УДК ????

Я. М. Дымарский

Лекции по математическому анализу, третий семестр

§ 1. Обратное и неявное отображения

Если каждому элементу из множества X поставлен в соответствие **единственный** элемент из множества Y, мы говорим, что задано отображение $f : X \to Y$. Само **существование** отображения уже является существенным достижением. Поэтому важно знать, при каких условиях **зависимость** между элементами двух множеств является именно отображением. Для числовых функций мы уже обсудили обратные функции, функции заданные параметрически и затронули проблему существования неявной функции (см. лекцию 1.9). Сейчас мы обсудим проблему **локального** существования и дифференцируемости отображений конечномерных пространств.

1.1. Вспомогательные утверждения. Понятие дифференцируемости отображения $f : \mathbb{R}^n \supset X \to \mathbb{R}^m$ в точке x_0 мы обсудили в п. 2.4.5. В конечном итоге, производной $Df(x_0)$ отображения является матрица Якоби, составленная из частных производных $\partial f_i(x_0)/\partial x^{(j)}$ всех координатных функций f_i $(i = 1, ..., m)$ по всем переменным x^j $(j = 1, ..., n)$. Там же введено понятие нормы $||A||$ произвольной матрицы A и изучены ее основные свойства. Нам понадобится обобщение теоремы (неравенства!) Лагранжа, ранее доказанное для числовых вектор-функций (см. теорему 1.16.1).

Теорема 1.1. *(Лагранжа о среднем для отображений) Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклая область, а отображение $f : X \to Y$ всюду дифференцируемо. Тогда для любых $x_1, x_2 \in X$ существует такое число $\theta \in (0, 1)$, что*

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant ||Df(x_1 + \theta(x_2 - x_1))|| \cdot |x_2 - x_1|. \qquad (1.1)$$

Доказательство. В силу выпуклости X, существует **вектор-функция скалярного переменного**

$$\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^m, \quad \varphi(t) := f(x_1 + t(x_2 - x_1)).$$

Из теоремы о дифференцируемости сложного отображения следует, что ее производная $\varphi'(t) = Df(x_1 + t(x_2 - x_1))(x_2 - x_1) \in \mathbb{R}^m$ есть вектор, полученный действием матрицы $Df(...)$ на вектор $x_2 - x_1 \in \mathbb{R}^n$. Из теоремы Лагранжа 1.16.1 следует, что существует такое число $\theta \in (0, 1)$, для которого $|\varphi(1) - \varphi(0)| \leqslant |\varphi'(\theta)| \cdot 1$. Воспользовавшись неравенством из леммы 2.4.5, получаем

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |\varphi(1) - \varphi(0)| \leqslant |\varphi'(\theta)| = |Df(x_1 + \theta(x_2 - x_1))(x_2 - x_1)| \leqslant$$

$$||Df(x_1+\theta(x_2-x_1))||\cdot|x_2-x_1|. \blacksquare$$

Нам будет удобно применить сразу вытекающее из (1.1)

Следствие 1.1. *Если* $\sup_{x\in X}||Df(x)|| < +\infty$, *то для любых* $x_1, x_2 \in X$ *справедливо*

$$|f(x_2)-f(x_1)| \leqslant \sup_{x\in X}||Df(x)||\cdot|x_2-x_1|. \tag{1.2}$$

Еще нам потребуются необходимые условия существования экстремума числовой функции от нескольких переменных.

Определение 1.1. Пусть функция $\psi : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$ задана на некотором открытом множестве. Точка $x_* \in U$ называется точкой нестрогого (строгого) **локального максимума** (**минимума**), если в некоторой шаровой окрестности этой точки $\psi(x) \geqslant \psi(x_*)$ $(>, \leqslant, <)$. Точку локального максимума и минимума называют точкой **локального экстремума** функции.

.

