СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Самарова С.С.

II курс, теория вероятностей, лектор А.В. Булинский, гр. 855

СОДЕРЖАНИЕ

ПОНЯТИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ 1
БОРЕЛЕВСКИЕ МНОЖЕСТВА 2
ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ 5
ОСНОВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН 6
ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ 7
НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ 8
ОСНОВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН 11

ПОНЯТИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Во многих вероятностных задачах приходится не только вычислять вероятности каких-либо конкретных событий, но и исследовать числовые характеристики случайных экспериментов, точные значения которых заранее неизвестны и зависят от того, какой из элементарных исходов случайного эксперимента будет реализован.

Для решения подобных задач вводится понятие случайной величины.

Случайная величина является числовой функцией, определенной на множестве элементарных исходов, и поэтому предсказать заранее, какое из своих значений она примет, как правило, невозможно. Можно лишь указать вероятность, с которой случайная величина будет принимать то или иное значение, или указать вероятность того, что её значения будут находиться в каком-либо числовом промежутке.

Количество очков, выпадающих при бросании игральной кости, или время, которое требуется автобусу для прохождения маршрута в час пик, могут служить простейшими примерами случайных величин.

Дадим точное определение случайной величины.

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, F, P).

Определение 1. Числовую функцию $\xi(\omega)$, определенную для всех $\omega \in \Omega$, называют *случайной величиной* (или *измеримой функцией*), если для любого числа c выполнено условие

$$\{\omega \in \Omega : \quad \xi(\omega) \le c\} \in F \,. \tag{1}$$

Определение 2. *Законом распределения* (или просто *распределением*) *случайной величины* $\xi(\omega)$ называют правило, позволяющее находить вероятность попадания значений $\xi(\omega)$ в любой заданный числовой промежуток.

БОРЕЛЕВСКИЕ МНОЖЕСТВА

По своему смыслу определение случайной величины означает, что множество (1) является событием, и для любого числа c можно найти вероятность того, что значения случайной величины попадут в полуинтервал $(-\infty, c]$.

Поскольку F является σ-алгеброй, то для случайной величины можно также вычислить и вероятность попадания ее значений в любое множество, полученное из полуинтервалов вида $(-\infty, c]$ при помощи конечного или счетного числа операций объединения, пересечения или дополнения. Другими словами, можно найти вероятность попадания значений случайной величины в любое множество из минимальной σ-алгебры, содержащей полуинтервалы вида $(-\infty, c]$.

Определение 3. *Борелевской* σ-*алгеброй на* $(-\infty, +\infty)$ называют минимальную σ-алгебру, которая содержит все полуинтервалы вида $(-\infty, c]$ для $\forall c \in R$. Элементы борелевской σ-алгебры называют *борелевскими множествами*.

Борелевскую σ-алгебру на $(-\infty, +\infty)$ обозначают $\mathcal{B}(-\infty, +\infty)$

Для того, чтобы лучше понять, какие множества входят в σ-алгебру $\mathcal{B}(-\infty, +\infty)$, решим следующую задачу.

Задача 1. Доказать, что борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}(-\infty, +\infty)$ совпадает с минимальной σ-алгеброй, построенной на всех множествах любого из следующих шести типов:

1) $(a, b]$; 2) (a, b); 3) $[a, b)$; 4) $[a, b]$;

5) открытые множества; 6) замкнутые множества.

Решение.

1) Заметим, что для любых действительных чисел a, b, c выполнены соотношения

$$(a, b] = (a, +\infty) \cap (-\infty, b] = \overline{(-\infty, a]} \cap (-\infty, b],$$

$$(-\infty, c] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (c-n,\ c].$$

Поэтому минимальная σ-алгебра, построенная на промежутках $(a,b]$, совпадает с $\mathcal{B}(-\infty,+\infty)$.

