{n} M_i^2 (x_i - x_{i-1}) = S^*_P(\pi f^2).$$

Естественно дать следующее

Определение 7.6. **Объемом тела вращения**, порожденного графиком непрерывной неотрицательной функции f, называют число

$$Vol(R(f)) = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

7.4. Площадь поверхности вращения.

Определение 7.7. Пусть $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ – гладкая (т.е. непрерывно дифференцируемая) неотрицательная функция. **Поверхностью вращения вокруг** оси Ox, порожденной графиком $Gr(f)$, называют подмножество пространства (см. рис. ???)

$$R(f) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: \; a \leqslant x \leqslant b, \; \sqrt{y^2+z^2} = f(x)\}.$$

Рис. ???

В отличие от определения площади плоской фигуры и объема тела вращения, для определения площади поверхности вращения применим определение Римана, а не Дарбу. Для произвольного разбиения P отрезка $[a,b]$ построим ломанную, вписанную у график $Gr(f)$ (рис. ?????). Длина звена ломанной

$$\Delta s_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

При вращении звена ломанной образуется боковая поверхность усеченного конуса, а вся ломанная порождает **коническую ступенчатую поверхность** K_P. Из курса геометрии известно, что площадь поверхности усеченного конуса равна $Sq(Kon) = \pi(R_1 + R_2)l$, где R_1, R_2 – радиусы оснований, l – длина образующей. Поэтому площадь конической ступенчатой поверхности K_P равна

$$Sq(K_P) = \pi \sum_{i=1}^{n} (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \Delta s_i. \tag{7.3}$$

Определение 7.8. **Площадью поверхности вращения**, порожденной графиком гладкой функции, называют предел

$$Sq(R(f)) = \lim_{p(P)\to 0} Sq(K_P),$$

где $p(P)$ – мелкость разбиения P.

Теорема 7.3. *Площадь поверхности вращения, порожденная графиком гладкой функции, существует и равна*

$$Sq(R(f)) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx. \tag{7.4}$$

Доказательство. По теореме Лагранжа $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)\Delta x_i$, где $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Поэтому формула (7.3) имеет вид

$$Sq(K_P) = \pi\sum_{i=1}^{n}(f(x_{i-1}) + f(x_i))\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\Delta x_i.$$

Полученное выражение напоминает интегральную сумму для интеграла (7.4). Поэтому запишем эту сумму в виде

$$Sq(K_P) = 2\pi\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\Delta x_i +$$

$$\pi\sum_{i=1}^{n}(f(x_{i-1}) + f(x_i) - 2f(\xi_i))\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\Delta x_i = \Sigma' + \Sigma''.$$

В силу непрерывности производной $f'(x)$, первая сумма Σ' имеет пределом интеграл (7.4). Покажем, что вторая сумма Σ'' стремиться к нулю, когда мелкость стремиться к нулю. На отрезке $[a, b]$ производная равномерно ограничена: $\exists C > 0 : \ \forall x \in [a, b] \ \hookrightarrow \ |f'(x)| < C$. Поэтому равномерно на $[a, b]$ верна оценка $\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} < \sqrt{1 + C^2}$. Для первого сомножителя имеем

$$|f(x_{i-1}) + f(x_i) - 2f(\xi_i)| \leqslant |f(x_{i-1}) - f(\xi_i)| + |f(x_i) - f(\xi_i)| \leqslant$$

$$|f'(\theta_1)|\Delta x_i + |f'(\theta_2)|\Delta x_i \leqslant 2\ C\ \Delta x_i \leqslant\ 2\ C\ p(P), \text{ где } \theta_1 \in (x_{i-1}, \xi_i),\ \theta_2 \in (\xi_i, x_i).$$

Получили оценку на вторую сумму

$$\left|\Sigma''\right| \leqslant 2\pi\ C\ \sqrt{1+C^2}\ (b-a)\ p(P) \to 0 \text{ при } p(P) \to 0. \ \blacksquare$$

7.5. Криволинейные интегралы первого рода. Такие интегралы часто возникают в физических задачах.

Определение 7.9. Пусть: $\gamma = \widetilde{AB}$ – гладкая кривая, заданная вектор-функцией $\mathbf{R}(s)$, зависящей от натурального параметра s, $\ s \in [0, S] \ \ (S > 0)$; $A(0), B(S) \in \gamma$ – **начальная** и **конечная** точки кривой; $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – область, содержащая кривую γ; $f : \Omega \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция (т.е. скалярное поле на Ω). **Криволинейным интегралом первого рода** (КИПР) по дуге $\gamma = \widetilde{AB}$ называется определенный интеграл

$$\int_\gamma f ds = \int_{\widetilde{AB}} f ds = \int_0^S f(\mathbf{R}(s))ds. \tag{7.5}$$

Замечание. Условие $S > 0$ является принципиальным в данном определении. Т.е., КИПР – это обычный определенный интеграл от сложной функции $f(\mathbf{R}(s))$, у которого нижний предел интегрирования всегда меньше верхнего.

Физическая интерпретация. Если $f(\mathbf{R}(s)) \equiv 1$, то $\int_\gamma ds$ – длина дуги γ. Если $f(\mathbf{R}(s)) \geqslant 0$, то $\int_\gamma f ds$ – масса дуги с линейной плотностью $f(\mathbf{R}(s))$. Если $f(\mathbf{R}(s))$ – знакопеременная функция, то КИПР – электрический заряд дуги с линейной плотностью $f(\mathbf{R}(s))$.

Теорема 7.4. *(свойства криволинейного интеграла первого рода)*

1. *КИПР НЕ зависит от направления обхода кривой (см. рис. ???):*

$$\int_{\widetilde{AB}} f ds = \int_{\widetilde{BA}} f ds', \text{ где } s' = S - s$$

2. *КИПР* ***аддитивен****: если точка $C \in \gamma$ (см. рис. ???), то*

$$\int_{\widetilde{AB}} f ds = \int_{\widetilde{AC}} f ds + \int_{\widetilde{CB}} f ds.$$

3. *КИПР по замкнутой кривой (т.е. $A = B$) НЕ зависит от выбора начальной точки и направления обхода кривой (см. рис. ???):*

$$\forall C \in \gamma \ \hookrightarrow \ \int_{\widetilde{ACA}} f ds = \int_{\widetilde{CAC}} f ds$$

4. *КИПР линеен относительно подынтегральной функции:*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall f, g \in C^0(\Omega) \ \hookrightarrow \ \int_\gamma (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_\gamma f ds + \beta \int_\gamma g ds.$$

Рис. ???

Доказательство п. 1:

$$\int_{\widetilde{AB}} f ds = \int_0^S f(\mathbf{R}(s)) ds = \left| \begin{array}{cc} s = S - s' & ds = -ds' \\ A(s'_1 = S) & B(s'_2 = 0) \end{array} \right| =$$

$$\int_S^0 f(\mathbf{R}(S - s'))(-ds') = -\int_S^0 f(\mathbf{R}(S - s')) ds' =$$

$$\int_0^S f(\mathbf{R}(S - s')) ds' = \int_{\widetilde{BA}} f ds'.$$

В доказательстве мы использовали требование к пределам интегрирования в определении КИПР – от нуля до S.

Доказательство п. 2. Пусть точке C отвечает значение параметра $S_1 \in (0, S)$. Воспользуемся аддитивностью определенного интеграла, а затем второй интеграл преобразуем к стандартному виду:

$$\int_{\widetilde{AB}} f ds = \int_0^{S_1} f ds + \int_{S_1}^S f ds = \left| \begin{array}{cc} s = S_1 + s' & ds = ds' \\ C(s'_1 = 0) & B(s'_2 = S - S_1) \end{array} \right| =$$

$$\int_0^{S_1} f ds + \int_0^{S - S_1} f ds' = \int_{\widetilde{AC}} f ds + \int_{\widetilde{CB}} f ds.$$

Свойство 3 – тривиальное следствие пп. 1 и 2 (докажите самостоятельно!). Свойство 4 – известное свойство определенного интеграла. ■

Замечание. Свойство 1 означает, что КИПР берется НЕ по ориентированной дуге от точки A к точке B, а **по дуге без ориентации**. Поэтому предпочитают обозначать дугу одним символом γ.

Применение натурального параметра в конкретных вычислениях явление исключительное. Поэтому полезно иметь формулу для вычисления КИПР в произвольной параметризации.

Теорема 7.5. *Пусть кривая γ задана в произвольной допустимой параметризации $\boldsymbol{r}(t)$, точки $A(t_1), B(t_2) \in \gamma$, причем $t_1 < t_2$ (т.е. параметризация согласована с данной натуральной). Тогда КИПР вычисляется по формуле*

$$\int_\gamma f ds = \int_{t_1}^{t_2} f(\boldsymbol{r}(t))|\boldsymbol{r}'(t)|dt. \tag{7.6}$$

Если же $t_1 > t_2$, то следует поменять пределы интегрирования местами:

$$\int_\gamma f ds = \int_{t_2}^{t_1} f(\boldsymbol{r}(t))|\boldsymbol{r}'(t)|dt.$$

Доказательство. Допустимость параметризации означает, что вектор-функция $\mathbf{r} \in C^1$ и $|\mathbf{r}'(t)| > 0$. Тогда натуральный параметр выражается через данный: $s = s(t)$, где $|s'(t)| > 0$. Если $t_1 < t_2$, то $s'(t) = |\mathbf{r}'(t)|$ (теорема 1.16.4). Сделав замену в формуле (7.5), мы получим доказываемую формулу:

$$\int_0^S f(\mathbf{R}(s))ds = \int_{t_1}^{t_2} f(\mathbf{R}(s(t)))|\mathbf{r}'(t)|dt = \int_{t_1}^{t_2} f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|dt.$$

Если же $t_1 > t_2$, то $s'(t) = -|\mathbf{r}'(t)|$. В этом случае

$$\int_0^S f(\mathbf{R}(s))ds = -\int_{t_1}^{t_2} f(\mathbf{R}(s(t)))|\mathbf{r}'(t)|dt = \int_{t_2}^{t_1} f(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|dt. \blacksquare$$

Заметим, что и в произвольной параметризации для КИПР сохраняется принцип: нижний предел интегрирования меньше верхнего.

Пусть вектор-функция $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ и $s'(t) > 0$, тогда формула (7.6) приобретает вид

$$\int_\gamma f ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt.$$

Если же кривая заданая явно, т.е. как график функции $y = \varphi(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, то

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(x, \varphi(x))\sqrt{1 + (\varphi'(t))^2}dt.$$

Замечание. Для определения КИПР достаточно задать скалярное поле f на кривой γ. Но в приложениях (например, в вариационных задачах) кривая обычно подвергается "малым возмущениям". Поэтому естественно потребовать существования скалярного поля в некоторой области, содержащей данную кривую.

7.6. Криволинейные интегралы второго рода. Перейдем к понятию криволинейного интеграла второго рода (КИВР). Пусть: $\gamma = \widetilde{AB}$ – гладкая ориентированная кривая, заданная вектор-функцией $\mathbf{R}(s)$, зависящей от натурального параметра s, $s \in [0, S]$; ориентацию задает натуральный параметр s (об ориентации кривой см. замечание к определению 1.14.10). Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – область, содержащая кривую Γ; $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ – непрерывное векторное поле (см. п. 2.4). На рис. ??? изображено плоское векторное поле. Поскольку параметризация натуральная, вектор $\mathbf{R}'(s) = \overrightarrow{\tau}(s)$ есть **единичный** касательный вектор (см. п. 1.14.6)

Определение 7.10. **Криволинейным интегралом второго рода** по дуге $\widetilde{AB}$ называется определенный интеграл

$$\int_{\widetilde{AB}} (\mathbf{f}, d\mathbf{R}) = \int_0^S (\mathbf{f}(\mathbf{R}(s)), d\mathbf{R}(s)) := \int_0^S (\mathbf{f}(\mathbf{R}(s)), \overrightarrow{\tau}(s)) ds. \tag{7.7}$$

Рис. ???

Замечание 1. Условие "нижний предел интегрирования меньше верхнего" является в определении КИВР принципиальным, как и в определении КИПР.

Замечание 2. Подынтегральная функция есть "дважды" сложная:

$$\mathbb{R} \ni s \;\to\; \mathbf{R}(s) \;\to\; \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{R}(s)) \\ \overrightarrow{\tau}(s) \end{pmatrix} \;\to\; (\mathbf{R}(s)), \overrightarrow{\tau}(s)) \in \mathbb{R}.$$

Физическая интерпретация. Если $\mathbf{f}$ – силовое поле, то КИВР – работа по перемещению материальной точки из A в B по кривой γ под воздействием силы $\mathbf{f}$.

Теорема 7.6. *(свойства криволинейного интеграла второго рода)*

1. *При изменении ориентации кривой КИВР меняет знак на противоположный:*
$$\int_{\widetilde{AB}} (\boldsymbol{f}, d\boldsymbol{R}) = -\int_{\widetilde{BA}} (\boldsymbol{f}, d\boldsymbol{R});$$
2. *КИВР аддитивен: для любой точки $C \in \gamma$*
$$\int_{\widetilde{AB}} (\boldsymbol{f}, d\boldsymbol{R}) = \int_{\widetilde{AC}} (\boldsymbol{f}, d\boldsymbol{R}) + \int_{\widetilde{CB}} (\boldsymbol{f}, d\boldsymbol{R}).$$
3. *КИВР по замкнутой кривой (т.е. $A = B$) НЕ зависит от выбора начальной точки при условии, что ориентация кривой не меняется (см. рис. ???). Другими словами: если для точек $C(s_1), D(s_2)$ справедливо $0 < s_1 < s_2 < S$, то*
$$\forall C \in \gamma \;\hookrightarrow\; \int_{\widetilde{ACDA}} f ds = \int_{\widetilde{CDAC}} f ds$$
4. *КИВР линеен относительно векторного поля: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in C^0(\Omega)$ справедливо*
$$\int_{\widetilde{AB}} (\alpha \boldsymbol{f} + \beta \boldsymbol{g}, d\boldsymbol{R}) = \alpha \int_{\widetilde{AB}} (\boldsymbol{f}, d\boldsymbol{R}) + \beta \int_{\widetilde{AB}} (\boldsymbol{g}, d\boldsymbol{R}) ds.$$

Рис. ???

Доказательство п. 1. При изменении ориентации кривой в каждой точке единичный касательный вектор $\overrightarrow{\tau}$ меняется на противоположный. Учитывая это обстоятельство, получаем

$$\int_{\widetilde{AB}}(\mathbf{f}, d\mathbf{R}) = \left| \begin{array}{cc} s = S - s' & ds = -ds' \\ C(s_1' = S) & B(s_2' = 0) \end{array} \right| = \int_S^0 (\mathbf{f}(\mathbf{R}(S-s')), d\mathbf{R}(S-s')) =$$

$$-\int_0^S (\mathbf{f}(\mathbf{R}(S-s')), -\overrightarrow{\tau}(S-s'))ds' = -\int_{\widetilde{BA}}(\mathbf{f}, d\mathbf{R}).$$

Пункты 2-4 доказываются как в теореме ■

Замечание 1. КИВР по замкнутой кривой играет очень важную роль в дифференциальной геометрии и топологии, в теории поля и многочисленных физических приложениях. Его называют **циркуляцией векторного поля f по контуру** γ и обозначают $\oint_\gamma(\mathbf{f}, d\mathbf{R})$.

Замечание 2. Для определения КИВР достаточно задать векторное поле $\mathbf{f}$ на кривой γ. Но в приложениях (например, в теории поля) кривая обычно подвергается "малым возмущениям". Поэтому естественно потребовать существования векторного поля в некоторой области, содержащей данную кривую.

Теперь мы обсудим различные способы обозначения КИВР в координатной записи и его вычисление в произвольной параметризации.

Единичный касательный вектр $\overrightarrow{\tau}(s) = (\cos\alpha_1(s), \cos\alpha_2(s), \cos\alpha_3(s))$, где $\alpha_i(s)$ $(i = 1, 2, 3)$ – углы, образованные координатными осями с касательным вектором. Из определения натуральной параметризации следует, что

$$d\mathbf{R}(s) = (\cos\alpha_1(s), \cos\alpha_2(s), \cos\alpha_3(s))ds = (dx(s), dy(s), dz(s)).$$

Пусть векторное поле имеет на кривой γ кординаты $\mathbf{f}(s) = (P(s), Q(s), R(s))$. Тогда мы получаем, что

$$\int_{\widetilde{AB}}(\mathbf{f}, d\mathbf{R}) = \int_{\widetilde{AB}}(P(s)\cos\alpha_1(s) + Q(s)\cos\alpha_2(s) + R(s)\cos\alpha_3(s))ds =$$

$$= \int_{\widetilde{AB}}(Pdx + Qdy + Rdz).$$

Указанные способы записи КИВР носят геометрический (инвариантный) характер и удобны в теоретических исследованиях. Для конкретного вычисления КИВР применяют задание кривой и векторного поля в произвольной параметризации.

Теорема 7.7. *(о вычислении КИВР в произвольной параметризации) Пусть* $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $(t \in [a, b])$ *– допустимая параметризация кривой* γ*, согласованная с данной натуральной. Тогда*

$$\int_{\widetilde{AB}}(\boldsymbol{f}, d\boldsymbol{R}) = \int_a^b (P(t)x'(t) + Q(t)y'(t) + R(t)z'(t))dt.$$

Доказательство сразу следует из формулы замены переменной в ОИ и инвариантности первого дифференциала (см. замечание 4 в п. 6.7). ■

Если кривая плоская и задана как график функции $y = \varphi(x)$, то получаем формулу

$$\int_{\widetilde{AB}} (\mathbf{f}, d\mathbf{R}) = \int_a^b (P(x) + Q(x)\varphi'(x))dx.$$

§ 8. Несобственный интеграл

Определенный интеграл Римана, во-первых, определен на конечном отрезке $[a, b]$, во-вторых, необходимым условием его существования является ограниченность интегрируемой функции (лемма 6.5). Несобственный интеграл (НИ) – это расширение понятия интеграла Римана и на неограниченный промежуток интегрирования, и на функцию, которая неограничена в окрестности некоторых точек области интегрирования. НИ возникают в физике при исследовании на бесконечности (например, удаление тяготеющих масс) или при неограниченном сближении (например, одноименных зарядов). Также НИ применяются в математической статистике (распределение вероятностей).

8.1. Определение несобственного интеграла.

Определение 8.1. Пусть функция $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, где $b \leqslant +\infty$, интегрируема на любом отрезке $[a, b'] \subset [a, b]$. **Несобственным интегралом** называют **конечный** предел

$$\int_a^{\to b} f(x)dx := \lim_{b' \to b-0} \int_a^{b'} f(x)dx \in \mathbb{R}. \tag{8.1}$$

Терминология. Если условие (8.1) выполнено, функцию f называют **несобственно интегрируемой** на $[a, b)$ (символ $+\infty - 0$ означает $+\infty$). Еще говорят: н.и. с **особенностью в точке** b. Аналогично определяются несобственные интегралы с особым левым концом. Т.е., НИ – это предел опредленного интеграла Римана по верхнему (или нижнему) пределу интегрирования. Стрелку в открытом конце мы будем ставить только в том случае, когда хотим указать, где у НИ особенность. Если несобственный интеграл существует, то говорят, что **несобственный интеграл сходится**, в противном случае – **расходится**. Интеграл Римана (в противовес НИ) часто называют **собственным** интегралом.

Примеры. При $\varepsilon > 0$ сходятся НИ:

$$\int_{\to +0}^1 \frac{dx}{x^{1-\varepsilon}} = \lim_{a' \to +0} \int_{a'}^1 \frac{dx}{x^{1-\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon} \lim_{a' \to +0} (1 - (a')^{\varepsilon}) = \frac{1}{\varepsilon}, \tag{8.2}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\varepsilon}} = -\frac{1}{\varepsilon} \lim_{b' \to +\infty} \left(\frac{1}{(b')^{\varepsilon}} - 1 \right) = \frac{1}{\varepsilon}. \tag{8.3}$$

Задача. Докажите, что при $\varepsilon \leqslant 0$ НИ (8.2), (8.3) расходятся.