Теорема 1.2. *(необходимые условия локального экстремума) Если в точке локального экстремума* x_* *функция* ψ *дифференцируема, то вектор производной (градиент) в этой точке обнуляется:*

$$\psi'(x_*) = \left(\frac{\partial\psi(x_*)}{\partial x^{(1)}}, ..., \frac{\partial\psi(x_*)}{\partial x^{(n)}}\right) = \boldsymbol{0},$$

т.е. обнуляются все частные производные

Доказательство. Если $x_* = (x_*^{(1)}, ..., x_*^{(n)})$ – точка локального экстремума функции ψ, то число $x_*^{(i)}$ является точкой локального экстремума функции $\psi_i(x^{(i)}) := \psi(x_*^{(1)}, ..., x_*^{(i-1)}, x^{(i)}, x_*^{(i+1)}, ..., x_*^{(n)})$ числового переменного $x^{(i)}$. В силу теоремы Ферма $0 = (\psi_i)'(x_*^{(i)}) = \partial\psi(x_*)/\partial x^{(i)}$. $\blacksquare$

1.2. Теорема об обратном отображении.

Теорема 1.3. *Пусть отображение* $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^n$ *непрерывно дифференцируемо на области* U *и в некоторой точке* $x_0 \in U$ *определитель* $detDf(x_0) \neq 0$. *Тогда: 1) существуют такие окрестности* $V(x_0) = V \subset U$ *и* $W(y_0) = W$ *точек* x_0 *и* $y_0 = f(x_0)$ *соответственно, что сужение* $f : V \to W$ *является биекцией; 2) обратное отображение* $f^{-1} : W \to V$ *непрерывно дифференцируемо, причем*

$$Df^{-1}(y) = (Df(x))^{-1}, \text{ где } x = f^{-1}(y). \tag{1.3}$$

Обсуждение. 1. Теорема обобщает теорему 1.9.6 об обратной числовой функции числового аргумента.

2. Обратите внимание, что размерности пространства-прообраза и пространства образа совпадают! Это принципиальное требование.

3. Формула (1.3) означает, что взятие обратного отображения и дифференцирование перестановочны.

4. Идея теоремы в том, что если матрица производной $Df(x_0)$ обратима, то само отображение тоже **локально** обратимо, поскольку оно отличается от своей производной на бесконечно малую более высокого порядка.

Доказательство осуществляется в несколько этапов.

1. *Переход к частному случаю.* Так как линейное отображение $Df(x_0)$ является дифференцируемой биекцией (обоснуйте!), то утверждение теоремы справедливо тогда и т.т., когда оно верно для суперпозиции $(Df(x_0))^{-1} \cdot f$. Но производная $((Df(x_0))^{-1} \cdot f)'(x_0) = (Df(x_0))^{-1} \cdot Df(x_0) = id$. Поэтому без ограничения общности считаем, что $Df(x_0) = id$.

2. *Доказательство локальной инъективности.* Применяя оценку (1.2) для отображения $g(x) := f(x) - x$ в произвольной замкнутой шаровой окрестности $\overline{B}_r(x_0) = \overline{B} \subset U$, получаем:

$$|(f(x_2) - x_2) - (f(x_1) - x_1)| \leqslant \sup_{x \in \overline{B}} ||D(f(x) - x)|| \cdot |x_2 - x_1| =$$

$$\sup_{x \in \overline{B}} ||Df(x) - id|| \cdot |x_2 - x_1|.$$

Поскольку матрица $Df(x_0) - id = id - id = 0$ нулевая, а отображение f **непрерывно** дифференцируемо, то существует такой радиус $r > 0$, что для всех $x \in \overline{B}_r(x_0)$, во-первых, $detDf(x) > 0$ и, во-вторых, выполняется оценка $||Df(x) - id|| \leqslant 1/2$. С этого момента радиус r предполагается фиксированным. Теперь

$$\forall x_1, x_2 \in \overline{B}_r(x_0) \ \hookrightarrow \ |(f(x_2) - x_2) - (f(x_1) - x_1)| \leqslant \frac{1}{2}|x_2 - x_1|.$$