2) Поскольку верны равенства:

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(a,\ b-\frac{1}{n}\right],$$

$$(-\infty, c] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(c-n,\ c+\frac{1}{n}\right),$$

то справедливость пункта 2) вытекает из пункта 1).

3) Для доказательства пункта 3) воспользуемся следующими соотношениями:

$$[a,b) = (a,b) \cup \{b\} = (a,b) \cup \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(b-\frac{1}{n},\ b+\frac{1}{n}\right),$$

$$(-\infty, c] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[c-n,\ c+\frac{1}{n}\right).$$

Как мы уже выяснили в пункте 2) , минимальная σ-алгебра, содержащая все интервалы (a,b), совпадает с $\mathcal{B}(-\infty,+\infty)$,поэтому и справедливость пункта 3) доказана.

4) Из равенств

$$[a,b] = [a,b) \cup \{b\} = [a,b) \cup \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(b-\frac{1}{n},\ b+\frac{1}{n}\right),$$

$$(-\infty, c] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [c-n,\ c]$$

и доказанного выше следует, что и минимальная σ-алгебра, содержащая все отрезки $[a,b]$, также совпадает с $\mathcal{B}(-\infty,+\infty)$.

5) Поскольку каждый полуинтервал вида $(-\infty, c]$ является дополнением до открытого множества $(c,+\infty)$, то $\mathcal{B}(-\infty,+\infty)$ входит в минимальную σ-алгебру, содержащую все открытые множества.

Покажем теперь, что верно и обратное включение. С этой целью рассмотрим произвольное открытое множество A и все такие рациональные числа q и r, для которых интервалы $U_r(q) = (q-r,\ q+r)$ целиком входят в множество A. Таких интервалов счетное множество и объединение всех этих интервалов

$$A' = \bigcup_{\substack{r,q:\\ U_r(q)\subset A}} U_r(q)$$

содержится в множестве A.

Теперь докажем, что и множество A входит в множество A'. С этой целью заметим, что все рациональные точки $q \in A$ принадлежат и множеству A'. Что же касается иррациональных точек, то для любой иррациональной точки $x \in A$ по определению открытого множества существует интервал $U_\delta(x) \subset A$. Выберем рациональные точки $q_1 \in (x-\delta, x)$ и $q_2 \in (x, x+\delta)$. Тогда, полагая

$$q = \frac{q_1 + q_2}{2}, \quad r = \frac{q_2 - q_1}{2},$$

замечаем, что $x \in U_r(q) \subset A$. Таким образом, доказано, что все точки множества A принадлежат множеству A'. Следовательно,

$$A = \bigcup_{\substack{r,q: \\ U_r(q) \subset A}} U_r(q),$$

что и завершает доказательство пункта 5).

6) Поскольку любое замкнутое множество является дополнением к открытому множеству, а любое открытое множество является дополнением к замкнутому множеству, то из справедливости пункта 5) вытекает, что борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}(-\infty, +\infty)$ является минимальной σ-алгеброй, содержащей все замкнутые множества.

Замечание 1 (*Борелевская σ-алгебра на отрезке*). Борелевскую σ-алгебру можно ввести и на любом отрезке $[\alpha, \beta]$ как наименьшую σ-алгебру, содержащую все подмножества данного отрезка $[\alpha, \beta]$, относящиеся к одному (любому!) из шести перечисленных в задаче 1 типов. Как и в задаче 1, все шесть построенных таким способом σ-алгебр будут совпадать. Борелевскую σ-алгебру на отрезке $[\alpha, \beta]$ обозначают $\mathcal{B}([\alpha, \beta])$.

Замечание 2 (*Борелевская σ-алгебра в R^n*). Борелевскую σ-алгебру в R^n определяют как наименьшую σ-алгебру, содержащую все открытые множества в R^n, и обозначают $\mathcal{B}(R^n)$. Как и в одномерном случае, $\mathcal{B}(R^n)$ можно получить и из других наборов множеств. Например, в качестве множеств, порождающих σ-алгебру $\mathcal{B}(R^n)$, можно взять n - мерные параллелепипеды $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$.