Замечание 1. Случаи бесконечного и конечного концов интегрирования взаимозаменяемы, например, с помощью замены переменной $t = 1/x$.

Замечание 2. Явное нахождение несобственного интеграла, приведенное в примерах, является редким исключением. Основной проблемой теории несобственных интегралов является **проблема сходимости**. Если НИ $\int_a^{\to b} f(x)dx$ и $\int_c^{\to d} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно, мы будем применять запись $\int_a^{\to b} f(x)dx \overset{cx}{\approx} \int_c^{\to d} g(x)dx$.

Сравним понятие интеграла Римана и несобственного интеграла. При $b = +\infty$ интеграл Римана не определен на $[a, b]$, в то время как несобственный интеграл **может** существовать. Если $b \in \mathbb{R}$, но функция f неограничена на

$[a, b)$, то интеграл Римана на $[a, b]$ не существует, в то время как несобственный интеграл может существовать. Если же функция f **ограничена** на конечном полуотрезке $[a, b)$ и интегрируема на любом подотрезке $[a, b']$, то она интегрируема и на $[a, b]$ (теорема 6.7), причем интеграл Римана и несобственный интеграл равны (это вытекает из теоремы 6.16 о непрерывности интеграла по верхнему пределу). Следовательно, во-первых, понятие несобственного интеграла шире понятия интеграла Римана, во-вторых, на конечном отрезке интересен только случай, когда функция неограничена (имеет **особенность**) на конце отрезка.

Геометрическая интерпретация. НИ – площадь **неограниченной** по вертикали или по горизонтали криволинейной трапеции (см. рис. ???).

Рис. ???

8.2. Основные свойства несобственного интеграла и критерий Коши. В этом пункте подразумевается, что функция $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, где $b \leqslant +\infty$, интегрируема на любом отрезке $[a, b'] \subset [a, b]$.

Теорема 8.1. *(линейность несобственного интеграла)*

1. *Формула*
$$\int_a^{\to b} (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^{\to b} f(x)dx + \beta \int_a^{\to b} g(x)dx \qquad (8.4)$$
справедлива в предположении, что ***оба*** *НИ в правой части равенства сходятся.*
2. *Если один из интегралов в правой части сходится, а другой расходится, то интеграл в левой части расходится и равенство (8.4) бессмысленно.*
3. *Если оба интеграла справа расходятся, то равенство (8.4) бессмысленно, а сходимость интеграла слева требует дополнительного исследования.*

Задача. Докажите теорему 8.1, воспользовавшись линейностью предела функции.

Следствие 8.1. *Если н.и.* $\int_a^{\to b} g(x)dx$ *сходится, то*
$$\int_a^{\to b} (f(x) + g(x))dx \overset{cx}{\sim} \int_a^{\to b} f(x)dx,$$
т.е. при исследовании сходимости н.и. можно игнорировать слагаемое, дающее заведомо сходящийся н.и.

Задача. Докажите следствие 8.1.

Теорема 8.2. *(аддитивность н.и.) Для любого* $c \in (a, b)$ *справедливо:*
$$\int_a^{\to b} f(x)dx = \int_a^{c} f(x)dx + \int_c^{\to b} f(x)dx.$$

Задача. Докажите теорему 8.2.

Следствие 8.2. *(принцип локализации) Для любого* $c \in (a, b)$ *справедливо:*
$$\int_a^{\to b} f(x)dx \overset{cx}{\sim} \int_c^{\to b} f(x)dx.$$

Замечание. Смысл принципа локализации в том, что сходимость н.и. определяется поведением подынтегральной функции лишь в окрестности особой точки.

Теорема 8.3. *(формула Ньютона-Лейбница) Если функция f непрерывна на $[a, b)$ и Φ – ее произвольная первообразная на $[a, b)$, то*

$$\int_a^{\to b} f(x)dx = \lim_{b' \to b-0} \Phi(b') - \Phi(a)$$

и сходимость НИ равносильна существованию конечного предела $\lim\limits_{b' \to b-0} \Phi(b')$.

Задача. Докажите теорему 8.3.

Теорема 8.4. *(интегрирование по частям) Пусть функции u и v непрерывно дифференцируемы на $[a, b)$. Тогда*

$$\int_a^{\to b} u(x)v'(x)dx = \lim_{b' \to b-0} \left(u(x)v(x)\Big|_a^{b'} \right) - \int_a^{\to b} u'(x)v(x)dx,$$

причем из существования любых двух пределов следует существование третьего и выполняется равенство.

Задача. Докажите теорему 8.4.

Теорема 8.5. *(замена переменной в н.и.) Пусть функция f непрерывна на $[a, b)$, пусть функция φ строго монотонна и непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta)$, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\lim\limits_{t \to \beta-0} \varphi(t) = b$. Тогда*

$$\int_a^{\to b} f(x)dx = \int_\alpha^{\to \beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{8.5}$$

В равенстве (8.5) если один из интегралов сходится, то сходится и другой и их значения совпадают (т.е. формулу можно применять в обе стороны). Может оказаться, что один из двух интегралов в (8.5) собственный.

Доказательство Пусть (для определенности) функция φ строго возрастающая. Рассмотрим функцию верхнего предела интегрирования $F(x) := \int_a^x f(\tau)d\tau$, где $x \in [a, b)$. Поскольку f непрерывна, то $F'(x) = f(x)$ (теорема 6.15). Рассмотрим сложную функцию $\Phi(t) := F(\varphi(t)) = \int_a^{\varphi(t)} f(\tau)d\tau$, где $t \in [\alpha, \beta)$. Производная сложной функции $\Phi'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Значит, по формуле Н-Л для $t \in [\alpha, \beta)$ справедливо тождество

$$\int_a^{\varphi(t)} f(\tau)d\tau = \Phi(t) = \int_\alpha^t f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)d\tau \tag{8.6}$$

поскольку $\varphi(\alpha) = a$. При $t \to \beta - 0$ выполняется $\varphi(t) \to b - 0$. По теореме о пределе сложной функции получаем справедливость равенства (8.5) при чтении справа налево.

Из монотонности функции φ следует существование обратной функции $t = \varphi^{-1}(x)$, у которой $\varphi^{-1}(a) = \alpha$, а $\varphi^{-1}(x) \to \beta - 0$ при $x \to b - 0$. Поэтому, в силу тождества (8.6), для $x \in [a, b)$ справедливо тождество

$$\int_a^x f(\tau)d\tau = \int_\alpha^{\varphi^{-1}(x)} f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)d\tau.$$

По теореме о пределе сложной функции получаем справедливость равенства (8.5) при чтении слева направо. ■

Теорема 8.6. *(критерий Коши сходимости НИ) Пусть функция $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, где $b \leqslant +\infty$, интегрируема на любом отрезке $[a, b'] \subset [a, b]$. Тогда н.и. $\int_a^{\to b} f(x)dx$ сходится тогда и т.т., когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\hookrightarrow\; \exists \delta > 0 : \; \forall b', b'' \in U_\delta(b - 0) \;\hookrightarrow \left| \int_{b'}^{b''} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство сводиться к применению критерия Коши к функции $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Задача. Докажите теорему 8.6.

Замечание. Обычно критерий Коши применяют для доказательства расходимости н.и.

Задача. Сформулируйте критерий Коши расходимости н.и.

Замечание. Если оба конца промежутка интегрирования являются особыми точками, и внутри промежутка имеется **конечное** количество особых точек $c_i \in (a, b)$ $(i = 1, ..., n)$, то между точками $c_0 := a$ и c_1, точками c_1 и c_2, ... , точками c_n и $c_{n+1} := b$ выбирают произвольные точки $d_i \in (c_i, c_{i+1})$ $(i = 0, ..., n)$ и полагают

Определение 8.2.

$$\int_{c_0}^{c_{n+1}} f(x)dx := \int_{\to c_0}^{d_0} f(x)dx + \int_{d_0}^{\to c_1} f(x)dx + ... + \int_{d_n}^{\to c_{n+1}} f(x)dx. \tag{8.7}$$

НИ считается сходящимся, если **все** НИ в правой части равенства (8.7) сходящиеся.

Лемма 8.1. *(корректность определения 8.2) Если все н.и. сходящиеся, то сумма не зависит от выбора точек d_i.*

Доказательство немедленно следует из аддитивности н.и. (теорема 8.2).

8.3. Несобственные интегралы от знакопостоянных функций. Мы говорим, о НИ $\int_a^{\to b} f(x)dx$ от **знакопостоянной** функции, если $f(x) \geqslant 0 (\leqslant)$ в **некоторой** проколотой левой полуокрестности точки $b \leqslant +\infty$. Если же функция f не сохраняет знак **ни в какой** проколотой левой полуокрестности точки b, то имеем НИ от **знакопеременной** функции.

Оказывается причины сходимости НИ от знакопостоянных функций и знакопеременных функций разные. Поэтому мы отдельно рассмотрим сходимость НИ от знакопостоянных функций. **Грубо говоря**, в конечной особой точке

НИ от знакопостоянной функции сходится в том случае, когда в ней функция f "убегает в бесконечность не очень быстро" ; а в бесконечной особой точке НИ от знакопостоянной функции сходится в том случае, когда в ней функция f "достаточно быстро убывает к нулю" (слова, взятые в кавычки, не являются математическими понятиями; см. в конце пункта лемму 8.2, замечание и задачу). Эту идею иллюстрируют примеры (8.2) и (8.3). На самом деле конечная и бесконечная особые точки, что называется, две стороны одной медали:

Задача. Убедитесь, что замена $x = 1/t$ превращает интеграл (8.2) в (8.3).

Теорема 8.7. *(критерий сходимости НИ от знакопостоянной функции) Пусть функция* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$*, где* $b \leqslant +\infty$*, интегрируема на любом отрезке* $[a, b'] \subset [a, b]$*. Пусть функция* f *неотрицательна в некоторой левой проколотой полуокрестности точки* b *(*$\forall x \in (b-\delta, b) \subset [a, b) \hookrightarrow f(x) \geqslant 0$*). Тогда НИ* $\int_a^{\to b} f(x)dx$ *сходится только в том случае, когда функция* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *ограничена на* $[a, b)$*.*

Доказательство. На интервале $(b - \delta, b)$ функция F возрастает (возможно, нестрого). В силу определения (8.1), сходимость данного НИ равносильна существованию **конечного** предела возрастаюшщй функции F. Последнее, в силу теоремы 1.4.4 о пределе монотонной функции, равносильно ограниченности функции F. ■

Сам по себе критерий мало полезен, поскольку проверка ограниченности функции F означает прямое использование определения (8.1). Однако его удобно применять при доказательстве признаков и критериев сходимости, основанных на идее **сравнения сходимостей**.

Теорема 8.8. *(признаки сравнения НИ) Пусть для функций* f *и* g *выполнены условия теоремы 8.7. Тогда:*

1. *Если* $f(x) = O(g(x))$ *при* $x \to b - 0$*, то из сходимости* $\int_a^{\to b} g(x)dx$ *следует сходимость* $\int_a^{\to b} f(x)dx$*, а из расходимости* $\int_a^{\to b} f(x)dx$ *следует расходимость* $\int_a^{\to b} g(x)dx$*.*
2. *Если* $f(x) = O^*(g(x))$ *при* $x \to b - 0$*, то* $\int_a^{\to b} g(x)dx \overset{cx}{\sim} \int_a^{\to b} f(x)dx$*.*
3. *Пусть функция* $f(x)$ *представима в виде произведения* $f(x) = h(x)g(x)$*, причем существует* $\lim\limits_{x\to b-0} h(x) = C > 0$*. Тогда*
$$\int_a^{\to b} h(x)g(x)dx \overset{cx}{\sim} \int_a^{\to b} g(x)dx.$$
(Т.е. при исследовании сходимости н.и. можно игнорировать знакопостоянный множитель, имеющий в особой точке конечный ненулевой предел.)

Доказательство п. 1. В силу принципа локализации (следсвие 8.2) достаточно исследовать н.и. на промежутке $[b - \delta, b)$, где функции f и g неотрицательны. Из условия следует, что на $[b - \delta, b)$ справедлива оценка $0 \leqslant f(x) \leqslant C_1 g(x)$, где постоянная $C_1 > 0$. Из критерия 8.7 следует, что $\int_{b-\delta}^x g(t)dt < C_2$, где постоянная $C_2 > 0$. Поэтому
$$0 \leqslant F(x) = \int_{b-\delta}^x f(t)dt \leqslant C_1 \int_{b-\delta}^x g(t)dt < C_1 C_2.$$

Опять же в силу критерия 8.7, ограниченность функции F влечет сходимость н.и.

Утверждение п. 2 сразу следуют из симметричности отношения O^* и п. 1.

Из условия п. 3 следует выполнение условия п. 2 (докажите!). Что доказывает утверждение п. 3. ■

Задача. Докажите справедливость п. 2 теоремы 8.8 если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to b - 0$.

Чаще всего функцию сравнения берут из двухпараметрического семейства $g(x; \alpha, \beta) = 1/(x^\alpha |\ln x|^\beta)$.

Задача. 1) Докажите, что н.и. $\int_2^{+\infty} dx/(x^\alpha (\ln x)^\beta)$ сходится только при условиях (см. рис. ???)

$$\begin{cases} \alpha > 1, \\ \beta \in \mathbb{R} \end{cases} \bigcup \begin{cases} \alpha = 1, \\ \beta > 1 \end{cases} .$$

2) Докажите, что н.и. $\int_{\to 0}^{1/2} dx/(x^\alpha |\ln x|^\beta)$ сходится только при условиях (см. рис. ???)

$$\begin{cases} \alpha < 1, \\ \beta \in \mathbb{R} \end{cases} \bigcup \begin{cases} \alpha = 1, \\ \beta > 1 \end{cases} .$$

Рис. ??? Рис. ???

В заключение в случае неограниченного интервала сформулируем очевидный достаточный признак расходимости НИ:

Лемма 8.2. *Пусть функция $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ интегрируема на любом отрезке $[a, b']$. Если существует $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = C \neq 0$ (конечный или бесконечный), то НИ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится*

Замечание. Предельное условие $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ **НЕ** является необходимым условием сходимости НИ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ от знакопостоянной функции!

Задача. Дайте пример непрерывной неотрицательной неограниченной на положительной полуоси функции f, для которой н.и. сходится на $\mathbb{R}^+$. (Подсказка: возьмите функцию тождественно равную нулю и добавьте изолированные всплески, которые неограниченно растут, но при этом носитель всплесков сужается "быстрее чем их рост.)

8.4. Несобственные интегралы от знакопеременных функций. Прежде всего заметим, что всякий н.и. $\int_a^{\to b} f(x)dx$ от знакопеременной функции порождает н.и. $\int_a^{\to b} |f(x)|dx$ от знакопостоянной функции. Между сходимостями указанных н.и. существует такая связь:

Теорема 8.9. *(о сходимостях н.и. от данной функции и н.и. от модуля этой функции) Если н.и. $\int_a^{\to b} |f(x)|dx$ сходится, то н.и. $\int_a^{\to b} f(x)dx$ также сходится. Обратное утверждение в общем случае несправедливо.*

Доказательство. Во-первых, напомним, что для собственных интегралов имеет место противоположная логическая связь! Поэтому на любом отрезке $[a, b'] \subset [a, b)$ существует интеграл $\int_a^{b'} |f(x)|dx$. Во-вторых, в силу критерия

Коши (теорема 8.6), для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых $b', b'' \in (b-\delta, b)$ выполняется $|\int_{b'}^{b''} |f(x)|dx| < \varepsilon$. Поэтому

$$\Big|\int_{b'}^{b''} f(x)dx\Big| \leqslant \Big|\int_{b'}^{b''} |f(x)|dx\Big| < \varepsilon.$$

Что, опять же в силу критерия Коши, влечет сходимость н.и. $\int_a^{\to b} f(x)dx$.

В качестве доказательства несправедливости обратного утверждения ниже будет приведен контрпример. ■

Еще раз запишем логические связи между сходимостями.

1. Собственные интегралы:

$$\text{сходимость } \int_a^b f(x)dx \;\Rightarrow\; \text{сходимость } \int_a^b |f(x)|dx.$$

2. Несобственные интегралы:

$$\text{сходимость } \int_a^{\to b} |f(x)|dx \;\Rightarrow\; \text{сходимость } \int_a^{\to b} f(x)dx.$$

Заметим, что**логика оказалась противоположной**.

Утверждение теоремы 8.9 мотивирует введение следующих понятий:

Определение 8.3. (классификация НИ от знакопеременных функций)

1. Если н.и. $\int_a^{\to b} |f(x)|dx$ сходится, то н.и. $\int_a^{\to b} f(x)dx$ (который тем более сходится) называется **абсолютно сходящимся**.
2. Если н.и. $\int_a^{\to b} |f(x)|dx$ расходится, но н.и. $\int_a^{\to b} f(x)dx$ сходится, то последний называется **условно сходящимся**.

Итак, для н.и. от знакопеременной функции возможны три взаимоисключающие ситуации: 1) абсолютная сходимость, 2) условная сходимость, 3) расходимость. (Для н.и. от знакопостоянной функции возможны две ситуации. Какие?)

Исследуя абсолютную сходимость н.и., мы имеем дело со знакопостоянной функцией и применяем признаки сравнения. Для исследования сходимости от знакопеременной функции нужны более тонкие рассуждения. Оказывается, "достаточно быстрое" изменение знака подынтегральной функции (осцилляция) может компенсировать рост модуля функции (амплитуда) и обеспечивать сходимость н.и. Ниже приведены примеры сходящихся и расходящихся н.и., которые иллюстрируют "непростые взаимоотношения" между амплитудой и осцилляцией функции.

Примеры.

1. Расходящиеся НИ

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \int_1^{+\infty} \sin x\; dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin x\; dx}{\sqrt{x}-\sin x}, \quad \int_1^{+\infty} \sqrt{x}\sin x^{3/2}\; dx.$$

2. Сходящиеся НИ

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x\; dx}{\sqrt{x}}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin x\; dx}{\sqrt{x}+\cos x}, \quad \int_1^{+\infty} \sin x^{3/2}\; dx, \quad \int_1^{+\infty} \sqrt{x}\sin x^2\; dx.$$

Основным инструментом доказательство сходимости н.и. от знакопеременной функции является

Теорема 8.10. *(признак Дирихле) Пусть функция f непрерывна на $[a,b)$ ($b \leqslant +\infty$), а функция g непрерывно дифференцируема на $[a,b)$. Пусть*

1. *первообразная $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ – ограниченная (постоянной $C > 0$) на $[a,b)$ функция,*
2. *$g \downarrow 0$ при $x \to b-0$ ($\Leftrightarrow g'(x) \leqslant 0$ на (a,b) и $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = 0$), т.е. функция g стремиться к нулю монотонно убывая.*

Тогда НИ $\int_a^{\to b} f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство. Интегрируя по частям на $[a,b']$ ($a < b' < b$), получаем

$$\int_a^{b'} f(x)g(x)dx = F(x)g(x)\Big|_a^{b'} - \int_a^{b'} F(x)g'(x)dx. \tag{8.8}$$

Из условия теоремы следует, что $\lim\limits_{b'\to b-0} F(b')g(b') = 0$. Исследуем абсолютную сходимость интеграла в правой части равенства:

$$\int_a^{b'} |F(x)g'(x)|dx \leqslant C\int_a^{b'} |g'(x)|dx = C\int_a^{b'} g'(x)dx = C(g(a) - g(b')) \leqslant Cg(a).$$

(Мы воспользовались знакопостоянством функции $g'(x) \leqslant 0$ и знакопостоянством функции $g(x) \geqslant 0$!) Теперь из критерия 8.7 следует сходимость н.и. $\int_a^{\to b} |F(x)g'(x)|dx$, а из теоремы 8.9 абсолютная сходимость н.и. $\int_a^{\to b} F(x)g'(x)dx$. Последняя влечет за собой сходимость н.и. $\int_a^{\to b} F(x)g'(x)dx$. По определению, это означает существование конечного предела

$$\exists \lim_{b'\to b-0}\int_a^{b'} F(x)g'(x)dx = \int_a^{\to b} F(x)g'(x)dx \in \mathbb{R}.$$

Значит, в равенстве (8.8) в правой части мы получаем конечный предел при $b' \to b - 0$. Что доказывает теорему. ■

Из признака Дирихле вытекает

Теорема 8.11. *(признак Абеля; Нильс Хенрик Абель 1802-1829) Пусть на $[a,b)$ ($b \leqslant +\infty$) функция f непрерывна, а функция g непрерывно дифференцируема. Пусть:*

1. *НИ $\int_a^{\to b} f(x)dx$ сходится;*
2. *на (a,b) функция $g(x)$ ограничена, а ее производная $g'(x)$ не меняет знак.*

Тогда НИ $\int_a^{\to b} f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство. Функция f имеет на $[a,b)$ первообразную $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Поскольку существует **конечный** предел $\lim\limits_{x\to b-0} F(x) = \int_a^{\to b} f(x)dx \in \mathbb{R}$, функция F на $[a,b)$ ограничена. С другой стороны, в силу монотонности и ограниченности, функция g имеет конечный предел $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = c \in \mathbb{R}$. Значит, функция $\tilde{g}(x) := g(x) - c$ непрерывно дифференцируема, монотонна и $\tilde{g} \to 0$ при $x \to b - 0$. Функции f и $\tilde{g}$ удовлетворяют условиям признака Дирихле. Поэтому НИ $\int_a^{\to b} f(x)\tilde{g}(x)dx$ сходится. Следовательно НИ $\int_a^{\to b} f(x)g(x)dx = \int_a^{\to b} f(x)\tilde{g}(x)dx + c\int_a^{\to b} f(x)dx$ тоже сходится. ■

Замечание. Образно говоря, в признаке Дирихле и н.и. $\int_a^{\to b} f(x)dx$ от осциллирующей функции f, и н.и. $\int_a^{\to b} g(x)dx$ от стремящейся к нулю знакопостоянной функции g "почти сходятся"; в произведении fg они "помогают" друг другу. В признаке Абеля н.и. от функции f сходится, а функция-сомножитель g "не мешает" функции f.