Но из неравенства треугольника следует, что

$$|x_2 - x_1| - |f(x_2) - f(x_1)| \leqslant |(f(x_2) - x_2) - (f(x_1) - x_1)|.$$

Следовательно

$$\forall x_1, x_2 \in \overline{B}_r(x_0) \ \hookrightarrow \ |f(x_2) - f(x_1)| \geqslant \frac{1}{2}|x_2 - x_1|. \tag{1.4}$$

Значит на $\overline{B}_r(x_0)$ отображение f инъективно. В частности, для точек $x \in S_\rho(x_0) = \partial \overline{B}_\rho(x_0)$, принадлежащих сфере радиуса $\rho \leqslant r$ с центром в x_0, справедливо:

$$|f(x) - f(x_0)| \geqslant \frac{1}{2}|x - x_0| = \frac{\rho}{2}, \tag{1.5}$$

См. рис. ???

Рис. ???

3. *Доказательство локальной биктивности.* Возьмем открытый шар $W := B_{r/4}(y_0)$. Покажем, что для любого $y \in W$ **существует единственный** $x \in B_r(x_0)$, для которого $y = f(x)$, т.е. существует единственный прообраз отображения f. Зафиксируем $y \in W$ и рассмотрим числовую неотрицательную функцию

$$\psi : \overline{B}_r(x_0) \to \mathbb{R}^+, \ \psi(x) := |f(x) - y|^2 = \sum_{i=1}^{n} (f_i(x) - y_i)^2.$$

Поскольку замкнутый шар $\overline{B}_r(x_0)$ компактен, функция ψ достигает на нем своего абсолютного минимума хотя бы в одной точке x. Точка x не может принадлежать границе шара $\partial\overline{B}_r(x_0)$. В самом деле, из оценки (1.5) и условия $y \in B_{r/4}(y_0)$ для граничной точки $x \in \partial\overline{B}_r(x_0)$ выполняется:

$$|f(x) - y| \geqslant |f(x) - f(x_0)| - |f(x_0) - y| > \frac{r}{2} - \frac{r}{4} = \frac{r}{4}.$$

А для точки x_0 верно $|f(x_0) - y| < \frac{r}{4}$. Следовательно $|f(x_0) - y| < |f(x) - y|$. Значит минимум достагается во внутренней точке шара и в этой точке справедлива теорема 1.2.: для каждого $j = 1, ..., n$ верно

$$0 = \frac{\partial\psi(x)}{\partial x^{(j)}} = 2\sum_{i=1}^{n}(f_i(x) - y_i)\frac{\partial f_i(x)}{\partial x^{(j)}}.$$

В векторном виде система записывается так: $(Df(x))^T(f(x) - y) = \mathbf{0}$, где T означает транспонирование. Но, в силу выбора окрестности $\overline{V}_r(x_0)$, определитель $det(Df(x))^T = detDf(x) > 0$. Поэтому матрица $(Df(x))^T$ обратима, что влечет обнуление вектора $f(x) - y = \mathbf{0}$. Итак, существует точка $x \in B_r(x_0)$, которая является прообразом точки $y \in W$. Единственность такой точки следует из уже доказанной инъективности (1.4). Мы построили искомое обратное отображение f^{-1}. Возьмем в качестве V пересечение $V := B_r(x_0) \cap \widetilde{f}^{-1}(W)$, где $\widetilde{f}^{-1}(W)$ – полный прообраз множества W. (Не исключено, что существуют точки $x \notin B_r(x_0)$, для которых $f(x) \in W$, но эти "далекие" точки нам не нужны.) Итак, $f^{-1} : W \to V$.