С помощью борелевских множеств можно дать другие определения для случайной величины и ее закона распределения, эквивалентные определениям 1 и 2 соответственно. Именно эти определения чаще всего используются в специальной литературе по теории вероятностей.

Определение 4. Числовую функцию $\xi(\omega)$, определенную для всех $\omega \in \Omega$, называют *случайной величиной* (или *измеримой функцией*), если для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}(-\infty, +\infty)$ выполнено условие

$$\{\omega \in \Omega : \quad \xi(\omega) \in B\} \in F . \tag{2}$$

Определение 5. *Законом распределения* (или просто *распределением*) *случайной величины* $\xi(\omega)$ называют правило, позволяющее находить вероятность попадания значений $\xi(\omega)$ в любое борелевское множество $B \in \mathcal{B}(-\infty, +\infty)$.

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Определение 6. Случайную величину называют *дискретной*, если она принимает конечное или счетное множество значений.

Для того, чтобы задать дискретную случайную величину, достаточно задать ее закон распределения.

Определение 7. *Законом распределения дискретной случайной величины* ξ называют набор ее значений $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ и вероятностей $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$, с которыми эти значения принимаются:

$$p_k = P\{\xi = x_k\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Замечание. Поскольку для каждого $\omega \in \Omega$ случайная величина принимает какое-нибудь из своих значений, то справедливо равенство:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k + \dots = 1 . \tag{3}$$

Для удобства закон распределения дискретной случайной величины часто записывают в виде таблицы:

ξ :

x_1	x_2	...	x_k	...
p_1	p_2	...	p_k	...

Задача 2. Распределение случайной величины ξ задано формулами:

$$P\{\xi = k\} = \frac{C}{k(k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Найти: а) постоянную C; б) $P\{\xi \le 3\}$; в) $P\{4 \le \xi \le 15\}$.

Решение. а) Используя формулу (3), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C}{k(k+1)} = C \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = C \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right) = C = 1 .$$

б) Воспользовавшись значением константы С, найденным в пункте а), находим

$$P\{\xi \le 3\} = P\{\xi = 1\} + P\{\xi = 2\} + P\{\xi = 3\} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} =$$
$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

в) Теперь подсчитаем вероятность попадания случайной величины ξ в промежуток $4 \le \xi \le 15$:

$$P\{4 \le \xi \le 15\} = P\{\xi = 4\} + \ldots P\{\xi = 15\} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} =$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16} = 0,1875.$$

Ответ: а) 1; б) 0,75; в) 0,1875.

ОСНОВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Приведем важные и широко распространенные в приложениях законы распределения дискретных случайных величин.

1. *Геометрическое распределение с параметром* p $(0 < p < 1)$:

случайная величина ξ принимает значения 1,2,3,... с вероятностями

$$p_k = P\{\xi = k\} = p \cdot q^{k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \text{ где } q = 1 - p.$$

2. *Биномиальное распределение с параметром* p $(0 < p < 1)$:

случайная величина ξ принимает значения 0,1,2,3,..., n с вероятностями

$$p_k = P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n), \text{ где } q = 1 - p.$$

3. *Распределение Пуассона с параметром* λ $(\lambda > 0)$:

случайная величина ξ принимает значения 0,1,2,3,... с вероятностями

$$p_k = P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots). \tag{4}$$

Таблица вероятностей p_k для ряда значений параметра λ приведена практически в каждом учебнике и задачнике по теории вероятностей. Конечно же, ее можно найти и в Интернете.

Проверим выполнение соотношения (3) для каждого из этих распределений.