Примеры. В задачах на признак Дирихле обычно f функция типа синус. См. первый пример из п. 2 выше. В некоторых случаях приходится применять разложение по формуле Маклорена по степеням $1/x^\varepsilon$ с $\varepsilon > 0$ (второй пример п. 2 и третий пример п 1). В примерах три и четыре из п. 2 нужно сделать замену: аргумент под знаком синуса объявить новой переменной.

Если не удается найти первообразную функции h, подынтегральное выражение умножают и делят на производную h' (естественно, если она не обращается в ноль!). Затем в качестве функции f берут функцию $h(x)h'(x)$, первообразная которой находится без труда.

Пример ???

Если подынтегральная функция зависит от параметра α и требуется исследовать сходимость НИ в зависимости от этого параметра, полное исследование сходимости состоит из четырех этапов:

1. Игнорируя осциллирующий сомножитель, отгадывают такой промежуток I_1, что при $\alpha \in I_1$ н.и. сходится абсолютно (с доказательством методом сравнения).
2. Выделяя осциллирующий сомножитель и монотонно убывающий сомножитель, отгадывают такой промежуток I_2, что при $\alpha \in I_2$ н.и. сходится (с доказательством по теореме Дирихле или по теореме Абеля). Обязательно $I_1 \subset I_2$.
3. Доказывают, что при $\alpha \in I_2 \setminus I_1$ отсутствует абсолютная сходимость (методом сравнения снизу).
4. Доказывают, что при $\alpha \in \mathbb{R} \setminus I_2$ отсутствует сходимость (с помощью отрицания критерия Коши).
5. Записывают ответ: при $\alpha \in I_1$ – абсолютная сходимость, при $\alpha \in I_2 \setminus I_1$ – условная сходимость, при $\alpha \in \mathbb{R} \setminus I_2$ – н.и. расходится.

Сложность полного исследования прежде всего в том, что ответ отгадывается. А уже потом доказывается верность гипотезы. В заключение докажем нетрудное и полезное утверждение

Лемма 8.3. *(об абсолютной и условной сходимости н.и., полученного из суммы двух функций)*

1. *Если н.и.* $\int_a^{\to b} f(x)dx$ *и* $\int_a^{\to b} g(x)dx$ *сходятся абсолютно, то н.и.* $\int_a^{\to b}(f(x) + g(x))dx$ *тоже сходится абсолютно.*
2. *Если н.и.* $\int_a^{\to b} f(x)dx$ *сходится абсолютно, а н.и.* $\int_a^{\to b} g(x)dx$ *сходится условно, то н.и.* $\int_a^{\to b}(f(x) + g(x))dx$ *сходится условно.*

3. *Если н.и.* $\int_a^{\to b} f(x)dx$ *и* $\int_a^{\to b} g(x)dx$ *сходятся условно, то н.и.* $\int_a^{\to b}(f(x)+g(x))dx$ *сходится. Характер сходимости (абсолютный или условный) нуждается в дополнительном исследовании.*

Доказательство. Первое утверждение следует из неравенства треугольника $|f+g| \leqslant |f|+|g|$ и признака сравнения н.и. от знакоопределенных функций (теорема 8.8). Во втором пункте интеграл от суммы сходится (в силу линейности н.и., теорема 8.1). Если допустить, что он сходится абсолютно, то тогда (согласно п. 1) н.и. $\int_a^{\to b} g(x)dx = \int_a^{\to b}(f(x)+g(x))dx - \int_a^{\to b} f(x)dx$ тоже сходится абсолютно, что противоречит условию. Для доказательства п. 3 достаточно привести примеры. ■

Задача. Приведите примеры условной и абсолютной сходимости суммы двух условно сходящихся н.и.

§ 9. Числовые ряды

Формально теория числовых рядов (ЧР) – часть теории числовых последовательностей. Однако представление последовательности в виде суммы оказалось столь плодотворным, что получило распространение на многомерный и бесконечномерный случаи. Функциональные ряды (Тейлора, Фурье и др.) – это далекие обобщения числовых рядов. Возможно, причина в том, что ряды удобно применять в методе последовательных приближений.

9.1. Сходимость числового ряда.

Определение 9.1. Пусть задана числовая последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$.

1. Символ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется **числовым рядом** или просто **рядом**. Слагаемое a_k называют **членом** или **общим членом** этого ряда.
2. Число $S_n = a_1 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ называется n-й **частичной суммой ряда**.
3. **Суммой ряда** называется предел частичных сумм
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$
который обозначают тем же символом, что и ряд.
4. Ряд называют **сходящимся**, если сумма ряда (т.е. предел!) существует и **конечна**. В противном случае ряд называют **расходящимся**.

Замечание 1. Частичные суммы S_n образуют новую числовую последовательность, порожденную данной. Обратно, если дана последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, то ее всегда (и не единственным способом!) можно представить в виде частичных сумм. Например, так:

$$b_n = b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+...+(b_n-b_{n-1}), \text{ т.е. } a_1 = b_1, a_k = b_{k+1}-b_k \text{ при } k \geqslant 2.$$

Замечание 2. Основной задачей теории рядов является задача сходимости ряда. Найти значение суммы ряда (если он сходится) удается только в исключительных случаях.

Замечание 3. Обращаем внимание, что теория числовых рядов аналогична теории несобственных интегралов с особенностью в точке $+\infty$. Дело в том, что ряд можно представить как н.и. от **ступенчатой функции**.

Задача. Представьте ряд как н.и., т.е. определите функцию f в равенстве $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \int_0^{\infty} f(x)dx$.

Примеры 1) Ряд $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + ...$ сходится. 2) Ряд $1-1+1-1+...$ расходится. 3) Ряд $1 + q + q^2 + q^3 + ...$ (сумма геометрической прогрессии) сходится только в том случае, когда $|q| < 1$.

Задача. Пользуясь определением ряда, обоснуйте примеры. Найдите суммы рядов 1 и 3.

Теорема 9.1. *(необходимое условие сходимости ряда) Если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю:*
$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ \lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Доказательство. Из условия

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0. \ \blacksquare$$

Задача. Попробуйте сформулировать аналог теоремы 9.1 для несобственных интегралов и докажите его.

Замечание. Сформулированное условие не является достаточным, что подтверждает

Контрпример. **Гармонический ряд** $1 + 1/2 + 1/3 + ...$ расходится. Допустим противное, тогда частичные суммы S_n и S_{2n} имели бы один и тот же конечный предел, а их разность стремилась бы к нулю. Но

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \not\to 0.$$

Теорема 9.2. *(критерий Коши сходимости ряда) Ряд сходится тогда и т.т., когда выполняется условие Коши*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n > N \ \forall p \in \mathbb{N} \ \hookrightarrow \ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Записан критерий сходимости Коши для последовательности S_n. $\blacksquare$

Задача. 1) Убедитесь, что записан критерий Коши для последовательности S_n. 2) Докажите необходимое условие сходимости (теорема 9.1) с помощью критерия Коши. 3) Докажите расходимость гармонического ряда с помощью критерия Коши.

При исследовании сходимости числовых рядов используют следующие свойства.

Лемма 9.1. *(принцип локализации) Для любого натурального m ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Для любого натурального $n > m$ справедливо

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m-1} a_k + \sum_{k=m}^{n} a_k = const + \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

Переходя к пределу при $n \to +\infty$, получим утверждение леммы. $\blacksquare$

Лемма 9.2. *(линейность) Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k)$, составленный из линейных комбинация общих членов, тоже сходится.*

Доказательство. Речь идет о сходимости частичных сумм

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Суммы в правой части равенства сходятся по условию. Следовательно, сходится и сумма в левой части. $\blacksquare$

Полезное

Следствие 9.1. *Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ расходятся, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ расходится.*

Задача. Докажите следствие.

9.2. Знакопостоянные ряды. Ряд, все члены которого, начиная с некоторого номера, не меняют знака, называется знакопостоянным. В силу принципа локализации мы считаем, что все члены ряда неотрицательные.

Теорема 9.3. *(критерий сходимости ряда с неотрицательными членами) Сходимость ряда с неотрицательными членами равносильна ограниченности его частичных сум: $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k < +\infty$.*

Доказательство. Последовательность S_n частичных сумм неубывающая (обоснуйте!). Поэтому всегда существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sup_n S_n \leqslant +\infty$. ■

Теорема 9.4. *(признаки сравнения) Пусть последовательности a_k и b_k неотрицательны. Тогда:*

1. *если $a_n = O(b_n)$ при $n \to \infty$, то из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, или, что равносильно, из расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ следует расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ (в частности, утверждение справедливо, если $a_n = o(b_n)$);*
2. *если $a_n = O^*(b_n)$ при $n \to \infty$, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \overset{cx}{\sim} \sum_{k=1}^{\infty} b_k$, т.е. ряды сходятся или расходятся одновременно (в частности, утверждение справедливо, если $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$).*

Доказательство п. 1. В силу критерия сходимости неотрицательных рядов (теорема 9.3), частичные суммы $\sum_{k=1}^{n} b_k$ равномерно ограничены сверху по всем n. Из определения отношения O следует, что существует неотрицательныя постоянная C, что $0 \leqslant a_n \leqslant Cb_n$. Следовательно, частичные суммы $\sum_{k=1}^{n} a_k$ также ограничены сверху. Откуда, опять же в силу теоремы 9.3, следует искомая сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Доказательство п. 2 вытекает из симметричности отношения O^*. ■

Из п. 2 вытекает

Следствие 9.2. *Пусть последовательности a_k и b_k положительны и пусть существует конечный $\lim\limits_{k\to\infty}(a_k/b_k) = C > 0$. Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \overset{cx}{\sim} \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.*

Теорема 9.5. *(интегральный признак сходимости ряда) Пусть функция f нестрого убывает к нулю на промежутке $[1, +\infty)$. Тогда сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ равносильна сходимости н.и. $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.*

Доказательство. В силу монотонности, имеют место двусторонние оценки (см. рис. ???)

$$0 \leqslant f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)dx \leqslant f(k).$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) = \sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant \int_1^n f(x)dx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k). \tag{9.1}$$

Из равносильности $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \overset{cx}{\sim} \sum_{k=2}^{\infty} f(k)$ и двусторонней оценки (12.1) следует утверждение теоремы. ■

Рис. ???

Пример. Применяя интегральный признак, докажите, что ряд $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}(\ln k)^{\beta}}$ сходится только при условии

$$\begin{cases} \alpha > 1, \\ \beta \in \mathbb{R} \end{cases} \bigcup \begin{cases} \alpha = 1, \\ \beta > 1 \end{cases}.$$

Рассмотрим геометрическую прогрессию $b_k = q^k$ с положительным показателем q. Мы знаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится только при $q < 1$. Заметим, что $q = b_{k+1}/b_k = \sqrt[k]{b_k}$. Эти наблюдения лежат в основе сравнительных признаков Даламбера и Коши.

Теорема 9.6. *(Жан Лерон Д'Аламбер, 1717-1883) Пусть $a_k > 0$. Тогда:*

1. *если $a_{k+1}/a_k \leqslant q < 1$ при $k \geqslant k_0 \in \mathbb{N}$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;*
2. *если $a_{k+1}/a_k \geqslant 1$ при $k \geqslant k_0 \in \mathbb{N}$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.*

Доказательство п. 1. В силу принципа локализации (лемма 9.1), можно считать, что $k_0 = 1$. Из условия индукцией получаем:

$$a_2 \leqslant qa_1, \ a_3 \leqslant qa_2 \leqslant q^2 a_1, \ \dots, \ a_k \leqslant qa_{k-1} \leqslant q^{k-1}a_1.$$

Значит, $a_k = O(q^{k-1})$ при $k \to \infty$. Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится, то, в силу п.1 теоремы 9.4, данный рад также сходится.

Доказательство п. 2. Из условия: $a_{k+1} \geqslant a_k \geqslant \dots \geqslant a_1 > 0$. Значит, не выполнено необходимое условие сходимости ряда (теорема 9.1). ■

Следствие 9.3. *(признак Даламбера в предельной форме) Пусть $a_k > 0$ и существует конечный $\lim\limits_{k\to\infty}(a_{k+1}/a_k) = q_D \in \mathbb{R}$. Тогда:*

1. *если $0 \leqslant q_D < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;*
2. *если $q_D > 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.*

Доказательство п. 1. Для любого числа $q' \in (q_D, 1)$ найдется такой номер $K \in \mathbb{N}$, что для больших номеров $k > K$ выполняется $a_{k+1}/a_k \leqslant q'$ (обоснуйте существование K!). Остается сослаться на п. 1 теоремы 9.6.

Доказательство п. 2. В этом случае для всех больших номеров справедливо $a_{k+1}/a_k \geqslant 1$, и ряд расходится согласно п. 2 теоремы 9.6. ■

Замечание. При $q_D = 1$ ЧР может как сходиться, так и расходиться.

Примеры. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. Но во всех случаях предел $q_D = 1$.

Теорема 9.7. *(признак сходимости Коши) Пусть $a_k \geqslant 0$. Тогда:*

1. *если $\sqrt[k]{a_k} \leqslant q < 1$ при $k \geqslant k_0 \in \mathbb{N}$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;*
2. *если $\sqrt[k]{a_k} \geqslant 1$ при $k \geqslant k_0 \in \mathbb{N}$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.*

Доказательство п. 1. В силу принципа локализации (лемма 9.1), можно считать, что $k_0 = 1$. Поскольку $a_k \leqslant q^k$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится согласно признаку сравнения.

Доказательство п. 2. Из условия: $a_k \geqslant 1$. Значит, не выполнено необходимое условие сходимости ряда (теорема 9.1). ■

СЛЕДСТВИЕ 9.4. *(признак Коши в предельной форме) Пусть* $a_k \geqslant 0$ *и существует конечный* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = q_C \in \mathbb{R}$. *Тогда:*

1. *если* $0 \leqslant q_C < 1$, *то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится;*
2. *если* $q_C > 1$, *то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

Доказательство аналогично доказательству следствия 9.3

Задача. Докажите следствие 9.4.

Замечание. При $q_C = 1$ ЧР может как сходиться, так и расходиться.

Примеры. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. Но во всех случаях предел $q_C = 1$.

Замечание. В предыдущих примерах предел по Коши совпал с пределом по Даламберу: $q_C = q_D$. Оказывается, если существует $q_D \in \mathbb{R}$, то существует $q_C = q_D$ (доказательство этого утверждения нетривиально и основано на теореме Коши о пределе последовательности средних арифметических). Значит, признак Коши сильнее ("тоньше"), чем признак Даламбера в следующем смысле: если сходимость ряда можно доказать с помощью признака Даламбера, то его можно доказать и с помощью признака Коши. Но не наоборот!

Контрпример. Рассмотрим ЧР

$$a + ab + a^2b + a^2b^2 + a^3b^2 + a^3b^3 + ... + a^nb^{n-1} + a^nb^n \;\; a > 0, b > 0.$$

Отношение элементов зависит от четности номера: оно равно или a, или b. Значит, предел q_D отсутствует. Если оба числа меньше единицы, то по теореме 9.6 ряд сходится. Если оба числа больше единицы – ряд расходится. Если же одно число больше единицы, а второе меньше, то признак Даламбера бессилен. Корень k-й степени из элемента равен или $a^{k/(2k-1)}b^{(k-1)/(2k-1)}$, или $a^{1/2}b^{1/2}$. В любом случае существует **предел** $q_C = \sqrt{ab}$. Следовательно, по Коши, ряд сходится, если $\sqrt{ab} < 1$, и расходится, если $\sqrt{ab} > 1$. Итак, предельный признак Даламбера для исследуемого ряда неприменим. Результат, полученный с помощью предельного признака Коши оказался сильнее, чем результат, полученный с помощью признака Даламбера.

9.3. Знакопеременные ряды. Для исследования сходимости знакопеременных рядов применяются признаки Дирихле и Абеля, аналогичные одноименным признакам сходимости н.и. При этом роль интегрирования по частям играет **дискрестное преобразование Абеля=суммирование по частям** числовых сумм: пусть $n, p \in \mathbb{N}$, $A_k := \sum_{i=1}^{k} a_i$, тогда

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} A_{k-1} b_k =$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} A_k b_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} A_k b_{k+1} = (A_{n+p}b_{n+p} - A_n b_{n+1}) - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k (b_{k+1} - b_k). \quad (9.2)$$

Замечание. Роль первообразной "функции" $a(k) := a_k$ играет сумма A_k, а роль производной функции $b(k) := b_k$ играет разность $b_{k+1} - b_k$. При этом приращение аргумента равно $(k+1) - k = 1$.

Теперь нетрудно переформулировать и доказать

Теорема 9.8. *(дискретный признак Дирихле) Пусть последовательность A_k частичных сумм равномерно ограничена:*

$$\exists C > 0 : \forall k \in \mathbb{N} \ \hookrightarrow \ |A_k| \leqslant C,$$

а последовательность b_k монотонно (вообще говоря, нестрого) стремится к нулю: $b_k \downarrow 0$. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

Доказательство. Применим критерий Коши. Из условия следует неотрицательность общего члена $b_k \geqslant 0$ и разности $b_k - b_{k+1} \geqslant 0$. Из первого условия теоремы и формулы (9.2) получаем:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leqslant C \left(b_{n+p} + b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (b_k - b_{k+1}) \right) =$$

$$C(b_{n+p} + b_{n+1} + b_{n+1} - b_{n+p}) = 2Cb_{n+1} \to 0 \text{ при } n \to \infty. \blacksquare$$

Теорема 9.9. *(дискретный признак Абеля) Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а последовательность b_k монотонна (вообще говоря, нестрого)и ограничена. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.*

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что последовательность b_k убывает. Тогда (в силу ограниченности последовательности b_k) существует конечный $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = B$. Поэтому последовательность $b'_k := b_k - B \downarrow 0$. Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, его частичные суммы ограничены. Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b'_k$, в силу признака Дирихле, сходится. Но $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b'_k + B \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, где оба ряда справа сходятся. Значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ тоже сходится. $\blacksquare$

Следствие 9.5. *(признак Лейбница) Пусть $b_k \downarrow 0$. Тогда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k$ сходится. Т.е., **знакочередующийся ряд**, общий член которого монотонно стремится к нулю, сходится.*

Доказательство. Возьмем $a_k := (-1)^k$ и применим признак Дирихле.