4. *Доказательство непрерывности обратного отображения.* После того как существование обратного отображения установлено, оценку (1.4) можно записать для любых $y_1, y_2 \in W$ так:

$$|f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1) \leqslant 2|y_2 - y_1|. \tag{1.6}$$

Это показывает, что отображение f^{-1} непрерывно. Остается исследовать свойства множества V. Поскольку отображение f непрерывно, а $W = B_{r/4}(y_0)$ – открытый шар, то полный проообраз $\widetilde{f}^{-1}(W)$ – открытое подмножество. Значит и пересечение $V = B_r(x_0) \cap \widetilde{f}^{-1}(W)$ также открытое подмножество. Из нижней оценки (1.5) вытекает, что $V \subset \overline{B}_{r/2}(x_0)$ целиком принадлежит выпуклому шару радиуса $r/2$. Значит, $V = Im(f^{-1}) = f^{-1}(W)$, будучи **образом** шара W непрерывного отображения f^{-1}, есть линейно связное множество. Итак, V – область.

5. *Доказательство непрерывной дифференцируемости обратного отображения.* Пусть $x \in V$ – произвольная фиксированная точка, а $x' \in V$ – переменная. Из определения дифференцируемости следует, что

$$f(x') - f(x) = Df(x)(x' - x) + \varepsilon(x' - x),$$

где отображение ε является o-малым при $|x' - x| \to 0$, т.е.

$$\lim_{x' \to x} \frac{|\varepsilon(x' - x)|}{|x' - x|} = 0. \tag{1.7}$$

Применяя к обеим частям равенства обратную матрицу $(Df(x))^{-1}$, получаем

$$(Df(x))^{-1}(f(x')-f(x)) = x'-x+(Df(x))^{-1}(\varepsilon(x'-x)).$$

Но, в силу существования обратного отображения, $x = f^{-1}(y)$, $x' = f^{-1}(y')$. Поэтому последнее равенство равносильно следующему:

$$f^{-1}(y')-f^{-1}(y) = (Df(x))^{-1}(y'-y)-(Df(x))^{-1}(\varepsilon(f^{-1}(y')-f^{-1}(y))).$$

Значит остается убедиться, что отображение $(Df(x))^{-1}(\varepsilon(f^{-1}(y')-f^{-1}(y)))$ является o-малым при $y' \to y$. Поскольку

$$|(Df(x))^{-1}(\varepsilon(f^{-1}(y')-f^{-1}(y)))| \leqslant ||(Df(x))^{-1}|| \cdot |\varepsilon(f^{-1}(y')-f^{-1}(y))|$$

и сомножитель $||(Df(x))^{-1}||$ от переменной y' не зависит, то остается доказать предельное равенство

$$\lim_{y'\to y} \frac{|\varepsilon(f^{-1}(y')-f^{-1}(y))|}{|y'-y|} = 0.$$

Но

$$\frac{|\varepsilon(f^{-1}(y')-f^{-1}(y))|}{|y'-y|} = \frac{|\varepsilon(f^{-1}(y')-f^{-1}(y))|}{|f^{-1}(y')-f^{-1}(y)|} \cdot \frac{|f^{-1}(y')-f^{-1}(y)|}{|y'-y|}.$$

В силу доказанной непрерывности обратного отображения, $f^{-1}(y') \to f^{-1}(y)$ при $y' \to y$. Поэтому (в силу (1.7) и теоремы о переходе к пределу при замене переменной) первый сомножитель стремится к нулю. Второй сомножитель не превосходит 2 (см. (1.6)). Следовательно произведение стремится к нулю. Дифференцируемость отображения f^{-1} и формула (1.3) доказаны.