1. Для геометрического распределения с параметром p $(0 < p < 1)$ воспользуемся формулой для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_k + \ldots = p + p \cdot q + p \cdot q^2 + \ldots = \frac{p}{1 - q} = 1.$$

2. Для биномиального распределения с параметром p $(0 < p < 1)$ требуемое соотношение обеспечивает формула бинома Ньютона:

$$p_0 + p_1 + \ldots + p_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$$

3. Для распределения Пуассона воспользуемся разложением экспоненты в ряд Тейлора:

$$p_0 + p_1 + \ldots + p_k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Как мы уже отмечали, из определения случайной величины вытекает, что множество (1) является событием и для него можно найти вероятность. По этой причине с помощью следующего определения с каждой случайной величиной можно связать функцию, называемую функцией распределения рассматриваемой случайной величины.

Определение 8. *Функцией распределения случайной величины* $\xi(\omega)$ называют числовую функцию $F_\xi(x)$, заданную формулой

$$F_\xi(x) = P\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \le x\}. \qquad (5)$$

Функция распределения случайной величины обладает следующими *свойствами*:

1) $0 \le F_\xi(x) \le 1$ для всех значений $x \in R$,

2) функция $F_\xi(x)$ не убывает для всех $x \in R$,

3) функция $F_\xi(x)$ непрерывна справа для всех $x \in R$,

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$,

5) для любых чисел $a \in R$ и $b \in R$ выполнено

$$P\{a < \xi(\omega) \le b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$$

Замечание. Функция распределения дискретной случайной величины является ступенчатой функцией.

Задача 3. Случайная величина ξ задана законом распределения

ξ :

-2	0	3
0,25	0,5	0,25

Построить график функции распределения случайной величины ξ.

Решение. Заметим, что для $x < -2$

$$F_\xi(x) = P\{\xi \le x\} = 0.$$

Если $-2 \le x < 0$, то

$$F_\xi(x) = P\{\xi = -2\} = 0,25.$$

Если же $0 \le x < 3$, то

$$F_\xi(x) = P\{\xi = -2\} + P\{\xi = 0\} = 0,75.$$

Наконец, при $x \ge 3$

$$F_\xi(x) = P\{\xi = -2\} + P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 3\} = 1.$$

Таким образом,

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -2, \\ 0,25 & \text{при } -2 \le x < 0, \\ 0,75 & \text{при } 0 \le x < 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

График функции распределения $F_\xi(x)$ изображен на рисунке 1:

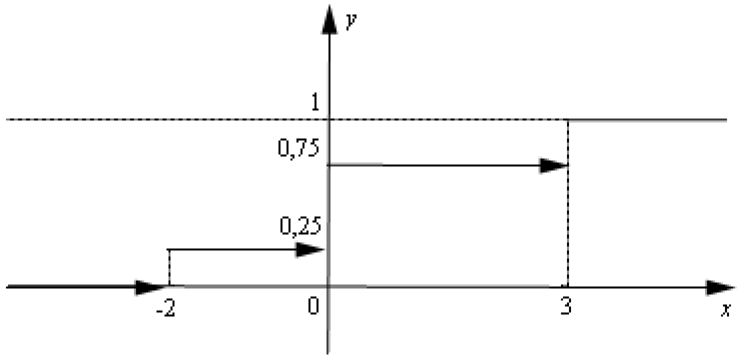

Рис.1

НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Определение 9. Случайную величину ξ называют *непрерывной* (или *абсолютно непрерывной*), если существует такая неотрицательная функция $p_\xi(t)$, что для любого $x \in R$ выполнено соотношение:

$$F_\xi(x) = P\{\xi \le x\} = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)\,dt.$$

Функцию $p_\xi(t)$ называют *плотностью распределения случайной величины* ξ.

В терминах борелевских множеств определение непрерывной случайной величины выглядит следующим образом.