Задача. Проверьте выполнение условий признака Дирихле и завершите доказательство признака Лейбница.

Задача. Докажите, что для остатка ряда Лейбница $r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k b_k$ имеет место оценка $|r_n| \leqslant b_{n+1}$. Т.е. модуль остатка ряда ограничен своим первым членом. (Указание: рассмотрите отдельно последовательность частичных сумм S_{2n} с четными индексами и сумм S_{2n-1} с нечетными и убедитесь, что первая последовательность невозрастающая, а вторая неубывающая).

Пример. Гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k)$ расходится, а ряд Лейбница $\sum_{k=1}^{\infty} ((-1)^k/k)$ сходится. Причем модуль его остатка $|r_n| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} ((-1)^k/k)| < 1/(n+1)$.

9.4. Перестановки слагаемых в рядах и перемножение рядов. Поскольку ряд содержит бесконечное количество слагаемых, на ряды в полной мере не переносится свойство престановочности (коммутативность) слагаемых и распределительное свойство (дистрибутивность) умножения по сложению. Однако для абсолютно сходящихся рядов (см. ниже) эти свойства сохраняются.

Определение 9.2. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется **абсолютно сходящимся** (а.с.р.), если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Сходящийся ряд, который не сходится абсолютно, называется **условно сходящимся** (у.с.р.).

Теорема 9.10. *(о сходимости а.с.р.) А.с.р. сходится.*

Доказательство сразу следует из оценки $|\sum_{k=n}^{n+p} a_k| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} |a_k|$ и критерия Коши. ■

Замечание. В обратную сторону утверждение в общем случае неверно: см. пример с гармоническим рядом и рядом Лейбница.

Из теоремы 9.10 следует, что знакопеременные ряды бывают трех видов: абсолютно сходящиеся, условно сходящиеся, расходящиеся. Очевидно, что у знакопостоянного ряда понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают. Знакопостоянные ряды бывают двух видов (каких?).

Сформулируем нетрудные и полезные при исследовании сходимости утверждения:

Лемма 9.3. *(об абсолютной и условной сходимости ряда, составленного из суммы общих членов двух рядов)*

1. *Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся абсолютно, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ тоже сходится абсолютно.*
2. *Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится условно, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ сходится условно.*
3. *Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся условно, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ сходится. Характер сходимости (абсолютный или условный) нуждается в дополнительном исследовании.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 8.3.
Задача. Докажите лемму 9.3.

Перейдем к перестановкам слагаемых в ряде $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Определение 9.3. Пусть $K : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – биекция множества натуральных чисел. Рассмотрим последовательность $b_i := a_{K(i)}$. Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_{K(i)}$ называют рядом **с переставленными членами** по отношению к исходному ряду $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Замечание. Поскольку K биекция, то существует обратная биекция $I := K^{-1}$, причем исходный ряд получается перестановкой членов с помощью биекции I из ранее полученного ряда: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_{I(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{K(I(k))}$.

Начнем с исследования перестановок членов **всюду неотрицательного** ряда, т.е. для всех $k \in \mathbb{N}$ выполняется $a_k \geqslant 0$. Понятно, что такой ряд в частности знакопостоянный.

Лемма 9.4. *(о сходимости всюду неотрицательного ряда с переставленными членами) Если всюду неотрицательный ряд сходящийся, то ряд с переставленными членами тоже сходящийся. При этом их суммы совпадают.*

Доказательство. Обозначим $\max(K,n) = \max\{K(1),...,K(n)\} \in \mathbb{N}$. Очевидно $\max(K,n) \geqslant n$. Поскольку ряд всюду неотрицательный, то справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \sum_{i=1}^{n} a_{K(i)} \leqslant \sum_{k=1}^{\max(K,n)} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \tag{9.3}$$

В самом деле, все слагаемые, содержащиеся в левой сумме, обязательно присутствуют в следующей сумме справа; при этом добавляются только неотрицательные слагаемые. Из критерия сходимости знакопостоянного ряда (теорема 9.3) следует сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty} a_{K(i)}$. Более того, из оценки (9.3) следует предельная оценка

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_{K(i)} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

С другой стороны, исходный ряд $\sum_{i=k}^{\infty} a_k$ получается перестановкой членов ряда $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ с помощью биекции I. Поэтому справедлива обратная оценка

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_{I(k)} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} b_i,$$

что доказывает совпадение сумм. ■

Прежде чем исследовать перестановки членов знакопеременного ряда, представим его как разность двух всюду неотрицательных рядов. Обозначим

$$a_k^+ := \frac{a_k + |a_k|}{2}, \quad a_k^- := \frac{|a_k| - a_k}{2}.$$

Числа a_k^+, a_k^- называют **положительной и отрицательной частями члена** a_k. Ясно, что $a_k^+, a_k^- \geqslant 0$, $a_k = a_k^+ - a_k^-$, $|a_k| = a_k^+ + a_k^-$ и

$$a_k^+ = \begin{cases} a_k, \text{ если } a_k \geqslant 0, \\ 0, \text{ если } a_k < 0; \end{cases} \qquad a_k^- = \begin{cases} 0, \text{ если } a_k > 0 \\ -a_k, \text{ если } a_k \leqslant 0. \end{cases}$$

Замечание. Таким образом, мы имеем **три** ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$, нумерации которых согласованы.

Лемма 9.5. *(о сходимости ряда и его положительной и отрицательной частей)*

1. *Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится абсолютно тогда и т.т., когда сходятся оба ряда $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^+$ и $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^-$.*
2. *Если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится условно, то оба ряда $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^+$ и $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^-$ расходятся. При этом $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^+ = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^- = +\infty$.*

Доказательство п. 1. Поскольку $0 \leqslant a_i^+ \leqslant |a_i|$ и $0 \leqslant a_i^- \leqslant |a_i|$, то из сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ следует сходимость рядов $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^+$ и $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^-$. Обратно, если оба ряда $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{\pm}$ сходятся, то ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^+ + a_i^-)$$

тоже сходится (линейность сходимости, лемма 9.2).

Доказательство п. 2. Если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится условно, то оба ряда $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{\pm}$ не могут одновременно сходится (см. рассуждение выше). Но если один из них сходится, а другой расходится, то их разность $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i^+ - a_i^-) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ расходится (см. следствие 9.1), что протворечит условию. Остается единственная возможность – оба ряда расходятся. Но, поскольку они оба неотрицательные, их суммы равны $+\infty$. ■

Теперь мы можем доказать утверждение леммы 9.4 для а.с.р.

Теорема 9.11. *(о сходимости а.с.р. с переставленными членами) Если ряд сходится абсолютно, то и ряд с переставленными членами сходится абсолютно. При этом их суммы совпадают. В "школьной" формулировке: при перестановке слагаемых а.с.р. сумма не меняется.*

Доказательство. Во-первых, поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ всюду неотрицательный, из его сходимости следует сходимость ряда $\sum_{i=1}^{n} |a_{K(i)}|$ (лемма 9.4). Откуда (теорема 9.10) следует сходимость исследуемого ряда $\sum_{i=1}^{\infty} a_{K(i)}$.

Остается доказать совпадение сумм. Заметим, что при перестановке членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ возникает согласованная по номерам перестановка членов рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\pm}$. Причем суммы последних при перестановке не меняются:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \sum_{i=1}^{\infty} a_{K(i)}^+, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \sum_{i=1}^{\infty} a_{K(i)}^-.$$

В самом деле, каждый из этих рядов всюду неотрицательный и к рядам с переставленными членами применима лемма 9.4. Теперь получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^+ - a_k^-) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{K(i)}^+ - \sum_{i=1}^{\infty} a_{K(i)}^- = \sum_{i=1}^{\infty}(a_{K(i)}^+ - a_{K(i)}^-) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{K(i)}. \blacksquare$$

Если же ряд сходится условно, то перестановкой его слагаемых можно добиться любого эффекта: 1) сходимости к выбранному наперед числу, 2) сходимости к $\pm\infty$, 3) частичные суммы не имеют предела. Докажем первое утверждение.

Теорема 9.12. *(Римана) Если ряд сходится условно, то для любого числа $A \in \mathbb{R}$ существует такая перестановка членов, что полученный ряд будет сходится к A.*

Доказательство основано на двух наблюдениях: 1) поскольку ряд сходится, его общий член $a_k \to 0$ при $k \to \infty$ (теорема 9.1); 2) положительная и отрицательная части ряда стремятся к бесконечности (п. 2 леммы 9.5). Договоримся, что член ряда a_k мы заменяем на равный ему a_k^+, если он неотрицательный, и на равный ему $-a_k^-$, если он отрицательный:

$$a_k = \begin{cases} a_k^+, \text{ если } a_k \geqslant 0, \\ -a_k^-, \text{ если } a_k < 0. \end{cases}$$

Наглядно предложенную замену членов ряда проиллюстрируем следующей записью

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \overbrace{a_1 + ... + a_i + ... + a_m}^{a_1^+ + ... + a_i^+ + ... + a_m^+} + \underbrace{a_{m+1} + ... + a_l}_{-a_{m+1}^- - ... - a_l^-} + \overbrace{a_{l+1} + ...}^{a_{l+1}^+ ...}$$

Приступим к формированиию ряда с переставленными членами, который сходится к числу A. Пусть (для определенности) $0 \leqslant a_1 < A$. Будем складывать **подряд** находящиеся сверху члены ряда (т.е. неотрицательные) до тех пор, пока **впервые** для частичной суммы выполнится оценка **сверху** $a_1^+ + ... + a_i^+ \geqslant A$. Если стоящих рядом верхних слагаемых не хватит, то будем пропускать (в конечном количестве!) нижние слагаемые и продолжим наращивать сумму верхними слагаемыми до получения указанной оценки сверху. Первый этап закончен. Затем прервем серию верхних слагаемых и будем прибавлять нижние (т.е. отрицательные) слагаемые начиная с самого левого, подряд и до тех пор, пока впервые выполнится оценка **снизу**: $a_1^+ + ... + a_i^+ + (-a_{m+1}^-) + ... + (-a_j^-) \leqslant A$. Второй этап закончен. Затем вернемся к самому левому верхнему слагаемому, **перед** которым была прервана серия верхних слагаемых, и доберем подряд верхние слагаемые опять до получения оценки сверху на A. И т.д. Предложенный алгоритм будет продолжаться бесконечно, поскольку суммы слагаемых сверху и снизу бесконечны. При этом каждый из членов исходного ряда будет использован в точности один раз. Так мы получаем ряд с переставленными членами $b_i := a_{K(i)}$.

Поскольку $K : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ биекция, то

$$\forall N \in \mathbb{N}\ \exists J = J(N) \in \mathbb{N} :\ \forall i \geqslant J\ \hookrightarrow\ K(i) \geqslant N,$$

т.е. все номера $K(i)$ становятся сколь угодно большими, начиная с некоторого номера $i = J$. Поскольку общий член ряда стремится к нулю, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall k \geqslant N\ \hookrightarrow\ |a_k| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists J = J(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ \forall i \geqslant J(\varepsilon)\ \hookrightarrow\ |a_{K(i)}| < \varepsilon,$$

т.е. все члены последовательности $b_i = a_{K(i)}$ становятся сколь угодно малыми, начиная с некоторого номера $i = J(\varepsilon)$. В силу построения последовательности $K(i)$, существует такой номер $J' = J'(\varepsilon) \geqslant J(\varepsilon)$, что $(A - a_{J'})(A - a_{J'+1}) \leqslant 0$, т.е. номер J' завершает очередную серию знакопостоянных слагаемых. Тогда для всех последующих номеров $n \geqslant J' + 1$ справедлива оценка: $|A - \sum_{i=1}^{n} a_{K(i)}| \leqslant |a_{K(J'+1)}| < \varepsilon$. Значит, сумма ряда с переставленными членами равна $\sum_{i=1}^{\infty} a_{K(i)} = A$. ■

Замечание. У данного ряда и построенного ряда с переставленными элементами порядок неотрицательных слагаемых не изменился, и порядок отрицательных слагаемых не изменился. Если сгруппировать члены построенного ряда по указанным этапам и сложит сгруппированные слагаемые одного знака, то получим знакочередующийся ряд Лейбница.

Задача. Докажите теорему Римана для $A = +\infty$.

В заключение раздела рассмотрим перемножение двух а.с.р. Обозначим через

$$\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2, \quad \Lambda(k) = (\lambda_1(k), \lambda_2(k)) = (i_k, j_k)$$

биекцию множества натуральных чисел в множество всех пар натуральных чисел. Такие биекции существуют (их даже бесконечное множество), поскольку множество $\mathbb{N}^2$ счетно. "Координатные" отображения $\lambda_1, \lambda_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ не являются биекциями, но обязательно являются сюръекциями (накрытиями).

Теорема 9.13. *(о перемножении а.с.р.) Пусть ряды* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *абсолютно сходящиеся. Тогда для любой биекции* Λ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i_k} b_{j_k}$ *абсолютно сходится, а его сумма равна произведению "сомножителей":*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{i_k} b_{j_k} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} b_j.$$

Замечание. Сумма $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i_k} b_{j_k}$ содержит все возможные попарные произведения $a_i b_j$, причем по одному разу. Если взять другую биекцию Λ', то получится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i'_k} b_{j'_k}$ с переставленными членами.

Доказательство. Обозначим

$$\max(\lambda_1, n) = \max\{i_1, ..., i_n\}, \quad \max(\lambda_2, n) = \max\{j_1, ..., j_n\}.$$

Справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{i_k} b_{j_k}| \leqslant \sum_{i=1}^{\max(\lambda_1,n)} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{\max(\lambda_2,n)} |b_j| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| < +\infty.$$

Следовательно ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i_k} b_{j_k}$ абсолютно сходящийся. Поэтому его сумма не зависит от перестановки членов, т.е. от выбора биекции Λ. Выберем из всех биекций Λ самую "удобную" и для нее вычислим сумму $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i_k} b_{j_k}$. Расположим все возможные попарные произведения $a_i b_j$ в виде бесконечной вправо и вниз матрицы с индексами (i, j) по строкам и столбцам (см. рис. ???). Биекцию Λ определим по методу квадратов. В этом случае

$$\sum_{k=1}^{n^2} a_{i_k} b_{j_k} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Рис. ???

Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем, что **под**последовательность S_{n^2} частичных сумм сходится к пределу $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=1}^{\infty} b_j$. Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i_k} b_{j_k}$ сходящийся, то последовательность его частичных сумм сходится к тому же числу. ■

9.5. Последоватеьности и ряды с комплексными членами. В теории степенных рядов мы не сможем обойтись без комплексных чисел. Поэтому дадим схему теории пределов и рядов в $\mathbb{C}$.

Определение 9.4. Последовательность $\{z_n\} = \{(x_n+iy_n)\}$ называется **сходящейся**, если существует комплексное число $z_0 = x_0+iy_0$ такое, что $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$. Число z_0 называют **пределом последовательности** $\{z_n\}$ и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ или $z_n \to z_0$ при $n \to \infty$.

Поскольку

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \leqslant |x_n - x_0| + |y_n - y_0|,$$

сходимость $z_n \to z_0$ равносильна сходимости каждой из двух последовательностей действительных чисел: $x_n \to x_0$ и $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$. Это свойство позволяет перенести на последовательности комплексных чисел все утверждения о последовательностях действительных чисел, которые не связаны с отношением порядка (на комплексной прямой $\mathbb{C}$ линейной упорядоченности нет!).

Определение 9.5. Символ $z_1+z_2+z_3+... = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$ называется **числовым рядом с комплексными членами**.

На ряды с комплексными членами переносятся такие понятия: общий член ряда, частичная сумма, сходимость, сумма ряда, абсолютная сходимость. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится (абсолютно сходится) тогда и т.т., когда сходится (абсолютно сходится) каждый из рядов $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$. На ряды с комплексными членами переносятся все утверждения о рядах из п. 9.1, признаки сходимости Дирихле и Абеля (п. 9.3) для рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ при условии, что $a_k \in \mathbb{C}$, $b_k \in \mathbb{R}$, все утверждения из п. 9.4, относящиеся к абсолютно сходящимся рядам.

§ 10. Функциональные последовательности и ряды

Теория функциональных последовательностей (ФП) и функциональных рядов (ФР) – это далекое обобщение теории числовых последовательлльностей и рядов. ФП во многих отношениях аналогична последовательности точек в конечномерном пространстве. Однако функция (в отличие от абстрактной точки) имеет внутренние свойства (монотонность, экстремумы, ...). Возникают нетривиальные связи между свойствами функций из ф.п. и сходимостью этой ф.п.

10.1. Определение равномерной сходимости. Обозначим через $X \subset \mathbb{R}^k$ некоторое фиксированное подмножество. Пусть каждому натуральному $n \in \mathbb{N}$ соответствует некоторая функция $f_n : X \to \mathbb{R}$. Тогда говорят, что задана **функциональная последовательность** $\{f_n(x)\})_{n=1}^{\infty}$.

Определение 10.1. Говорят, что ф.п. **поточечно сходится** (п.с.) к функции $f(x)$ на X при $n \to \infty$, если $\forall x \in X \ \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{R}$. Для п.с. применяют обозначения $f_n(x) \overset{X}{\to} f(x)$.

Замечание. Предельная функция f не задана заранее. Если она существует (что не обязательно!), то определяется (причем однозначно, докажите!) с помощью данной ф.п. $\{f_n\}$. Принципиально, что у всех функций из ф.п. и у предельной функции одна и та же область определения X.

Запишем определение поточечной сходимости f_n к f на языке $\varepsilon - n$:

$$\forall x \in X \ \forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists N = N(x,\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \leqslant N \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \qquad (10.1)$$

Теперь сформулируем основное

Определение 10.2. Говорят, что ф.п. $\{f_n\}$ **равномерно сходится** (р.с.) к функции f на X при $n \to \infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \wedge \forall x \in X \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \qquad (10.2)$$

Для р.с. применяют обозначения $f_n(x) \rightrightarrows f(x), \ x \in X$ или $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$.

Отличие условий (10.1) и (10.2) в том, что в (10.1) номер N зависит от аргумента x, т.е. поточечное стремление $f_n(x)$ к пределу $f(x)$ зависит от x. При р.с. **один и тот же номер** N обеспечивает **равномерную по всем** $x \in X$ (откуда название!) ε-близость $f_n(x)$ к $f(x)$.

Геометрическая интерпретация р.с. Пусть $f_n(x) \overset{X}{\to} f(x)$, а $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Рассмотрим графики трех функций: $Gr(f(x))$, $Gr(f(x) \pm \varepsilon)$. Подмножество кординатной плоскости

$$Tub_\varepsilon(f) := \{(x,y) : x \in X, \ f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon\},$$

заключенное между графиками $Gr(f(x) \pm \varepsilon)$, называется ε-**трубчатой окрестностью** (tubular neighbourhood) графика $Gr(f)$ (см. рис. ???). Равномерная сходимость на X ф.п. f_n к функции f означает, что для любого $\varepsilon > 0$, начиная с какого-то номера $n \geqslant N(\varepsilon)$, все графики $Gr(f_n)$ оказываеются в ε-трубчатой окрестности.

Рис. ???

Лемма 10.1. *(связь между п.с. и р.с.)*

1. *Из равномерной сходимости следует поточечная.*
2. *Если ф.п. $\{f_n\}$ сходится поточечно к функции f, то только к этой же функции f может равномерно сходиться $\{f_n\}$.*

Доказательство п. 1 следует из (10.1) и (10.2). Второй пункт является следствием первого. ■

Примеры. 1) На $X=[0,1]$ ф.п. $f_n(x)=x^n$ поточечно сходится к $f(x)\equiv 0$ при $0\leqslant x<1$ и $f(1)=1$. Но $x^n \not\rightrightarrows f(x)$, поскольку $(1-1/(2n))^n-0\geqslant 1/2$ (неравенство Бернулли). Дело в том, что $1^n=1$, а $x^n\to 0$, если $0\leqslant x<1$ (см. рис. ???).