Элементы матрицы производной обратного отображения являются результатом перемножения трех отображений:

$$y \to f^{-1}(y) = x \to Df(x) = A \to A^{-1}.$$

Первое отображение непрервно по доказанному, второе непрерывно по условию, непрерывность третьего следует из правила нахождения обратной матрицы. Следовательно обратное отображение является непрерывно дифференцируемым. ■

Пример. Рассмотрим полярную систему координат как результат локальной биекции:

$$P : [0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad P(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi).$$

Матрица Якоби и ее определитель равны:

$$J(\rho,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow\ detJ(\rho,\varphi) = \rho \geqslant 0.$$

Значит, сужение $\widetilde{P}$ отображения P на открытую полуплоскость $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$ невырожденно. Согласно теореме 1.3, отображение $\widetilde{P}$ в любой точке открытой полуплоскости является локальной биекцией. Образ $Im(\widetilde{P})$ всей полуплоскости есть вся плоскость без начала координат. Однако отображение $\widetilde{P}$ не является глобальной биекцией: $\widetilde{P}(\rho,\varphi+2\pi k) = \widetilde{P}(\rho,\varphi)$, т.е. отображение 2π-периодично по второму аргументу (см. рис. ???)

Рис. ???

1.3. Теорема об отображении заданном неявно. Неявные отображения применяются не только в математических исследованиях, но и в физических, где они возникают из так называемых "уравнений связи" .

Пример. Уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ задает на координатной плоскости окружность и порождает две неявные функции $y = f(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$, где $x \in [-1, 1]$. Верхняя и нижняя полуокружности являются графиками этих функций (см. рис. ???). Если же мы потребуем, чтобы полученные функции были дифференцируемыми (что весьма удобно в исследованиях), то придется отказаться от крайних точек $x = \pm 1$, в которых производные $f'(\pm 1) = \pm\infty$. Заметим, что $f(\pm 1) = 0$ и $\partial(x^2 + y^2 - 1)/\partial y|_{(\pm 1, 0)} = 0$. Но в остальных точках окружности $\partial(x^2 + y^2 - 1)/\partial y \neq 0$ и это принципиальное наблюдение! Если же мы хотим сосредоточиться на одной функции, то достаточно выбрать единственную пару чисел (x_0, y_0), удовлетворяющую данному уравнению, у которой $x_0 \neq \pm 1$.

Рис. ???

Оказывается описанная конструкция **локально** существует для системы уравнений общего вида при некоторых естественных условиях.

Теорема 1.4. *Пусть отображение*

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^m$$

непрерывно дифференцируемо на открытом подмножестве U*, содержащем точку* $z_0 = (x_0, y_0) \in U$ *и* $F(x_0, y_0) = \mathbf{0}$*. Пусть в точке* (x_0, y_0) *матрица частной производной отображения* F *по векторной переменной* y *невырождена:* $det D_y F(x_0, y_0) \neq 0$*. Тогда: 1) существует окрестность* $A \subset \mathbb{R}^n$ *точки* x_0*, окрестность* $B \subset \mathbb{R}^m$ *точки* y_0 *и единственное* ***неявное отображение*** $f : A \to B$*, удовлетворяющее условию* $F(x, f(x)) \equiv \mathbf{0}$ *для любого* $x \in A$ *(в частности,* $f(x_0) = y_0$*); 2) отображение* f *непрерывно дифференцируемо; 3) в точке* $x \in A$ *матрица производной неявного отображения определяется по правилу*

$$Df(x) = -(D_y F(x, f(x)))^{-1} \cdot D_x F(x, f(x)). \tag{1.8}$$

Обсуждение. Теорему можно понимать так: векторное уравнение $F(x, y) = \mathbf{0}$ порождает неявную однозначную зависимость переменной y от переменной x в том случае, когда (1) размерность переменной y совпадает с размерностью пространства-образа отображения F, (2) имеется точка (x_0, y_0), за которую можно "зацепиться" и (3) в этой точке матрица частной производной $D_y F(x_0, y_0)$ обратима.