Определение 10. Случайную величину ξ называют *непрерывной* (или *абсолютно непрерывной*), если существует такая неотрицательная функция $p_\xi(t)$, что для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}(-\infty, +\infty)$ выполнено соотношение:

$$P(\xi \in B) = \int_B p_\xi(t)\,dt. \qquad (6)$$

Далее рассматриваются только такие непрерывные случайные величины, плотности распределения которых являются функциями, непрерывными на множестве $(-\infty, +\infty)$ за исключением, быть может, конечного числа точек.

Кроме того, рассматриваются только такие борелевские множества $B \in \mathcal{B}(-\infty, +\infty)$, для которых интеграл, стоящий в правой части формулы (6), существует и совпадает с интегралом Римана. Этого достаточно для решения всех задач, рассматриваемых в курсе теории вероятностей МФТИ (ГУ) для студентов 2 курса.

Плотность распределения случайной величины обладает следующими *свойствами*:

1) $p_\xi(x) \geq 0$ для всех значений $x \in R$,

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)\,dx = 1$,

3) $F'_\xi(x) = p_\xi(x)$ для всех $x \in R$, в которых плотность $p_\xi(x)$ непрерывна,

4) для любых чисел $a \in R$ и $b \in R$ выполнены равенства:

$$P\{a \leq \xi(\omega) < b\} = P\{a < \xi(\omega) < b\} = P\{a \leq \xi(\omega) < b\} =$$
$$= P\{a \leq \xi(\omega) \leq b\} = \int_a^b p_\xi(x)\,dx\,.$$

Замечание. Свойство 4) является важным частным случаем определения 10 для плотности распределения непрерывной случайной величины.

Непрерывную случайную величину можно задать, указав её функцию распределения или её плотность распределения.

Задача 4. Плотность распределения случайной величины ξ задана формулой:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < x \leq 1, \\ a \cdot (x-1) & \text{при } 1 < x \leq 3, \\ 0 & \text{при } 3 < x < +\infty. \end{cases}$$

Найти значение параметра a.

Решение. Воспользовавшись свойством 2) для плотности распределения случайной величины, получаем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(x)\,dx = \int_{1}^{3} a\cdot(x-1)\,dx = a\left(\frac{x^{2}}{2}-x\right)\Bigg|_{1}^{3} = 2a = 1\,.$$

Следовательно, $a = 0,5$.

Ответ: 0,5.

Задача 5. Плотность распределения случайной величины ξ задана формулой:

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\pi\left(1+x^{2}\right)}\,.$$

Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \dfrac{1}{\xi}$.

Решение. Выясним, как связаны между собой функции распределения случайных величин ξ и η. С этой целью для каждого значения $x \in R$ найдем все значения t, для которых выполнено неравенство

$$\frac{1}{t} \le x\,.$$

В результате получаем:

1. $t \in (-\infty, 0) \cup \left[\dfrac{1}{x}, +\infty\right)$ в случае, когда $x > 0$;
2. $t \in (-\infty, 0)$ в случае, когда $x = 0$;
3. $t \in \left[\dfrac{1}{x}, 0\right)$ в случае, когда $x < 0$.

Далее заметим, что

$$F_{\eta}(x) = P\{\eta \le x\} = P\left\{\frac{1}{\xi} \le x\right\}. \tag{7}$$

Из формулы (7) с учетом свойств 4) и 5) функции распределения случайной величины находим:

1. $F_{\eta}(x) = P\left\{\xi \in (-\infty, 0) \cup \left[\dfrac{1}{x}, +\infty\right)\right\} = F_{\xi}(0) + 1 - F_{\xi}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ для $x > 0$;
2. $F_{\eta}(x) = P\{\xi \in (-\infty, 0)\} = F_{\xi}(0)$ для $x = 0$;
3. $F_{\eta}(x) = P\left\{\xi \in \left[\dfrac{1}{x}, 0\right)\right\} = F_{\xi}(0) - F_{\xi}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ для $x < 0$.