2) Рассмотрим на $X=[0,1]$ функцию $f_n(x)$, график которой (см. рис. ???) представляет собой равнобедренный треугольник с основанием $x\in[0,1/n]$ и высотой $y=h_n>0$ и отрезок $x\in[1/n,1]$. Из определения следует, что поточечно ф.п. сходится к нулю (обоснуйте!). Но f_n сходится к нулю равномерно только в том случае, когда высота "горба" $h_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Рис. ??? Рис. ???

Задача. Докажите, что на $[0,1]$ ф.п. $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$ равномерно сходится к нулю, а ф.п. $f_n(x)=x^n-x^{2n}$ сходится к нулю неравномерно.

10.2. Критерии, признаки и свойства РС.

Теорема 10.1. *Следующие условия равносильны р.с. $f_n\rightrightarrows f$ при $n\to\infty$.*

1.
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|=0. \tag{10.3}$$

2. *Для **любой** последовательности точек $x_n\in X$ выполняется равенство*
$$\lim_{n\to\infty}|f_n(x_n)-f(x_n)|=0. \tag{10.4}$$

3. *Критерий Коши:*
$$\forall\varepsilon>0\hookrightarrow\exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}:\forall n,m\geqslant N\wedge\forall x\in X\hookrightarrow|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon. \tag{10.5}$$

Доказательство утверждения п. 1.

Необходимость. Наряду с данной ф.п. рассмотрим последовательность $\rho_n:=\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|$, которая принимает значения на **расширенной** неотрицательной полуоси: $\rho_n\in[0,+\infty]$. Из определения (10.2) следует, что
$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}:\forall n\geqslant N\hookrightarrow\rho_n\leqslant\varepsilon,$$
что означает $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=0$.

Достаточность следует из оценки:
$$\forall x\in X \text{ справедливо : } |f_n(x)-f(x)|\leqslant\rho_n\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Доказательство п. 2. Необходимость: для любой последовательности $x_n\in X$, в силу п. 1, справедливо:
$$|f_n(x_n)-f(x_n)|\leqslant\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|=\rho_n\to 0 \text{ при } n\to 0.$$

Достаточность. Если f_n не сходится равномерно к f, то существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $N \in \mathbb{N}$ найдется $n > N$, для которого $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = \rho_n \geqslant \varepsilon_0$. Последнее означает, что существует по крайней мере одна такая точка $x_n \in X$, что $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon_0/2 = const$. Значит, предельное условие (10.4) не выполняется.

Доказательство п. 3. Необходимость доказывается, как и для числовых последовательностей, использованием неравенства треугольника: при $n, m \to \infty$ справедливо:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leqslant \rho_n + \rho_m \to 0.$$

Достаточность доказывается в два этапа. Первый: поскольку условие Коши выполняется равномерно для всех $x \in X$, то тем более оно выполняется для любого фиксированного $x \in X$. Поэтому существует поточечный предел, который обозначим через $f(x)$. Второй этап: в условии Коши (12.6) при произвольных фиксированных $x \in X$ и $n \in N$ перейдем к пределу при $m \to \infty$. Получим

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N \wedge \forall x \in X \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Последнее означает, что $f_n \rightrightarrows f$. ■

Замечание. Доказательство достаточности п. 2 теоремы 10.1 мы осуществляли от противного. Этот подход полезен при доказательстве **отсутствия** р.с.: "отгадывают" такую последоватеьность $x_n \in X$, для которой $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon_0 = const > 0$.

Опишем

Теорема 10.2. *(свойства равномерной сходимости)*

1. *Аддитивность по области определения: если $f_n \rightrightarrows f$ на X_1 и $f_n \rightrightarrows f$ на X_2, то $f_n \rightrightarrows f$ на $X_1 \cup X_2$.*
2. *Линейность р.с.: если $f_n \rightrightarrows f$ на X и $g_n \rightrightarrows f$ на X, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha f_n + \beta g_n \rightrightarrows \alpha f + \beta g$ на X.*

Доказательство п. 1. Из определения 10.2 следует, что для X_1 существует номер $n_1(\varepsilon)$, для X_2 существует номер $n_2(\varepsilon)$. Остается взять для $X_1 \cup X_2$ номер $n(\varepsilon) = \max\{n_1, n_2\}$.

Доказательство п. 2 осуществляется с помощью определения 10.2 по той же схеме, что и доказательство линейности предела числовой последовательности. ■

Задача. Докажите линейность р.с.

Ценность р.с. в том, что предельная функция f сохраняет "хорошие свойства" функций из последовательности f_n. Если же р.с. отсутствует, то свойства предельной функции f непредсказуемы.

Теорема 10.3. *(сохранение непрерывности) Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на X. Если функции f_n непрерывны на X, то предельная функция f также непрерывна на X.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что f непрерывна в произвольной точке $x_0 \in X$ по множеству X. Из неравенства треугольника $\forall x \in U_\delta(x_0) \cap X$ выполняется:

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|. \qquad (10.6)$$

Т.е. мы оцениваем изменение $|f_n(x) - f_n(x_0)|$ предельной функции f при изменении аргумента через изменение $|f_n(x) - f_n(x_0)|$ "допредельной" функции f_n (см. рис. ???) В силу равномерной сходимости первое и третье слагаемые могут быть сделаны сколь угодно малыми за счет выбора номера n. Второе слагаемое может быть сделано сколь угодно малым поскольку функция f_n непрерывна в точке x_0. ■

Рис. ???

Замечание. В отсутствие равномерной сходимости последовательность непрерывных функций может поточечно сходиться к разрывной функции (см. пример 1)). Вместе с тем, равномерная сходимость является только достаточным условием непрерывности предельной функции. В примере 2) равномерной сходимости нет, но предельная функция $f(x) \equiv 0$ непрерывна.

Задача. Пусть ф.п. $f_n(x)$ $(x \in X)$ такова, что в некоторой точке $x_0 \in X$ существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x)$ при каждом n. Пусть существует такая окрестность $U \subset X$ точки x_0, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на U. Тогда существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, причем

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x).$$

Т.е. пределы по номеру n члена последовательности и по переменной x перестановочны. (Указание: воспользуйтесь оценкой (10.6))

Теорема 10.4. *(интегрируемость предельной функции) Пусть $f_n \rightrightarrows f$ на отрезке $X = [a, b]$ и функции f_n непрерывны на $[a, b]$. Тогда на $[a, b]$*

$$I_n(x) := \int_a^x f_n(t)dt \rightrightarrows I(x) := \int_a^x f(t)dt, \text{ в частности}$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt,$$

т.е. интегрирование и переход к пределу при $n \to \infty$ перестановочны.

Доказательство. Во-первых, по предыдущей теореме предельная функция f непрерывна, следовательно, интегрируема. В силу р.с. f_n к f получаем

$$\sup_{x \in X} \left| \int_a^x f_n(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| \leqslant \int_a^x \sup_{x \in X} |f_n(t) - f(t)|dt \leqslant$$

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \cdot (b - a) \to 0 \text{ при } n \to \infty. \blacksquare$$

Замечание. В теореме 10.5 сформулированы только достаточные условия допустимости предельного перехода под знаком интеграла.

Задача. Придумайте последовательность непрерывных функций, которая поточечно сходится к разрывной функции, но предельный переход под знаком интеграла допустим.

Теорема 10.5. *(дифференцируемость предельной функции) Пусть функции f_n непрерывно дифференцируемы на отрезке $X = [a, b]$, причем последовательность $f_n'(x) \rightrightarrows g(x)$ на $[a, b]$ и существует точка $x_0 \in [a, b]$, в которой существует конечный предел $f_n(x_0) \to A \in \mathbb{R}$. Тогда $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$, где функция f непрерывно дифференцируема на $[a, b]$ и $f'(x) = g(x)$ на $[a, b]$. Т.е. дифференцирование и переход к пределу при $n \to \infty$ перестановочны:*

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = (\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = f'(x). \tag{10.7}$$

Доказательство. По теореме 10.3 предельная функция g непрерывна на $[a, b]$. Применим теорему 10.4:

$$\int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} g(t)dt \;\Leftrightarrow\; f_n(x) - f_n(a) \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} g(t)dt,\; x \in [a, b].$$

Поэтому

$$f_n(x) \rightrightarrows A + \int_{x_0}^{x} g(t)dt =: f(x).$$

Полученная функция непрерывно дифференцируема, ее производная $f'(x) = g(x)$ на $[a, b]$, а $f(x_0) = A$. ■

Замечание 1. Если отказаться от условия $f_n(x_0) \to A \in \mathbb{R}$ (не за что "зацепиться"), то у последовательности f_n может отсутствовать даже поточечный предел.

Контрпример. Ф.п. $f_n(x) = n$ не сходится ни в одной точке, но $f_n'(x) \equiv 0 \rightrightarrows 0$.

Замечание 2. Если последовательность f_n непрерывно дифференцируемых функций (а не их производных!) равномерно сходится, то предельная функция $f(x)$ не обязана быть дифференцируемой (будучи непрерывной в силу теоремы 10.3) или же не будет выполняться перестановочность (10.7) предельного перехода и дифференцирования .

Контрпример. На $[-1, 1]$ последовательность $f_n(x) = (1/n) \arctan x^n \rightrightarrows f(x) \equiv 0$. Функции f_n и предельная функция непрерывно дифференцируемы, причем производная предельной функции $f'(x) \equiv 0$. Но $f_n'(x) = x^{n-1}(1 + x^{2n})$. Получается, что у последовательности $f_n'(-1) = (-1)^n/2$ предела нет, а последовательность $f_n'(1) = 1/2 \to 1/2 \neq 0$. Значит в точках $x = \pm 1$ равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))'$ не выполняется.

10.3. Равномерная сходимость функциональных рядов. Если задана ф.п. $\{a_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ $(x \in X)$, то возникает последовательность частичных сумм $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$. Символ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ называется **функциональным рядом** (ф.р.). Если для каждого $x \in X$ существует конечный предел

$$S(x) := \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \in \mathbb{R},$$

то говорят, что ф.р. сходится **поточечно**.

Определение 10.3. (равномерная сходимость ф.р.) Говорят, что ф.р. сходится **равномерно**, если последовательность его частичных сумм равномерно сходится: $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$.

Оказывается, во многих ситуациях удобнее (или приходится) иметь дело не с ф.п., а с ф.р. Однако, если поточечный предел ф.п. часто удается найти, то сумма сходящегося ф.р. как правило неизвестна. Поэтому мы интересуемся здесь исключительно вопросами поточечной и равномерной сходимостей рядов.

На последовательность частичных сумм и на ф.р. переносятся все утверждения пунктов 1 и 2. Некоторые из этих утверждений мы переформулируем для рядов. Также будут сформулированы и доказаны утверждения, в которых проявляется специфика ф.р. Прежде всего перефрмулируем

Теорема 10.6. *(критерий Коши равномерной сходимости ф.р.) Ф.р.* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ *равномерно сходится на* X *тогда и т.т.т, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in X \hookrightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство состоит в переформулировке п.3 теоремы 10.1 для частичных сумм. Отметим, что натуральный параметр m в теореме 10.1 через n и p определяется так: $m = n + p$. ■

Критерий Коши чаще используют для доказательство отсутствия равномерной сходимости. Переформилировка признака выглядит так:

Следствие 10.1. *(критерий Коши* ***отсутствия равномерной сходимости*** *ф.р.) Ф.р. НЕ является равномерно сходящимся на* X *в том и только том случае, когда*

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall N \in \mathbb{N} \hookrightarrow \exists n(N) \geqslant N,\ \exists p(n) \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in X : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x_n) \right| \geqslant \varepsilon_0.$$

Замечание. Под знаками слагаемых функционального ряда обязательно должен стоят один и тот же аргумент! Изучая функциональный ряд, **бессмысленно** пользоваться суммами вида $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x_k)$, где аргумент зависит от индекса суммирования. Однако, рассматривая каждое слагаемое ф.р. в отдельности, можно каждый раз использовать новый аргумент (см. ниже следствие 10.2).

Следствие 10.2. *(достаточный признак расходимости ф.р.) Если*

$$\exists \varepsilon_0 > 0\ \wedge\ \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X : |a_n(x_n)| \geqslant \varepsilon_0,$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ *не является равномерно сходящимся на* X.

Доказательство. Возмите в следствии 10.1 параметр $p = 1$. ■

Теорема 10.7. *(необходимое условие равномерной сходимости ряда) Если на* X *ф.р.* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ *равномерно сходится, то* $a_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0$.

Доказательство. Если $S_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)$, то и $S_{n-1}(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)$. Поэтому (в силу линейности р.с.) $a_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S - S = 0$. ∎

Теорема 10.8. *(обобщенный признак сравнения) Пусть для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ на X справедлива оценка $|a_k(x)| \leqslant \alpha_k(x)$, и неотрицательный ф.р. $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x)$ равномерно сходящийся на X. Тогда ф.р. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ равномерно сходится на X.*

Доказательство. Запишем для равномерно сходящегося неотрицательного ф.р $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x)$ критерий Коши (теорема 10.7):

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k(x) < \varepsilon.$$

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in X \hookrightarrow$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k(x) < \varepsilon.$$

Опять же, в силу критерия Коши, для ф.р., ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ равномерно сходится на X. ∎

Следствие 10.3. *Справедливы утверждения:*

1. *Если ф.р. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(x)|$ сходится равномерно на X, то ф.р. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ также сходится равномерно на X.*
2. *(Достаточный признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда.) Пусть для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ на X справедлива оценка $|a_k(x)| \leqslant \alpha_k$, где неотрицательный ч.р. $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ сходящийся. Тогда ф.р. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ равномерно сходится на X.*

Замечание. Если поточечно сходится ф.р. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(x)|$, ты мы говорим об **абсолютной поточечной сходимости**. Если же ф.р. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(x)|$ сходится равномерно, то такую сходимость мы называем **абсолютной равномерной**. Пункт 1 следствия 10.3 означает, что из абсолютной равномерной сходимости следует равномерная сходимость ф.р.

В заключение пункта приведем переформулировки теорем 10.3-10.5.

Теорема 10.9. *(о непрерывности суммы равномерно сходящегося ф.р. из непрерывных слагаемых) Если все функции $a_k(x)$ $(k \in \mathbb{N})$ непрерывны на X и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ сходится равномерно на X, то его сумма непрерывна на X.*

Теорема 10.10. *(о почленном интегрировании равномерно сходящегося функционального ряда) Если все функции $u_k(x)$ $(k \in \mathbb{N})$ непрерывны на $[a,b]$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x u_k(x)$ равномерно на $[a,b]$ сходится к сумме $\int_a^x \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$. В частности, при $x = b$ справедливо $\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$.*

Теорема 10.11. *(о почленном дифференцировании функционального ряда) Если все функции* $u_k(x)$ $(k \in \mathbb{N})$ *непрерывно дифференцируемы на* $[a,b]$, *ф.р.* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ *из производных сходится равномерно на* $[a,b]$ *к сумме* $V(x)$, *и существует такая точка* $x \in [a,b]$, *что ч.р.* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$ *сходится, то ф.р.* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *равномерно на* $[a,b]$ *сходится к непрерывно дифференцируемой функции* $S(x)$, *причем производная* $S'(x) = V(x)$ *для всех* $x \in [a,b]$. *Т.е.* $\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$.

10.4. Достаточные признаки р.с. Дирихле и Абеля. Оказывается, признаки сходимости Дирихле и Абеля, которые мы сформулировали для несобственных интегралов и числовых рядов, могут быть приспособленны для исследования равномерной сходимости ф.р.

Теорема 10.12. *(признак Дирихле) Пусть для функциональных последовательностей* $a_k(x)$ *и* $b_k(x)$, *заданных на* X, *выполнены следующие условия:*

1. *последовательность частичных сумм* $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ *равномерно ограничена:*
$$\exists C > 0 : \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X \ \hookrightarrow\ |A_n(x)| \leqslant C;$$
2. *при любом* $x \in X$ *последовательность* $b_k(x)$ *монотонно (вообще говоря, нестрого) убывает;*
3. *на* X *последовательность* $b_k(x) \rightrightarrows 0$.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ *сходится равномерно на* X.

Доказательство. Дословно повторяя доказательство признака Дирихле для ч.р. (теорема 9.8), получим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x)\right| \leqslant 2C b_{n+1}(x) \text{ при всех } n, p \in \mathbb{N},\ x \in X.$$

Поскольку $b_k(x) \rightrightarrows 0$ на X, то

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N,\ \forall x \in X \hookrightarrow 0 \leqslant b_{n+1}(x) < \frac{\varepsilon}{2C}.$$

Значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in X \hookrightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x)\right| < 2C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon.$$

Из критерия Коши следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ сходится равномерно. ■

Следствие 10.4. *(признак Лейбница р.с. функциональных рядов) Пусть при любом* $x \in X$ *последовательность* $b_k(x)$ *убывает (вообще говоря, нестрого) и* $b_k(x) \rightrightarrows 0$ *на* X. *Тогда знакочередующийся ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k(x)$ *сходится равномерно на* X.

Задача. Докажите следствие 10.4.

Теорема 10.13. *(признак Абеля равномерной сходимости) Пусть выполнены условия:*

1. *ф.р.* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится равномерно на* X*;*
2. *при любом фиксированном* $x \in X$ *числовая последовательность* $b_k(x)$ *монотонна (вообще говоря, нестрого и для разных* x *монотонность может иметь разный характер);*
3. *функциональная последовательность* $\{b_k(x)\}$ *ограничена, т.е.* $\exists C : \forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in X \hookrightarrow |b_k(x)| \leqslant C$.

Тогда ф.р. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ *сходится равномерно на* X*.*

Доказательство. Запишем дискретное преобразование Абеля (9.2) из лекции 9 в терминах "сумм Коши"$A_{n+1}^k := \sum_{i=n+1}^{k} a_i$, где $k \geqslant n+1$ и $A_{n+1}^n := 0$:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (A_{n+1}^k - A_{n+1}^{k-1}) b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} A_{n+1}^k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} A_{n+1}^{k-1} b_k =$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} A_{n+1}^k b_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} A_{n+1}^k b_{k+1} = (A_{n+1}^{n+p} b_{n+p} - A_{n+1}^n b_{n+1}) -$$

$$- \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_{n+1}^k (b_{k+1} - b_k) = A_{n+1}^{n+p} b_{n+p} - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_{n+1}^k (b_{k+1} - b_k). \qquad (10.8)$$

Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится равномерно, то в силу критерия Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in X \hookrightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3C}.$$

Значит, $|A_{n+1}^k| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i(x)\right| < \varepsilon/(3C)$ при $k \geqslant n+1,\ x \in X$. Теперь, учитывая (10.8) и монотонность по k последовательности $b_k(x)$ при фиксированном x, получаем

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3C} \left(|b_{n+p}(x)| + \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (b_{k+1}(x) - b_k(x)) \right| \right) \leqslant$$

$$\frac{\varepsilon}{3C} \left(|b_{n+p}(x)| + |b_{n+p}(x) - b_{n+1}(x)| \right) \leqslant \frac{\varepsilon}{3C} \cdot 3C = \varepsilon.$$

Что означает, опять же в силу критерия Коши, равномерную сходимость ф.р. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$. ■

Замечание. Формулу (10.8) можно получить из готовой формулы (9.2), подставив $A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{k} a_i = A_n + A_{n+1}^k$:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = (A_n + A_{n+1}^{n+p}) b_{n+p} - A_n b_{n+1} - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (A_n + A_{n+1}^k)(b_{k+1} - b_k) =$$

$$\left(A_{n+1}^{n+p} b_{n+p} - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_{n+1}^k (b_{k+1} - b_k) \right) + \left(A_n b_{n+p} - A_n b_{n+1} - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_n (b_{k+1} - b_k) \right) =$$

$$= \left(A_{n+1}^{n+p} b_{n+p} - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_{n+1}^{k} (b_{k+1} - b_k) \right) +$$

$$A_n \left(b_{n+p} - b_{n+1} - b_{n+2} + b_{n+1} - b_{n+3} + b_{n+2} - ... - b_{n+p} + b_{n+p-1} \right) =$$

$$A_{n+1}^{n+p} b_{n+p} - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_{n+1}^{k} (b_{k+1} - b_k) + A_n \cdot 0 = A_{n+1}^{n+p} b_{n+p} - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_{n+1}^{k} (b_{k+1} - b_k).$$

§ 11. Степенные ряды

Степенные ряды (с.р.) – это частный случай ф.р. Ценность этих рядов в том, что они являются обобщением формулы Тейлора и применяются как для локального, так и для глобального исследования функций. Оказывается, естественно изучать комплекснозначную теорию с.р. на комплексной прямой. Основным приемом исследования с.р. является сравнение их с геометрической прогрессией. Нас будут интересовать, как и для ф.р. общего вида, прежде всего вопросы сходимости: поточечной, равномерной, абсолютной. Также мы интересуемся свойствами предельной функции – непрерывностью, интегрируемостью, дифференцируемостью.