Доказательство. Имея в виду теорему 1.3, достроим отображение F до отображения, которое в окрестности точки (x_0, y_0) является локальной биекцией. Именно, положим

$$G : U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad G(x, y) := (x, F(x, y)).$$

Проверим выполнение условий теоремы 1.3. Во-первых, отображение G непрерывно дифференцируемо и матрица производной имеет следующий блочный вид

$$DG(x, y) = \begin{pmatrix} id_x & 0 \\ D_x F(x, y) & D_y F(x, y) \end{pmatrix}.$$

Во-вторых, в силу условия теоремы в точке (x_0, y_0) определитель

$$det \begin{pmatrix} id_x & 0 \\ D_xF(x_0,y_0) & D_yF(x_0,y_0) \end{pmatrix} = 1 \cdot det D_yF(x_0,y_0) \neq 0.$$

Следовательно, отображение G является биекцией между некоторой окрестностью $V \subset U$ точки (x_0, y_0) и окрестностью W точки $G(x_0, y_0) = (x_0, \mathbf{0})$. Окрестность $V := B_\varepsilon(x_0) \times B_\delta(y_0)$ без ограничения общности можно взять в виде прямого произведения двух открытых шаров из пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно. Следовательно, обратное отоббражение $G^{-1} : W \to B_\varepsilon(x_0) \times B_\delta(y_0)$. Мы утверждаем, что обратное отображение имеет структуру, аналогичную структуре прямого отображения, а именно $G^{-1}(x', y') = (x', H(x', y'))$. В самом деле, обратное отображение есть решение векторного уравнения $G(x, y) = (x', y')$ относительно неизвестной пары (x, y); но это уравнение равносильно системе уравнений $x = x'$, $F(x, y) = y'$. Значит $G^{-1}(x', y') = (x', H(x', y'))$. Поскольку мы интересуемся только парами (x, y), для которых $F(x, y) = 0$, то получаем $y' = 0$. Значит, искомое неявное отображение (см. рис. ???)

$$f : A := B_\varepsilon(x_0) \to B := B_\delta(y_0),\ f(x) := H(x, 0).$$

Рис. ???

Непрерывная дифференцируемость отображения f следует из непрерывной дифференцируемости отображения G^{-1}. Теперь, чтобы найти производную $Df(x)$, достаточно продифференцировать тождество $F(x, f(x)) \equiv \mathbf{0}$ и воспользоваться обратимостью матрицы $D_yF(x, y)$ для всех (x, y) достаточно близких к (x_0, y_0). ■

1.4. Гладкие многомерные поверхности. В многомерной геометрии, в теории экстремумов, в теории интегрирования, а также в различных разделах физики возникают поверхности, размерности выше двух. Поэтому полезно иметь их единообразное описание.

Определение 1.2. Подмножество $S \subset \mathbb{R}^p$ называется n-мерной **простой гладкой поверхностью** в p-мерном пространстве, если S является образом отображения $\mathbf{r} : \mathbb{R}^n \supset V \to \mathbb{R}^p$, обладающего следующими свойствами:

1. $n < p$,
2. $V \subset \mathbb{R}^n$ – область,
3. $\mathbf{r}$ – инъективно,
4. $\mathbf{r} \in C^1$ и в каждой точке $t \in V$ ранг матрицы частных производных максимален, т.е. $rank(D\mathbf{r}(t)) = n$.

Отображение $\mathbf{r}$ называют **параметризацией** поверхности, а переменную $t \in \mathbb{R}^n$ – параметром.

Замечание. Одна и та же поверхность всегда параметризована бесконечным количеством способов: если $F : \mathbb{R}^n \supset V' \to V$ – биекция класса C^1, производная которой в каждой точке невырождена, то отображение

$$\mathbf{r}' : V' \to \mathbb{R}^p,\ \mathbf{r}'(t') := \mathbf{r}(F(t'))$$

также является параметризацией (см. рис. ???). Можно доказать, что таким образом получаются все параметризации данной поверхности.