Отсюда, используя свойство 3) плотности распределения случайной величины, получаем:

$$p_\eta(x) = F_\eta'(x) = -\left[F_\xi\left(\frac{1}{x}\right)\right]' = -p_\xi\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}.$$

Ответ: $p_\eta(x) = \dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$.

ОСНОВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В приложениях часто встречаются следующие законы распределения непрерывных случайных величин:

1. *Равномерное распределение на отрезке* $[a, b]$.

   Плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\infty < x < a, \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad a \le x \le b, \\ 0 & \text{при} \quad b < x < +\infty. \end{cases}$$

   Функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\infty < x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a \le x < b, \\ 1 & \text{при} \quad b \le x < +\infty. \end{cases}$$

2. *Показательное распределение с параметром* $\lambda \quad (\lambda > 0)$.

   Плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\infty < x < 0, \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{при} \quad 0 \le x < +\infty. \end{cases} \qquad (8)$$

   Функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\infty < x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при} \quad 0 \le x < +\infty. \end{cases} \qquad (9)$$

3. *Нормальное (Гауссовское) распределение с параметрами* $a, \sigma \quad (\sigma > 0)$.

   Плотность распределения

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

   Функция распределения

$$F(x) = 0,5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ − функция Лапласа. Таблица значений функции Лапласа для некоторых значений x приведена практически в каждом учебнике и задачнике по теории вероятностей. Ее можно найти и в Интернете.

Для случайных величин ξ, распределенных по нормальному закону, часто используют обозначение: $\xi \sim N(a, \sigma)$.

Проверим выполнение свойств 2) для плотностей каждого из перечисленных распределений.

1. Для равномерного распределения на отрезке $[a, b]$ имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,dt = \int_a^b \frac{1}{(b-a)}\,dt = 1.$$

2. Для показательного распределения с параметром λ $(\lambda > 0)$ интегрирование плотности $p(t)$ по всей числовой оси дает:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda t}dt = \lambda \cdot \left.\frac{e^{-\lambda t}}{(-\lambda)}\right|_0^{+\infty} = 1\,.$$

3. Для нормального распределения с параметрами a, σ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\,dt\,. \qquad (10)$$

При этом замена переменной

$$z = \frac{t-a}{\sigma\sqrt{2}}; \quad dz = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\,dt\,,$$

приводит интеграл, стоящий в правой части формулы (10), к интегралу Пуассона, с помощью которого получаем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1\,.$$

Задача 6. Известно, что случайная величина ξ имеет строго возрастающую непрерывную функцию распределения $F_\xi(x)$. Найти распределение случайной величины $\eta = F_\xi(\xi)$.

Решение. Рассмотрим функцию распределения случайной величины η

$$F_\eta(x) = P\{\eta \le x\} = P\left\{F_\xi(\xi) \le x\right\}. \tag{11}$$

Поскольку функция $F_\xi(t)$ строго возрастает, непрерывна на $(-\infty, +\infty)$, причем

$$\lim_{t\to-\infty} F_\xi(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} F_\xi(t) = 1,$$

то у нее существует обратная функция $F_\xi^{-1}(x)$, определенная на $(0,1)$.

Поэтому из формулы (11) получаем:

1. $F_\eta(x) = 0$ для $x \le 0$,

2. $F_\eta(x) = 1$ для $x \ge 1$.

В случае, когда $0 < x < 1$, выполнены равенства:

$$F_\eta(x) = P\left\{F_\xi(\xi) \le x\right\} = P\left\{\xi \le F_\xi^{-1}(x)\right\} = F\left(F_\xi^{-1}(x)\right) = x.$$

Таким образом, функция распределения случайной величины η имеет вид

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\infty < x < 0, \\ x & \text{при} \quad 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{при} \quad 1 \le x < +\infty. \end{cases}$$

и является функцией распределения случайной величины, распределенной равномерно на отрезке $[0,1]$.

Ответ: случайная величина η распределена равномерно на отрезке $[0,1]$.