11.1. Круг сходимости степенного ряда. Дадим основное

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.1. **Степенным рядом** называют ф.р.

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k, \text{ где } c_k,\ z_0,\ z\in\mathbb{C}.$$

Т.е. члены ряда $a_k(z) := c_k(z-z_0)^k$ есть **комплексознначные функции комплексной переменной**. Все, что относится к комплексным ч.р. (см. п. 9.5) переносится на комплексные ф.р. комплексного аргумента по принципу: верны те утверждения, в которых не используют упорядоченность действительных чисел. В частности, признаки Дирихле и Абеля остаются справедливыми, если в них $a_k(z)\in\mathbb{C}$, но $b_k(z)\in\mathbb{R}$ (поскольку требуется монотонность действительной последовательности $b_k(z)$ по натуральной переменной k, которая упорядочена).

Задача. Рассортируйте все определения и утверждения лекции 10 на три класса: 1) справедливые для случая $x, f_k(x), a_k(x)\in\mathbb{R}$, 2) справедливые для случая $z, f_k(z), a_k(z)\in\mathbb{C}$, 3) остальные случаи.

Пример. Пусть $z_0 = 0$, $c_k = 1$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда степенной ряд становиться суммой геометрической прогрессии с показателем $q = z$. Как и в действительном случае $S_n = (1-z^n)/(1-z)$. Поэтому ряд сходится поточечно только при условии $|z| < 1$. Т.е. множество поточечной сходимости является кругом! Это принципиальным наблюдение фиксирует

ТЕОРЕМА 11.1. *(первая теорема Абеля) Если с.р. сходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$, то он* ***абсолютно*** *сходится в любой точке z, которая ближе к z_0, чем z_1, т.е. $|z-z_0| < |z_1-z_0|$ (рис. ???).*

Рис. ???

Доказательство. Поскольку ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z_1-z_0)^k$ сходится, его общий член $c_k(z_1-z_0)^k \stackrel{k\to\infty}{\to} 0$. По условию $q := |z-z_0|/|z_1-z_0| < 1$. Поэтому праведлива оценка для общего члена в точке z:

$$|a_k(z)| = |c_k(z-z_0)^k| = |c_k(z_1-z_0)^k|\cdot\left|\frac{(z-z_0)}{(z_1-z_0)}\right|^k = o(q^k) \text{ при } k\to\infty.$$

Поскольку геометрическая прогрессия $\sum_{k=0}^{\infty} q^k < \infty$ сходится, данный ряд абсолютно сходится по признаку Вейерштрасса. ■

Замечание. Поскольку в теореме 11.1 сравниваются **расстояния** от исследуемых точек до точки z_0, то отсюда уже вытекает главный вывод о сходимости степенного ряда: **множество точек сходимости с.р. является кругом** с точностью до окружности этого круга, где нужны дополнительные исследования. Чтобы придать этому утверждению строгую форму введем

Определение 11.2. Неотрицательное число R или символ $+\infty$ называется **радиусом сходимости** степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$, если для каждого z такого, что $|z-z_0|<R$, ряд сходится, а при условии $|z-z_0|>R$ – расходится. Множество $\{z\in\mathbb{C}: |z-z_0|<R\}$ называется **кругом сходимости** с.р.

Замечание. Если $R=0$, ряд сходится только в точке $z=z_0$; если $R=+\infty$, кругом сходимости является вся комплексная прямая.

Определение радиуса сходимости корректно:

Теорема 11.2. *Каждый степенной ряд имеет единственный радиус сходимости.*

Доказательство. Единственность сразу следует из определения.

Докажем существование. Если ряд сходится только в точке $z=z_0$ (приведите пример такого ряда!), то возьмем $R:=0$. Если ряд сходится для всех $z\in\mathbb{C}$ (приведите пример такого ряда!), возьмем $R:=+\infty$.

Рассмотрим основной случай: существует точка $z_c\neq z_0$, в которой ряд сходится (c=convergence), и существует точка $z_d\neq z_0$, в которой ряд расходится (d=divergence). Определим подмножество

$$Conv := \{z\in\mathbb{C}:\ \text{ряд}\ \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k\ \text{сходится}\}.$$

Подмножество непусто: $z_0, z_c\in Conv$. Рассмотрим супремум (который всегда существует!) $\sup_{z\in Conv}\rho(z,z_0) := \sup_{z\in Conv}|z-z_0|$. Во-первых, этот супремум строго положителен, поскольку $|z_c-z_0|>0$. Во-вторых, он строго меньше бесконечности. В противном случае существует такое число $\tilde z\in\mathbb{C}$, что $|\tilde z-z_0|>|z_d-z_0|$ и ч.р. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\tilde z-z_0)^k$ сходится. Но тогда, согласно первой теореме Абеля, ч.р. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z_d-z_0)^k$ тоже сходится (см. рис. ???) . Покажем, что $\sup_{z\in Conv}\rho(z,z_0)=R$. Если мы возьмем число z', для которого $|z'-z_0|>R$, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z'-z_0)^k$ разойдется по определению супремума $\sup_{z\in Conv}\rho(z,z_0)$. Если же $|z''-z_0|<R$ (неравенство строгое!), то найдется число $\hat z\in Conv$, для которого ч.р. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\hat z-z_0)^k$ сходится и $|z''-z_0|<|\hat z-z_0|$. Тогда, опять же по первой теореме Абеля, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z''-z_0)^k$ сходится. ■

Рис. ???

Оказывается абсолютная сходимость и равномерная сходимость также связаны с найденным кругом поточечной сходимости.

Теорема 11.3. *(об абсолютной и равномерной сходимостях с.р.)*

1. *а) Внутри круга сходимости степенной ряд сходится абсолютно.*
   б) Вне круга сходимости степенной ряд абсолютно расходится.
2. *Степенной ряд равномерно сходится и абсолютно равномерно сходится на любом замкнутом круге $\overline{K}_r=\{z\in\mathbb{C}:\ |z-z_0|\leqslant r<R\}$, радиус которого меньше радиуса сходимости.*

Доказательство. Пункт 1 а) следует из первой теоремы Абеля. Пункт 1 б) доказывается от противного с учетом того, что абсолютная сходимость влечет сходимость.

Доказательство пункта 2. Возьмем число z_1 такое, что $|z_1 - z_0| = r < R$. Поскольку в точке z_1 ряд сходится абсолютно, то это означает сходимость неотрицательного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k$. Для всех $z \in \overline{K}_r$ справедливо $|c_k(z - z_0)^k| \leqslant |c_k| r^k$, поэтому в круге $\overline{K}_r$ с.р. $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k(z - z_0)^k|$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. Из абсолютной равномерной сходимости следует просто равномерная сходимость (следствие 10.3 пункт 1). ■

Замечание. Из теорем 11.2, 11.3 следует, что проблемы сходимости остаются на границе груга сходимости – окружности с центром в точке z_0 радиуса R. Оказывается, на границе ряд может вести себя по-разному: абсолютно сходиться, сходиться, расходиться. На всем (открытом) круге сходимости степенной ряд может сходится равномерно, а может сходится и неравномерно. Примеры приведены в конце пункта 11.2.

Отчасти проясняет связь сходимости в точке на границе круга со сходимостью внутри этого круга

ТЕОРЕМА 11.4. *(вторая теорема Абеля о сходимости на радиусе) Если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ с радиусом сходимости $R \in (0, +\infty)$ сходится в точке z_1, которая лежит на границе круга сходимости (т.е. $|z_1 - z_0| = R$), то он сходится* ***равномерно на радиусе*** $[z_0, z_1]$ *(см. рис. ???)*

Рис. ???

Доказательство. Перепишем данный ряд в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z_1 - z_0)^k \left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right)^k.$$

Применим к полученному ряду признак Абеля (теорема 10.15) с $X = [z_0, z_1]$, $a_k(z) = a_k := c_k(z_1 - z_0)^k$ и $b_k(z) := \left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right)^k$. Во-первых, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z_1 - z_0)^k$ сходится по условию и от переменной z вообще не зависит; поэтому он равномерно сходится на X. Во-вторых, при каждом фиксированном $k \in \mathbb{N}$ на отрезке $X = [z_0, z_1]$ функция $b_k(z) = (\frac{z - z_0}{z_1 - z_0})^k$ принимает **действительные значения** (это ключевое наблюдение!), принадлежащие отрезку $[0, 1]$:

$$0 \leqslant b_k(z) = \left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right)^k \leqslant 1, \text{ при } z \in [z_0, z_1].$$

Наконец, для каждого фиксированного $z \in X = [z_0, z_1]$ числовая последовательность $b_k(z)$ является монотонно убывающей (нестрого) по k. Значит, признак Абеля равномерной сходимости справедлив для данного ряда на исследуемом множестве. ■

Теперь мы можем исследовать

ТЕОРЕМА 11.5. *(непрерывность суммы степенного ряда)*

1. *а) Сумма степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ непрерывна внутри его круга сходимости.*

б) Сумма степенного ряда равномерно непрерывна на любом замкнутом круге $\overline{K}_r = \{z : |z - z_0| \leqslant r < R\}$, *радиус которого* r *меньше радиуса сходимости ряда* R.

2. *Если степенной ряд сходится в точке* z_1, *которая лежит на границе круга сходимости (т.е.* $|z_1 - z_0| = R$*), то его сумма непрерывна в точке* z_1 *по множеству* $X = [z_0, z_1]$ *(т.е. непрерывна по радиусу изнутри) и равномерно непрерывна на множестве* $X = [z_0, z_1]$.

Доказательство п. 1 а). Так как $|z - z_0| < R$, то возьмем круг такого радиуса r, что $|z - z_0| < r < R$. На замкнутом круге $\overline{K}_r$ степенной ряд сходится равномерно (п. 2 теоремы 11.3). Поскольку слагаемые ряда $c_k(z - z_0)^k$ – суть непрерывные функции, то по теореме 10.11 сумма ряда непрерывна на $\overline{K}_r$ и, в частности, в точке $z \in X$. Справедливость утверждения 1 б) вытекает из компактности замкнутого круга $\overline{K}_r$ и тоеремы Кантора о равномерной непрерывности (теорема 3.8).

Доказательство п. 2 осуществляется аналогично со ссылкой на теорему 11.4. ■

11.2. Вычисление и оценки радиуса сходимости степпенного ряда. Мы доказали существование радиуса сходимости. Остается научится его вычислять. Опять же сравнивая с.р. с геометрической прогрессией, мы получаем:

Теорема 11.6. *(формула радиуса сходимости Коши-Адамара) Радиус сходимости числового ряда* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ *равен*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}}. \tag{11.1}$$

Мы считаем по определению, что $1/0 = +\infty,\ 1/(+\infty) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим неотрицательную числовую последовательность $C_k := \sqrt[k]{|c_k|}$. Всегда существует верхний предел $C = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} C_k$. Более того, верхний предел может быть реализован как частичный предел (т.е. существует такая подпоследовательность k_i индексов, что предел $\lim\limits_{i\to\infty} C_{k_i} = C$), и при этом любое число, большее C, не является частичным пределом последовательности C_k (см. 1 семестр, лемма 3.2).

Доказательство опирается на тождество $|c_k(z - z_0)^k| = (\sqrt[k]{|c_k|}|z - z_0|)^k$.

Рассмотрим три случая. Пусть $C = +\infty$, т.е. $\lim\limits_{i\to\infty} C_{k_i} = +\infty$. Значит, для любого $E > 0$ существует такое $I \in \mathbb{N}$, что для всех $i > I$ выполняется $C_{k_i} = \sqrt[k]{|c_{k_i}|} > E$. Возьмем произвольное число $z \neq z_0$ и положим $E = 1/|z - z_0|$. Тогда

$$|c_{k_i}(z - z_0)^{k_i}| > E^{k_i} \cdot \left(\frac{1}{E}\right)^{k_i} = 1 \not\to 0,$$

т.е. не выполнено необходимое условие сходимости ч.р. Поскольку число $z \neq z_0$ – любое, то радиус сходимости $R = 0$.

Пусть $C = 0$. Если верхний предел неотрицательной последовательности равен нулю, то вся последовательность сходится к нулю. Значит, для любого

$\varepsilon > 0$ существует такое $k \in \mathbb{N}$, что для всех $k > K$ выполняется $C_k = \sqrt[k]{|c_k|} < \varepsilon$. Возьмем произвольное число $z \neq z_0$ и положим $\varepsilon = 1/(2|z - z_0|)$. Тогда

$$\forall k > K \hookrightarrow |c_k(z - z_0)^k| < \varepsilon^k \cdot \left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Поскольку геометрическая прогрессия с показателем $1/2$ сходится, то данный ч.р. сходится согласно признаку сравнения. Итак, $R = +\infty$.

Наконец, пусть $0 < C < +\infty$. Возьмем число z "далеко" от z_0: $|z - z_0| > 1/C$ (неравенство строгое!). Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что $|z - z_0| = 1/(C - \varepsilon)$. Но из определения подпоследовательности C_{k_i} следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists I \in \mathbb{N} : \forall i > I \hookrightarrow C_{k_i} = \sqrt[k_i]{|c_{k_i}|} > C - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому

$$|c_{k_i}(z - z_0)^{k_i}| > \left(\frac{C - \varepsilon/2}{C - \varepsilon}\right)^{k_i} \overset{i \to +\infty}{\to} +\infty.$$

Значит, не выполнен необходимый признак сходимости, следовательно, в любой точке z, которая находится "далеко" от z_0, ряд расходится.

Теперь возьмем число z "близко" от z_0: $|z - z_0| < 1/C$ (неравенство строгое!). Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что $|z - z_0| = 1/(C + \varepsilon)$. Но из определения **верхнего** предела следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow \exists K \in \mathbb{N} : \forall k > K \hookrightarrow C_k = \sqrt[k]{|c_k|} < C + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому

$$\forall k > K \hookrightarrow |c_k(z - z_0)^k| < \left(\frac{C + \varepsilon/2}{C + \varepsilon}\right)^k.$$

Поскольку геометрическая прогрессия с показателем $\left(\frac{C+\varepsilon/2}{C+\varepsilon}\right) < 1$ сходится, то данный ч.р. сходится согласно признаку сравнения. Следовательно, в любой точке z, которая находится "близко" от z_0, ряд сходится.

Окончательный вывод: $R = 1/C$. ■

Замечание. Существуют степенные ряды, в которых индексы ненулевых коэффициентов кратны натуральному числу $m \neq 1$. Такие ряды имеют вид $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^{mk}$. Заметим, что в такой записи индекс коэффициента НЕ совпадает с показателем степени. В этом случае формула (12.1) обобщается до формулы

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \sqrt[mk]{|c_k|}}. \tag{11.2}$$

Задача. Докажите формулу (11.2). Докажите, что формула (11.2) остается справедливой и для ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^{mk+n}$, где $n \in \mathbb{N}$.

Замечание. Если существует обычный предел $\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$, то и в формулах (12.1) и (11.2) ищем обычный предел (обоснуйте!).

Признак Даламбера приводит к альтернативному способу нахождения радиуса сходимости, удобному в том случае, когда коэффициенты ряда содержат сомножители факториалы.

Теорема 11.7. *(формула радиуса сходимости Даламбера) Если для последовательности* $c_k \neq 0$ *существует предел отношений* $\lim\limits_{k\to\infty} |c_{k+1}|/|c_k| \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *Тогда для степенного ряда* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^{mk+n}$, *где* $m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N} \cup 0$, *справедлива следующая формула радиуса сходимости:*

$$R = \frac{1}{\sqrt[m]{\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|}}}. \tag{11.3}$$

Задача. Пользуясь признаком сходимости Даламбера, докажите формулу (11.3).

Замечание. Теорема 11.7 имеет условный характер. Она слабее теоремы 11.6, однако в некоторый случаях удобнее для вычисления ралиуса сходимости.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$. Радиус сходимости $R = (\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{1/k})^{-1} = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$. Если $|z| = 1$, то $z = \cos\varphi + i \sin\varphi$ и по формуле Муавра

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\varphi}{k} + i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\varphi}{k}.$$

Так как $1/k \downarrow 0$, то оба ряда сходятся при всех $\varphi \neq 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ (признак Дирихле – теорема 10.14). При $\varphi = 2\pi n$ получаем ряд $\sum_{k=0}^{\infty}(1/k)$, который расходится. Но если $|z| = 1$, то ряд составленный из модулей $\sum_{k=0}^{\infty} |z^k/k| = \sum_{k=0}^{\infty}(1/k)$ расходится. Следовательно, в точке $z = 1$ ряд расходится, а в остальных точках границы круга сходимости ряд сходится условно. В круге сходимости $|z| < 1$ ряд сходится неравномерно. Докажем этот факт с помощью критерия Коши (теорема 10.10, п. 1). Доказывать отсутствие равномерной сходимости следует в окрестности "плохой" точки $z = 1$, где ряд расходится. Возьмем $z_n = 1/\sqrt[n]{2} \to 1$ при $n \to \infty$ и рассмотрим сумму Коши с $p = n$:

$$\sum_{k=n+1}^{n+n} \frac{z^k}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^k \geqslant n \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^{2n} \geqslant \frac{1}{8}.$$

Значит для $\varepsilon = 1/8$ критерий не выполняется.

Задача. Докажите, что с.р. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k^\alpha}$ имеет при всех $\alpha \in \mathbb{R}$ радиус сходимости $R = 1$ и исследуйте поточечную сходимость на окружности $|z| = 1$ и равномерную сходимость в круге сходимости $|z| < 1$.

11.3. Действия со степенными рядами. Наша задача – выяснить как алгебраические операции, интегрирование и дифференцирование влияют на радиус сходимости с.р. Полученные выводы понадобятся нам в теории рядом Тейлора.

Теорема 11.8. *(о формальном дифференцировании и интегрировании рядов) Если с.р.* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ *имеет радиус сходимости* $R \in [0, +\infty]$, *то такой же радиус сходимости имеют* ***формально продифференцированный*** *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z-z_0)^{k-1}$ *и* ***формально проинтегрированный*** *ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{(z-z_0)^{k+1}}{k+1}$.

Доказательство. Поскольку данный ряд является формально продифференцированным по отношению к формально проинтегрированному, то теорему достаточно доказать только для формально продифференцированного ряда.

Во-первых, ряды $S := \sum_{k=1}^{\infty} kc_k(z-z_0)^{k-1}$ и $\hat{S} := \sum_{k=0}^{\infty} kc_k(z-z_0)^k$ (второй получен из первого умножением на $(z-z_0)$) сходятся или расходятся одновременно (т.е. при одних и тех же значениях z). В самом деле, при $z = z_0$ оба ряда сходятся. При $z \neq z_0$ имеем для частичных сумм:

$$\hat{S}_n := \sum_{k=0}^{n} kc_k(z-z_0)^k = \frac{1}{z-z_0}\sum_{k=1}^{n} kc_k(z-z_0)^{k-1} = \frac{1}{z-z_0}S_{n-1}.$$

Следовательно, оба предела $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1}$ и $\hat{S} = \lim\limits_{n\to\infty} \hat{S}_n$ существуют или не существуют одновременно.