Зафиксируем все координаты $t^{(j)}$, кроме одной. Изменяя ее, получим кривую на поверхности $\gamma_j \subset S$, которая параметризована вектор-функцией $\mathbf{r}_j(t^{(j)}) := \mathbf{r}(t_0^{(1)}, ..., t^{(j)}, ...t_0^{(n)})$. В результате прмолинейная координатная сеть пространства $\mathbb{R}^n$ преобразуется в **криволинейную координатную сеть** на S (см. рис. ???).

Определение 1.3. Пусть $\mathbf{r}(t) = x \in S$ – фиксированная точка простой гладкой поверхности. Векторное подпространство $T_xS := Im(D\mathbf{r}(t)) \subset \mathbb{R}^p$ (т.е. образ производной отображения $\mathbf{r}$ в соответствующей точке) называется **касательным пространством** к поверхности в точке x.

Лемма 1.1. *(о задании касательного пргостранства)*

1. *Касательное пространство не зависит от параметризации $\boldsymbol{r}$ поверхности.*
2. *Столбцы матрицы*

$$D\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1(t)}{\partial t^{(1)}} & ... & \frac{\partial r_1(t)}{\partial t^{(n)}} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial r_p(t)}{\partial t^{(1)}} & ... & \frac{\partial r_p(t)}{\partial t^{(n)}} \end{pmatrix} =$$

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}(t)}{\partial t^{(1)}} \; ... \; \frac{\partial \boldsymbol{r}(t)}{\partial t^{(n)}} \right) = (\boldsymbol{r}_1'(t) \; ... \; \boldsymbol{r}_n'(t)) \tag{1.9}$$

являются направляющими векторами касательного пространства; каждый из столбцов является направляющим вектором соответствующей кривой γ_j. См. рис. ???

Доказательство п. 1 опускаем (оно основано на описании всех параметризаций, см. замечание выше). Утверждение п. 2 является прямым следствием определения касательного пространства.

Замечания. 1. Требование максимальности ранга матрицы $D\mathbf{r}(t)$ геометрически означает, что поверхность в каждой точке имеет касательное пространство одной и той же размерности n.

2. В геометрических исследованиях удобно откладывать векторы $v \in T_xS$ касательного пространства от точки касания. В такой трактовке расстояние $\rho(x + v, S)$ от точки $x + v$ касательного пространства до поверхности есть величина более высокого порядка, чем $|v|$ (попробуйте доказать!).

Рис. ???

Примеры. 1) Гладкая незамкнутая кривая на плоскости или в пространстве есть 1-мерная простая гладкая поверхность. 2) Плоскость, эллиптический и гиперболический параболоиды, одна из полостей двуполостного гиперболоида – 2-мерные простые гладкие поверхности в трехмерном пространстве.

Определение 1.4. Подмножество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется n-мерной **гладкой поверхностью** в p-мерном пространстве, если S **локально** является n-мерной простой гладкой поверхностью. Т.е. у каждой точки $x \in S$ имеется окрестность, пересечение которой с S является n-мерной простой гладкой поверхностью.

Примеры. 1) Простая гладкая поверхность автоматически гладкая поверхность. 2) Замкнутая гладкая кривая. 3) Сфера, однополостный гиперболоид, тор – 2-мерные гладкие поверхности.

Задача. Придумайте двумерную гладкую поверхность, которая "топологически" неэквивалентна приведенным примерам. Т.е. не существует непрерывной в обе стороны биекции между поверхностями.

Применение параметризации для задания поверхности, во-первых, не всегда возможно, во вторых, неудобно из-за его громоздкости. В приложениях чаще применяют **неявный** способ задания поверхности. Если задано такое отображение $F : \mathbb{R}^p \supset U \to \mathbb{R}^m$, что $S = \{z \in U : \ F(z) = \mathbf{0}\}$, то говорят о неявном способе задания поверхности S. При этом $S = F^{-1}(\mathbf{0}) \cap U$ есть полный прообраз точки ноль. На практике применение неявного способа приводит к исследованию множества всех решений системы из m уравнений с p неизвестными: $F_i(z^{(1)}, ..., z^{(p)}) = 0$ $(i = 1, ..., m)$. Возникает вопрос: каким должно быть отображение F, чтобы оно порождало гладкую поверхность, и какой размерности будет эта поверхность?