Теперь найдем радиус сходимости ряда $\hat{S}$ по формуле Коши-Адамара, заменив верхний предел частичным пределом, который его реализует:

$$\frac{1}{\hat{R}} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|kc_k|} = \lim_{i\to\infty} \sqrt[k_i]{|k_i c_{k_i}|} = \lim_{i\to\infty} \sqrt[k_i]{k_i} \cdot \lim_{i\to\infty} \sqrt[k_i]{|c_{k_i}|} = 1 \cdot \frac{1}{R}. \blacksquare$$

Замечание. Поскольку мы не определили дифференцирование и интегрирование по комплексной переменной, мы не можем утверждать, что полученные ряды имеют отношение к этим операциям с функциями. Однако мы воспользуемся теоремой 11.8 в теории с.р. с действительными членами.

Позже нам понадобится

Теорема 11.9. *(о рядиусе сходимости суммы двух степенных рядов) Пусть радиусы сходимости с.р. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ и $\sum_{k=0}^{\infty} d_k(z-z_0)^k$ равны R_1 и R_2 соответственно. Пусть радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty}(c_k+d_k)(z-z_0)^k$ равен R. Тогда: 1) если $R_1 \neq R_2$, то $R = \min\{R_1, R_2\}$; 2) если $R_1 = R_2$, то $R \geqslant R_1$.*

Доказательство. Пусть, для определенности, $R_1 < R_2$. Тогда при $|z-z_0| < R_1$ оба ряда сходятся и ряд, являющийся их суммой, тоже сходится (лемма 9.2). Если $R_1 < |z-z_0| < R_2$, то первый ряд расходится, а второй сходится. Поэтому их сумма расходится (следствие 9.1). Поскольку сумма рядов также является степенным рядом, мы можем следать вывод, что $R = R_1 = \min\{R_1, R_2\}$. (Нет необходимости исследовать сходимость ряда при условии $|z-z_0| \geqslant R_2$: т.к. обнаружены точки z, в которых ряд расходится при условии $|z-z_0| > R_1$, то ряд тем более будет расходится при условии $|z-z_0| \geqslant R_2 > R_1$. Хотя, заметим, сумма двух расходящихся рядов не обязана расходиться.)

Если же $R_1 = R_2$, то при $|z-z_0| < R_1$ оба ряда сходятся и ряд, являющийся их суммой, тоже сходится. Поэтому $R \geqslant R_1$. При $|z-z_0| > R_1 = R_2$ оба ряда расходятся и сделать определенный вывод невозможно. $\blacksquare$

Пример. 1) Радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right)z^k$ равен 2, поскольку радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}\right)z^k$ равен 2, а радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^k}\right)z^k$ равен 3.

2) Ряды $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ и $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)z^k$ имеют радиусы сходимости, равные 1. А их сумма имеет радиус сходимости $+\infty$, поскольку сумма равна нулевому ряду.

§ 12. Ряды Тейлора

Ряды Тейлора – это естественное обобщение формулы Тейлора на случай бесконечно дифференцируемых функций. В предыдущей лекции мы интересовались сходимостью данного степенного ряда. Сейчас в качестве исходного объекта берется функция f. Затем по ней определяется степенной ряд по образцу формулы Тейлора. После чего решается вопрос сходимости этого ряда именно к той функции, которая его породила.

12.1. Степенные ряды с действительными членами. В предыдущей лекции мы убедились в том, что теория степенных рядов естественно выглядит на комплексной прямой. Ряды Тейлора также естественно исследовать на $\mathbb{C}$, однако для этого требуются продвинутые знания о функциях комплексной переменной. Поэтому сейчас мы вынуждены ограничиться случаем рядов с действительными коэффициентами от действительной переменной $x \in \mathbb{R}$. Прежде всего уточним результаты теории с.р. на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим действительный степенной ряд (д.с.р.) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$, где $a_k, x, x_0 \in \mathbb{R}$. Поскольку д.с.р. можно рассматривать как комплексный, трактуя **переменную** $x \in \mathbb{Z}$ как комплексную, то радиус сходимости д.с.р. можно определить по офрмуле Коши-Адамара (), положив $c_k = a_k$. Поскольку центр круга сходимости $x_0 \in \mathbb{R}$, то пересечение круга сходимости с действительной прямой есть **интервал сходимости** $(x_0 - R, x_0 + R)$. Теперь мы можем уточнить утверждения теоремы 11.8 "о формальном интегрировании и дифференцировании с.р."

Теорема 12.1. *(об интегрировании и дифференцировании д.с.р.) Пусть д.с.р.* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = f(x)$ *имеет положительный радиус сходимости* $R > 0$. *Тогда:*

1. *для любого* $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ *справедлива формула почленного интегрирования*
$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1}; \tag{12.1}$$

2. *в интервале сходимости* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *функция* f *имеет производные любого порядка, причем для любого* $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ *и для любого* $n \in \mathbb{N}$ *справедлива формула почленного дифференцирования*
$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k((x-x_0)^k)^{(n)}; \tag{12.2}$$

3. *коэффициенты степенного ряда* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = f(x)$ *определяются по функции* f *формулой*
$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}. \tag{12.3}$$

Доказательство. 1) Возьмем произвольное $r \in (|x-x_0|, R)$. Данный ряд равномерно сходится на отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$ (теорема 11.3 п.2). Поэтому, применяя теорему 10.10, получаем формулу (12.1).

2) Во-первых, ряд (12.2) сходится при $x = x_0$. Во-вторых, в силу теоремы 11.8, радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k k(x-x_0)^{k-1}$, полученного формальным дифференцированием, равен R. Поэтому на отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$, который определен нами в предыдущем пункте доказательства, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k k(x-x_0)^{k-1}$ сходится равномерно (теорема 11.3 п.2). В силу теоремы 10.11, получаем формулу (12.2) при $n = 1$. Применяя те же рассуждения произвольное конечное количество раз, получаем формулу (12.2) для произвольного n.

3) Заметим, что в случае совпадения степени одночлена и порядка дифференцирования производная $((x-x_0)^k)^{(k)}|_{x=x_0} = k!$. Если же $n \neq k$, то $((x-x_0)^k)^{(n)}|_{x=x_0} = 0$. Поэтому из формулы (12.2) следует, что $f^{(k)}(x_0) = a_k k!$. ■

Из п. 3 теоремы 12.1 следует очевидное, но важное

Следствие 12.1. *(о единственности разложения функции в действительный степенной ряд) Если функция f представима на некотором **интервале** в виде суммы д.с.р., то коэффициенты этого ряда определяются единственным способом через производные $f^{(k)}(x_0)$ по формуле (12.3).*

12.2. Ряд Тейлора.

Дадим

Определение 12.1. (основные определения, мотивированные следствием 12.1)

1. Функция f называется **бесконечно дифференцируемой** в т. x_0, если для любого $k \in \mathbb{N}$ существует производная $f^{(k)}(x_0)$.
2. Пусть функция f бесконечно дифференцируема в точке x_0. Степенной ряд
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{12.4}$$
называют **рядом Тейлора** функции f в точке x_0.
3. Функция f называется **регулярной** в точке x_0, если она бесконечно дифференцируема в этой точке и ее ряд Тейлора в точке x_0 **сходится к этой же функции f в некоторой окрестности точки** x_0, т.е.
$$\exists \delta > 0: \ \forall x \in U_\delta(x_0) \ \hookrightarrow \ f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Обсудим определения 12.1. Рассмотрим четыре объекта: 1) регулярную в точке x_0 функцию f; 2) функцию f, которая бесконечно дифференцируема в окрестности $U_\delta(x_0)$; 3) ряд Тейлора (12.4) функции f; 4) степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$, у которого радиус сходимости $R > 0$. Между ними имеются связи, которые мы должны прояснить.

1. 1) ⇒ 2): регулярная в точке x_0 функция, в силу теоремы 12.1 п. 2, является бесконечно дифференцируемой в некоторой окрестности этой точки.
2. 2) ⇒ 3): в силу определения (12.4).

3. 1) $\Leftrightarrow$ 4) в силу теоремы 12.1. п. 3; другими словами, если степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ имеет положительный радиус сходимости, то он (ряд) порождает функцию (сумму ряда!) внутри интервала сходимости, для которой этот же ряд является рядом Тейлора ($a_k = f^{(k)}(x_0)/k!$), а функция является регулярной в точке x_0.

Однако из 2) в общем случае НЕ следует 1), т.е. существует бесконечно дифференцируемая функция, порождающая ряд Тейлора, который (ряд) к ней НЕ сходится ни в какой сколь угодно малой окрестности точки x_0.

Контрпример. Рассмотрим функцию

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, \text{ если } x \neq 0, \\ 0, \text{ если } x = 0 \end{cases},$$

которая отлична от нуля всюду, кроме точки $x_0 = 0$. Оказывается, в нуле производная любого порядка $h^{(k)}(0) = 0$. Следовательно все коэффициенты ряда Тейлора данной функции в точке $x_0 = 0$ равны нулю. Значит, сумма ряда Тейлора равна тождественному нулю на всей оси и НЕ совпадает с данной функцией ни в одной точке (кроме $x_0 = 0$).

Задача. Докажите, что $h'(0) = 0$, воспользовавшись заменой $x^2 = 1/t$.

Задача. Чему равен остаточный член $r_n(x)$ $(n = 1, 2, ...)$ формулы Маклорена функции $h(x)$?

Возникает естественный вопрос: каковы условия сходимости ряда Тейлора именно к той функции, которая его породила? Другими словами, каковы условия регулярности функции? Чтобы ответить на него, мы воспользуемся остаточным членом формулы Тейлора

$$r_n(x) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x) - S_n(x),$$

где $S_n(x)$ – одновременно и многочлен Тейлора, и частичная сумма ряда Тейлора функции f в точке x_0.

Лемма 12.1. *(критерий регулярности функции в терминах остаточного члена формулы Тейлора) Функция f является регулярной в точке x_0 тогда и т.т., когда*

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0.$$

Доказательство. Достаточно определение регулярности 12.1 п. 3 сопоставить с определением 9.1 п. 3 суммы ряда. ■

Леммы 12.1 бесполезна для конкретной проверки регулярности. Здесь может помочь "грубая"

Теорема 12.2. *(достаточные условия регулярности) Пусть функция f бесконечно дифференцируема в некоторой δ-окрестности точки x_0 и все ее производные равномерно ограничены в этой окрестности, т.е.*

$$\exists \delta > 0 \ \wedge \ \exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \ \wedge \ \forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow \exists f^{(n)}(x) \ \wedge \ |f^{(n)}(x)| \leqslant M.$$

Тогда функция регулярна в точке x_0 и ее ряд Тейлора сходится к ней в той же δ-окрестности точки x_0:

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Доказательство. Остаточный член формулы Тейлора запишем в форме Лагранжа: $r_n(x) = (f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!)(x-x_0)^{(n+1)}$, где $x \in U_\delta(x_0)$, а ξ лежит строго между x_0 и x. Из условия теоремы получаем равномерную для всех $x \in U_\delta(x_0)$ оценку сверху: $|r_n(x)| \leqslant M\delta^{n+1}/(n+1)!$. Остется показать, что с ростом n дробь $d_{n+1} := \delta^{n+1}/(n+1)!$ стремится к нулю, иначе говоря, степенная функция растет медленнее, чем факториал. Но отношение $d_{n+1}/d_n = \delta/(n+1) \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому последовательность d_n убывает к нулю бастрее, чем геометрическая прогрессия с произвольным показателем $q \in (0,1)$. ■

Поскольку доказательство регулярности функции в точке сводится к оценке остаточного члена формулы Тейлора, полезно иметь в запасе разные способы его представления. Кроме форм Пеано и Лагранжа, нам понадобятся еще две.

Теорема 12.3. *(формула остаточного члена в интегральной форме) Если функция f на интервале $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ имеет непрерывные производные до порядка $(n+1)$ включительно, то остаточный член формулы Тейлора равен*

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \text{ для любого } x \in (x_0-\delta, x_0+\delta). \qquad (12.5)$$

Доказательство индукцией. При $n=0$ получаем:

$$r_0(x) := f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = \frac{1}{0!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^0 f^{(0+1)}(t)dt,$$

т.е. утверждение справедливо.

Пусть теорема справедлива для n, т.е. верно тождество (12.5). Интегрируя его по частям, получаем

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\left(\frac{-1}{n+1}\right)d((x-t)^{n+1}) =$$

$$-\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}\Big|_{x_0}^{x} + \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)dt =$$

$$\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)dt.$$

Но, по определению,

$$r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1} + r_{n+1}(x).$$

Поэтому

$$r_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)dt. \blacksquare$$

Следствие 12.2. *(формула остаточного члена в форме Коши) В условиях теоремы 12.3 для $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ справедливо тождество:*

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta\Delta x) \cdot (1-\theta)^n \Delta x^{n+1}, \tag{12.6}$$

где $\Delta x = x - x_0$, $\theta = \theta(n, x) \in (0, 1)$.

Доказательство. Применим к интегралу (12.5) теорему о среднем, взяв в качестве первого сомножителя $\alpha(x)$ всё подынтегральное выражение, а в качестве второго (знакопостоянного!) сомножителя функцию $\beta(x) \equiv 1$:

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} ((x-t)^n f^{(n+1)}(t)) \cdot 1 \cdot dt = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta\Delta x) \cdot (\Delta x - \theta\Delta x)^n \Delta x.$$

Остается вынести в предпоследней скобке общий множитель Δx. ■

Задача. Из формулы (12.5) получите форму остаточного члена в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x^{n+1}.$$

Замечание. При оценке сверху форма Коши "проигрывает" форме Лагранжа в первом сомножителе: $1/(n+1)! : 1/n! = 1/(n+1)$. Но "выигрывает" за счет сомножителя $(1-\theta)^n$.

12.3. Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций. Мы уже умеем раскладывать по **формуле** Тейлора основные элементарные функции до любого конечного порядка. Поэтому записать ряд Тейлора этих функций не представляет проблемы. Но возникает принципиальный вопрос: где эти ряды сходятся к исходной функции? Мы ответим на него с помощью теорем 12.2 и следствия 12.2. По аналогии с формулой, ряд Тейлора функции f в точке $x_0 = 0$ мы называем **рядом Маклорена** этой функции.

Теорема 12.4. *Ряды Маклорена функций $e^x, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x, \cos x, \sin x$ сходятся к этим функциям на всей числовой прямой. Т.е. для любого $x \in \mathbb{R}$ справедливо*

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \tag{12.7}$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \tag{12.8}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{12.9}$$

Доказательство. Поскольку для любого $x \in (-\delta, \delta)$ и произвольного $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка $|(e^x)^{(n)}| = e^x < e^\delta := M$, то для функции $y = e^x$ выполнено достаточное условие регулярности в точке $x_0 = 0$ на **произвольном** интервале $(-\delta, \delta)$ (теорема 12.2). Что доказывает тождество (12.7) на $\mathbb{R}$.

Аналогично доказываются тождества (12.8) и (12.9). ■

Теорема 12.5. *Ряд Маклорена степенной функции* $f(x) = (1+x)^\alpha$, *где* $\alpha \in \mathbb{R} \ \wedge \ \alpha \neq 0, 1, 2...$, *сходится к ней на интервале* $x \in (-1, 1)$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k x^k, \ \forall x \in (-1,1), \tag{12.10}$$

где $C_\alpha^0 = 1, \ C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}, k \in \mathbb{N}$.

При $\alpha = 0, 1, 2...$ *разложение* (12.10) *вырождается в конечный многочлен степени* n *(бином Ньютона):*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k, \ x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Применяя к ряду (12.10) признак Даламбера, убеждаемся, что он сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$. Докажем, что он сходится именно к функции $f(x) = (1+x)^\alpha$. Запишем остаточный член в форме Коши:

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}(1-\theta)^n x^{n+1}.$$

Поскольку $|x| < 1$, а $0 < \theta < 1$, то $0 < 1-\theta < 1+\theta x$. Поэтому

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{|\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)|}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-1}|x|^{n+1} \leqslant \frac{|\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)|}{n!}|x|^{n+1} \cdot 2^{\alpha-1}.$$

Отношение соседних членов последовательности $d_n := \frac{|\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)|}{n!}|x|^{n+1}$ равно

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{|\alpha-n-1|}{n+1}|x| = \left(1 - \frac{\alpha}{n+1}\right)|x| < |x| < 1$$

для всех достаточно больших n. Значит, при любом фиксированном $x \in (-1, 1)$ остаточный член стремится к нулю быстрее убывающей геометрической прогрессии с коэффициентом $|x|$. ■

Выпишем наиболее часто встречающиеся случаи формулы (12.10).

$$a) \ \ \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k, \quad (b) \ \ \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \tag{12.11}$$

$$a) \ \ \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{2^k k!} x^k, \quad b) \ \ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^k. \tag{12.12}$$

Из формулы (12.11) п. a) и теоремы 12.1 п. 1 о почленном интегрировании следует, что

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}, \quad x \in (-1,1).$$

Из формулы (12.11) п. a) после подстановки $x = t^2$ и применении теоремы 12.1 п. 1 получаем:

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x \in (-1,1).$$

Наконец, из формулы (12.12) п. b) после подстановки $x = t^2$ и интегрирования получаем

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad x \in (-1,1).$$

Задача. Найдите ряд Маклорена функций $f_{\pm}(x) = \sqrt{1 \pm x}$

12.4. Разложение в степенной ряд комплекснозначной функции e^z. Пусть комплексное число $z = x+iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$. Согласно данному ранее определению экспоненты, $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. С другой стороны, нами получены ряды Маклорена для e^x, $\cos x$, $\sin x$, которые естественно распространить на всю комплексную прямую.

Теорема 12.6. *(о ряде Маклорена комплексной экспоненты) Для любого $z \in \mathbb{C}$ справедливо равенство*

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \ . \tag{12.13}$$

Доказательство. Из теоремы 12.4 следует, что радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty}(z^k/k!)$ равен бесконечности (обоснуйте!). Поэтому этот ряд для любого $z \in \mathbb{C}$ сходится абсолютно (теорема 11.3 п. 1a). Рассмотрим сумму исследуемого ряда

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \ . \tag{12.14}$$

Требуется доказать, что $f(z) = e^z$, что равносильно равенству $f(x+iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$

Сначала покажем, что для формулы (12.14) выполняется так называемое **групповое свойство** экспоненты:

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1) f(z_2),$$

т.е. сложение аргументов (показателей) приводит к перемножению функций (степеней). По теореме 9.13 о перемножении абсолютно сходящихся рядов имеем

$$f(z_1)f(z_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z_1^{k_i}}{k_i!} \frac{z_2^{n_i}}{n_i!},$$

где $\{(k_i, n_i)\}$ – **произвольная** последовательность пар номеров, порожденная биекцией между множеством $\mathbb{N}$ натуральных чисел i и множеством $(\mathbb{N} \cup \{0\})^2$ упорядоченных пар (k, n) неотрицательных целых чисел. Определим биекцию "методом диагоналей". Т.е. первый элемент – это пара $(0,0)$. Затем идут две пары $(1,0), (0,1)$, у которых **сумма** элементов равна единице. Затем идут три пары $(2,0), (1,1), (0,2)$, у которых **сумма** элементов равна двум. И т.д. При таком пересчете мы группируем слагаемые с фиксированной **суммой** элементов: $k_i + n_i = m = const$. Теперь сумму можно переписать так:

$$f(z_1)f(z_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z_1^{k_i}}{n_i!} \frac{z_2^{n_i}}{n_i!} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{z_1^k z_2^{m-k}}{k!(m-k)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} z_1^k z_2^{m-k}.$$

Мы получили бином Ньютона, поэтому

$$f(z_1)f(z_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(z_1+z_2)^m = f(z_1+z_2).$$

Применяя доказанное свойство и формулу (12.14), имеем:

$$f(z) = f(x+iy) = f(x)\cdot f(iy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} =$$

$$e^x \left(\sum_{k-\text{четн.}}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} + \sum_{k-\text{неч.}}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} \right) = e^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) =$$

$$e^x(\cos y + i\sin y) = e^{x+iy} = e^z. \blacksquare$$

По аналогии с **доказанной** формулой (12.13) **определим** тригонометрические и гиперболические функции для комплексной переменной с помощью ранее полученных вещественных рядов (12.8) и (12.9): для любого $z \in \mathbb{C}$ положим

$$\operatorname{ch} z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \operatorname{sh} z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Из теоремы 12.4 следует, во-первых, что радиус сходимости этих рядов равен $+\infty$. Во-вторых, при действительных z определенные выше функции совпадают с тригонометрическими и гиперболическими функциями действительного аргумента; т.е. выполнен принцип преемственности.

Следствие 12.3. *(формулы Эйлера для произвольного комплексного аргумента) Для любого $z \in \mathbb{C}$ справедливы равенства*

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z,$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Доказательство. Из (12.13), подставив iz вместо z, получаем:

$$e^{iz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos z + i\sin z. \blacksquare$$

Задача. Опираясь на доказанную формулу, докажите остальные формулы из следствия 12.3.

§ 13. Мера Жордана

Мера Жордана (МЖ) – обобщение понятия длины отрезка на прямой, площади плоской фигуры и объема пространственной фигуры. Понятие МЖ связано с основными теоретико-множественными понятиями (объединение, пересечение, дополнение) и с топологическими понятиями (внутренность, замыкание, граница).

13.1. Вспомогательные понятия и утверждения.

Определение 13.1. **Клеткой** в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ называют замкнутый прямоугольный параллелепипед

$$\Pi := \{x = (x_1, ..., x_n) : \ a_k \leqslant x_k \leqslant b_k, \ k = 1, ..., n\},$$

где числа $a_k \leqslant b_k$. **Мерой клетки** называется неотрицательное число $\mu(\Pi) := (b_1 - a_1) \cdot ... \cdot (b_n - a_n)$, т.е. произведение длин сторон параллелепипеда.

Граница клетки $\partial\Pi$ представляет собой объединение всех точек, у которых хотя бы одна координата равна концу отрезка (см. рис. ???):

$$\partial\Pi = \{x \in \Pi : \ \forall x \ \exists k = (x) : x_k = a_k \vee x_k = b_k\}.$$

Объединение клеток назовем **стыковкой**, если попарно клетки НЕ пересекаются по внутренним точкам. Отметим, что их пересечение по граничным точкам вполне допустимо, см. рис. ??? Обозначение стыковки $\sqcup_i \Pi_i$.

Рис. ???

Определение 13.2. Подмножество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется **клеточным**, если оно является **стыковкой конечного количества клеток**: $K = \sqcup_{i=1}^p \Pi_i$. **Мерой клеточного множества** называют сумму мер состыкованных клеток:

$$\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{p} \Pi_i\right) := \sum_{i=1}^{p} \mu(\Pi_i).$$

Пустое множество по определению считаем клеточным с нулевой мерой.

Замечание. Клеточное множество может быть состыковано бесконечным количеством способов, см. рис. ??? Объединение двух клеточных множеств назовем их стыковкой, если эти множества не пересекаются по внутренним точкам; оставим обозначение $K_1 \sqcup K_2$.

Без доказательства сформулируем

Предложение 13.1. *(основные свойства клеточных множеств)*

1. *Клеточное множество замкнуто:* $\overline{K} = K$.
2. *Если* K_1, K_2 *– клеточные множества, то их объединение* $K_1 \cup K_2$, *пересечение* $K_1 \cap K_2$ *и разность* $K_2 \setminus (Int K_1)$ *являются клеточными множествами (разность* $K_2 \setminus K_1$ *в общем случае НЕ является замкнутой!). Т.е. множество всех клеточных множеств* ***замкнуто*** *относительно основных теоретико-множественных операций (рис. ???).*

3. *Мера клеточного множества не зависит от способа его состыковки, что означает **корректность** определения меры клеточного множества.*
4. ***Аддитивность** меры при стыковке: $\mu(K_1 \sqcup K_2) = \mu(K_1) + \mu(K_2)$. Если существует **общая внутренняя точка** клеточных множеств, то имеет место **полуаддитивность**: $\mu(K_1 \cup K_2) < \mu(K_1) + \mu(K_2)$. См. рис. ???*
5. ***Монотонность** меры: если $K_1 \subset K_2$, то $\mu(K_1) \leqslant \mu(K_2)$ (рис. ???).*

Рис. ???

Задача. Докажите пп. 2-5 для одномерных и плоских клеточных множеств.

13.2. Измеримые множества.

Определение 13.3. (измеримого множества; Мари Энмон Камиль Жордан, 1838-1922) **Нижней мерой** Жордана $\mu_*(E)$ подмножества $E \subset \mathbb{R}^n$ называется супремум мер клеточных множеств K, которые содержатся в E; **верхней мерой** Жордана $\mu^*(E)$ подмножества $E \subset \mathbb{R}^n$ называется инфимум мер клеточных множеств K, которые содержат E:

$$\mu_*(E) := \sup_{K \subset E} \mu(K), \quad \mu^*(E) := \inf_{K \supset E} \mu(K).$$

Множество E называется **измеримым** по Жордану, если его нижняя и верхняя меры конечны и совпадают: $\mu_*(E) = \mu^*(E) < +\infty$. Число $\mu(E) := \mu_*(E) = \mu^*(E)$ называют **мерой** Жордана множества E.

Замечание. В отличие от понятий длины, площади и объема, мера множества зависит не только от самого множества, но и от "объемлющего" пространства. Так мера отрезка $[0,1] \subset \mathbb{R}$, принадлежащего прямой, равна единице. А мера, равного по длине отрезка $\{(x,y) \subset \mathbb{R}^2 : \ 0 \leqslant x \leqslant 1, y = 0\}$, принадлежащего плоскости, равна нулю (докажите!)

Сформулируем некоторые свойства измеримости.

Лемма 13.1. *(необходимое свойство измеримости) Если подмножество E измеримо, то оно ограничено.*

Доказательство. В силу определения 13.3, $E \subset K$, где K – клеточное множество, состоящее из **конечного** количества клеток. ■

Лемма 13.2. *(критерий отсутствия измеримости) Подмножество E неизмеримо тогда и т.т., когда $\mu_*(E) < \mu^*(E)$.*

Доказательство сразу следует из свойства 5 монотонности меры клеточных множеств и определения меры множества.

Пример. Множество $E = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ рациональных точек отрезка неизмеримо, поскольку его нижняя мера равна нулю, а верхняя единице (докажите!)

Задача. Дайте пример ограниченного неизмеримого плоского подмножества.

Лемма 13.3. *(критерий измеримости на языке ε-приближений) Подмножество E измеримо тогда и т.т., когда для любого $\varepsilon > 0$ существуют вписанное клеточное множеств $K_1 \subset E$ и описанное клеточное множество $K_2 \supset E$, меры которых различаются на ε, т.е. $\mu(K_2) - \mu(K_1) < \varepsilon$.*

Доказательство сразу следует из определения.

Лемма 13.4. *Множество E имеет нулевую меру тогда и т.т., когда оно принадлежит клеточному множеству K сколь угодно малой меры. Более того, множество K можно выбрать таким, чтобы E принадлежало его* ***внутренности****, т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K : \ E \subset Int(K) \wedge \mu(K) < \varepsilon.$$

Доказательство. По договоренности пустое множество $\varnothing = K_1 \subset E$ является клеточным и имеет меру ноль. Поэтому достаточность сразу следует из леммы 13.3.

Необходимость. В силу леммы 13.3 существует клеточное множество K_2, для которого $E \subset K_2$ и $\mu(K_2) < \varepsilon/2$. Пусть $K_2 = \sqcup_{i=1}^{p} \widehat{\Pi}_i$. Применим к каждой клетке $\widehat{\Pi}_i$ готмотетию с центром в центре клетки и коэффициентом $k = \sqrt[n]{2} > 1$ (см. рис. ???). Получим клетки Π_i меры $k^n \mu(\widehat{\Pi}_i)$ (докажите!). Объединение $K := \cup_{i=1}^{p} \Pi_i$ не является стыковкой клеток, однако оно является клеточным множеством (предложение 13.1 п. 2), а его мера оценивается **строго** сверху (предложение 13.1 п. 4):

$$\mu(K) = \mu(\cup_{i=1}^{p} \Pi_i) < k^n \mu(\widehat{\Pi}_i) = k^n \mu(K_2) < k^n \cdot \frac{\varepsilon}{2} = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Поскольку $\widehat{\Pi}_i \subset Int(\Pi_i)$, то $K_2 \subset Int(K)$. Следовательно $E \subset Int(K)$. Множество K – искомое. ■

Рис. ???

Следствие 13.1. *(конечная аддитивность множеств нулевой меры) Конечное объединение множеств нулевой меры имеет меру ноль.*

Доказательство достаточно осуществить для двух множеств E и F. Согласно лемме 13.4 (необходимость), существуют клеточные множества $K_1 \supset E$, $K_2 \supset F$, меры которых удовлетворяют оценкам $\mu(K_1) < \varepsilon/2$, $\mu(K_2) < \varepsilon/2$, где $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Но $E \cup F \subset K_1 \cup K_2$, а $\mu(K_1 \cup K_2) \leqslant \mu(K_1) + \mu(K_2) < \varepsilon$ (см. п. 4 предложения 13.1). Остается заметить, что объединение $K_1 \cup K_2$ есть клеточное множество и еще раз применить лемму 13.4 (достаточность). ■

Для доказательства основного утверждения нам потребуется

Лемма 13.5. *(о пересечении с границей) Если клетка Π пересекает подмножество E и его дополнение $E^C := \mathbb{R}^n \setminus E$, то она пересекает границу ∂E подмножества E.*

Доказательство. Пусть $x \in \Pi \cap E$, а $y \in \Pi \cap E^C$. Поскольку клетка **выпуклое** множество, то отрезок $[x, y] \subset \Pi \subset \mathbb{R}^n$ (см. рис. ???). Параметризуем $[x, y]$ числовым отрезком $[0, 1]$: рассмотрим **непрерывное** отображение

$$f : [0, 1] \to [x, y], \quad f(t) := (1 - t)x + ty.$$

По условию $f(0) = x \in E$. Поэтому существует $t_\partial = \sup\{t \in [0,1] : \ f(t) \in E\}$. Покажем, что $f(t_\partial) \in \partial E$. Если $t_\partial = 0$, то для всех $t > 0$ выполняется $f(t) \in E^C$. Значит, в силу непрерывности f, в любой окрестности точки $x \in E$ имеются точки из дополнения. Следовательно $x \in \partial E$. Аналогично рассматривается случай $t_\partial = 1$. Если $0 < t_\partial < 1$, то сколь угодно близко существуют числа $t < t_\partial$, для которых $f(t) \in E$, а для всех $t > t_\partial$ верно $f(t) \in E^C$. Опять же, в силу непрерывности f, в любой окрестности точки $f(t_\partial)$ имеются точки из E и точки из дополнения E^C. ■

Задача. Докажите лемму 13.5 методом половинного деления отрезка. Заметим, что точки границы, полученные разными доказательствами, могут отличаться (см. рис. ???)

Рис. ???

Перейдем к основному утверждению

Теорема 13.1. *(критерий измеримости в терминах границы множества) Подмножество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо тогда и т.т., когда оно ограничено и его граница имеет меру нуль.*

Замечание. В сформулированном утверждении проявляется связь между топологическими понятиями (граница множества) и измеримостью. Эта связь уточняется ниже в теореме 13.2.

Доказательство. Необходимость. Из леммы 13.1. следует ограниченность E. Покажем, что $\mu(\partial E) = 0$. Из леммы 13.3 следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют клеточные множества K_i $(i = 1, 2)$, для которых $K_1 \subset E \subset K_2$ и $\mu(K_2) - \mu(K_1) < \varepsilon$. Поскольку клеточные множества замкнуты (предложение 13.1 п. 1), то замыкание $\overline{E} \subset K_2$. Поэтому $\partial E \subset \overline{E} \subset K_2$. Рассмотрим разность $\Delta K := K_2 \setminus (IntK_1)$, которая является клеточным множеством (предложение 13.1 п. 2). Поскольку из K_2 удалены только **внутренние** точки множества $K_1 \subset E$, то разность ΔK, как и K_2, содержит целиком границу ∂E: $\partial E \subset \Delta K$. Теперь заметим, что клеточные множества ΔK и K_1 состыкованы (по определению ΔK), поэтому $K_2 = \Delta K \sqcup K_1$ (см. рис. ???). В силу аддитивности и монотонности меры клеточных множеств (предложение 13.1 пп. 4,5) получаем:

$$\mu(K_2) - \mu(K_1) < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ \mu(\Delta K \sqcup K_1) - \mu(K_1) < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ \mu(\Delta K) + \mu(K_1) - \mu(K_1) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \ \mu(\Delta K) < \varepsilon \ \Rightarrow \ \mu(\partial E) \leqslant \mu(\Delta K) < \varepsilon.$$

Из леммы 13.4 следует, что $\mu(\partial E) = 0$.

Достаточность. Поскольку $\mu(\partial E) = 0$, в силу леммы 13.4, по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое клеточное множество ΔK, что $\partial E \subset Int(\Delta K)$ и мера $\mu(\Delta K) < \varepsilon$. Далее, поскольку множества E и ΔK ограничены, существует клетка Π, содержащая оба эти множества: $E \cup (\Delta K) \subset \Pi$. Рассмотрим клеточное множество $\Pi \setminus Int(\Delta K)$ (см. рис. ???). Будучи клеточным, оно состыковано из конечного количества клеток:

$$\Pi \setminus (Int(\Delta K)) = \bigsqcup_{i=1}^{p} \Pi_i.$$

Поскольку граница ∂E принадлежит внутренности клеточного множества ΔK, $\forall i$ верно: $\Pi_i \subset Int(E) \cup Int(E^C)$, т.е. все клетки принадлежат объединению **внутренностей**. Если допустить, что существует клетка Π_i, пересекающаяся и с множеством $Int(E)$, и с множеством $Int(E^C)$, то (по лемме 13.5) клетка Π_i пересекается с границей, что невозможно. Значит каждая клетка Π_i или целиком лежит в $Int(E)$, или целиком лежит в $Int(E^C)$. Возьмем все клетки, целиком принадлежащие $Int(E)$. Их объединение K_1 является стыковкой, т.е. образует клеточное множество, причем $K_1 \subset Int(E) \subset E$. Более того, K_1 состыковано с клеточным множеством ΔK и, в силу определения K_1, справедливо вложение $E \subset K_2 := K_1 \sqcup \Delta K$. Остается заметить, что $\mu(K_2) - \mu(K_1) = \mu(\Delta K) < \varepsilon$. ■

Рис. ???

13.3. Свойства измеримых множеств. Измеримые множества наследуют многие свойства клеточных множеств, сформулированные в предложении 13.1. Чтобы их доказать нам потребуется

Лемма 13.6. *(граница и теоретико-множественные операции) Для любых подмножеств $E, F \subset \mathbb{R}^n$ справедливы включения:*

1. $\partial(E \cup F) \subset \partial E \cup \partial F$,
2. $\partial(E \cap F) \subset \partial E \cup \partial F$,
3. $\partial(E \setminus F) \subset \partial E \cup \partial F$.

Доказательство п. 1. Пусть точка $x \in \partial(E \cup F)$. По определению, в любой ее окрестности находится точка из $E \cup F$ и точка из дополнения $(E \cup F)^C$. Значит, выполнено по крайней мере одно из условий: 1) в любой ее окрестности находится точка из E, 2) в любой ее окрестности находится точка из F. Поскольку $(E \cup F)^C \subset E^C \cap F^C$, то в первом случае x является граничной точкой для E, а во втором случае – граничной для F.

Остальные пункты доказываются аналогично. (Докажите!) ■

Теорема 13.2. *(о теоретико-множественных операциях с измеримыми множествами) Если множества E и F измеримы, то*

1. ***замкнутость*** *измеримых множеств относительно теоретико-множественных операций: множества $E \cup F$, $E \cap F$ и $E \setminus F$ измеримы;*
2. ***монотонность*** *меры: если $E \subset F$, то $\mu(E) \leqslant \mu(F)$;*
3. ***полуаддитивность*** *меры: $\mu(E \cup F) \leqslant \mu(E) + \mu(F)$;*
4. ***аддитивность*** *меры: если множества E и F не имеют* ***общих внутренних*** *точек, то $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$;*
5. *мера множества сосредоточена в его внутренности: $Int(E)$ и $\overline{E}$ измеримы, причем $\mu(E) = \mu(Int E) = \mu(\overline{E})$.*

Доказательство п. 1 об объединении измеримых множеств следует из леммы 13.6, следствия 13.1 и критерия измеримости теоремы 13.1:

$$\partial(E \cup F) \subset \partial E \cup \partial F \;\Rightarrow\; \mu(\partial(E \cup F)) = 0 \;\Rightarrow\; E \cup F \text{ измеримо.}$$

Аналогично с пересечением и дополнением измеримых множеств.

Доказательство п. 2. Заметим, что, в силу измеримости множеств, их меру можно определить или только по вписанным клеточным множествам, или только по описанным. Пусть $K_1 \subset E$ и $F \subset K_2$, где K_1, K_2 – клеточные множества. Тогда $K_1 \subset K_2$. Следовательно, в силу п. 5 предложения 13.1, $\mu(K_1) \leqslant \mu(K_2)$. Поскольку оценка выполняется для любых клеточных множеств, то $\mu(E) = \sup_{\text{впис}K_1} \mu(K_1) \leqslant \inf_{\text{опис}K_2} \mu(K_2) = \mu(F)$.

Доказательство п. 3. Пусть $E \subset K_1$, $F \subset K_2$, где K_1, K_2 – клеточные множества. Тогда $E \cup F \subset K_1 \cup K_2$. Поэтому (в силу доказанного п. 3 и п. 4 предложения 12.1) $\mu(E \cup F) \leqslant \mu(K_1 \cup K_2) \leqslant \mu(K_1) + \mu(K_2)$. Опять же, поскольку оценка выполняется для любых клеточных множеств K_1, K_2, в правой части неравенства можно взять инфимумы:

$$\mu(E \cup F) \leqslant \inf_{\text{опис}K_1} \mu(K_1) + \inf_{\text{опис}K_2} \mu(K_2) = \mu(E) + \mu(F).$$

Доказательство п. 4. Как в доказательстве достаточности теоремы 13.1, возьмем клеточное множество ΔK_E, внутренность которого содержит границу ∂E, и состыкованное с ΔK_E такое клеточное множество K_E, которое содержится во внутренности E и $E \subset K_E \cup \Delta K_E$. Аналогично для множества F построим клеточные множества ΔK_F и K_F (см. рис. ???). Тогда (в силу п. 4 предложения 13.1, поскольку внутренности K_E и K_F не пересекаются) $\mu(K_E \cup K_F) = \mu(K_E) + \mu(K_F)$. При условии $\mu(\Delta K_E) \to 0$ и $\mu(\Delta K_F) \to 0$ (что возможно благодаря измеримости E и F) получаем: $\mu(K_E \cup K_F) \to \mu(E \cup F)$, $\mu(K_E) \to \mu(E)$, $\mu(K_F) \to \mu(F)$. В пределе равенство сохраняется, поэтому получаем требуемое.

Доказательство п. 5. следует из измеримости границы измеримого множества, доказанных выше пп. 1,3,4, включений $\partial(IntE) \subset \partial E$, $\partial \overline{E} \subset \partial E$ и критерия измеримости (теорема 13.1). ■

Рис. ???

Задача. Дайте развернутое доказательство п. 5 теоремы 13.2 по образцу доказательства п. 1.

Задача. Докажите **конечную аддитивность** меры Жордана: если любые два измеримых подмножества E_i и E_j из конечной совокупности подмножеств E_i $(i = 1, ..., k)$ не имеют общих внутренних точек, то мера их объединения равна сумме мер: $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu(E_i)$.