Теорема 1.5. *(о неявном задании гладкой поверхности) Пусть $m < p$, $U \subset \mathbb{R}^p$ – область, отображение $F \in C^1(U)$ и в каждой точке $z \in F^{-1}(\mathbf{0}) \cap U$ ранг матрицы частных производных максимален (т.е. $rank(DF(z)) = m$). Тогда: 1) $S = F^{-1}(\mathbf{0}) \cap U$ есть гладкая поверхность размерности $n = p - m$; 2) касательное простанство к поверхности S в точке z задается линейным векторным уравнением*

$$T_zS = \{v \in \mathbb{R}^p : \ DF(z)v = \mathbf{0}\} = (DF(z))^{-1}\mathbf{0}. \tag{1.10}$$

Замечание. Из теоремы следует, что каждое уравнение $F_i(z^{(1)}, ..., z^{(p)}) = 0$ "забирает" одну размерность в прообразе $F^{-1}(\mathbf{0})$.

Задача. Сколько неизвестных и сколько уравнений должна содержать система, удовлетворяющая условиям теоремы 1.5, чтобы задать линию в геометрическом (т.е. трехмерном) пространстве?

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $z_0 \in S$. Поскольку $rankDF(z) = m$, матрица $DF(z)$ содержит набор (не обязательно единственный) из m линейно независимых столбцов $(\partial F_1(z)/\partial z^{(j)}, ..., \partial F_m(z)/\partial z^{(j)})^T$. Без ограничения общности можно считать, что линейно независимые столбцы имеют последние m номеров $p - m + 1, ..., p$. Переименуем первые $n = p - m$ переменных в x_j, а последние переменные – в y_j $(j = 1, ..., m)$. В результате данное пространство представлено как прямое произведение двух координатных подпространств ($\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$), а отображение $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^m$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.4 о неявном отображении. Следовательно уравнение $F(x, y) = \mathbf{0}$ в некоторой окрестности точки $(z_0) = (x_0, y_0)$ равносильно уравнению $y = f(x)$. В последнем неизвестное x является независимым n-мерным переменным, которое можно выбирать произвольно в некоторой окрестности $V \subset \mathbb{R}^n$ точки x_0. А y однозначно определяется неявным отображением f. Т.е. множество S локально является **графиком** отображения f. Теперь определим отображение

$$\mathbf{r} : V \to \mathbb{R}^p, \quad \mathbf{r}(x) := (x, f(x)).$$

Оно сопоставляет точке x соответствующую ей точку на графике отображения f (см. рис. ???). Отображение $\mathbf{r}$ удовлетворяет всем требованиям, перечисленным в определении 1.2 (проверьте!). Таким образом, график отображения f является простой гладкой поверхностью. Первое утверждение доказано.

Рис. ???

Из доказательства следует, что касательное пространство в точке $z = (x, y) = (x, f(x))$ есть подпространство векторов $v = (\xi, \eta)$, определяемое так:

$$T_{(x,y)}S = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \ \eta = Df(x)\xi\}.$$

Но производная неявного отображения определяется формулой (1.8). Поэтому

$$T_{(x,y)}S = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \ \eta = -(D_yF(x, f(x)))^{-1} \cdot D_xF(x, f(x))\xi\} =$$

$$= \{(\xi, \eta) : \ D_yF(z)\eta + D_xF(z)\xi = \mathbf{0}\} = \{v = (\xi, \eta) : \ DF(z)v = \mathbf{0}\}. \ \blacksquare$$

Замечания. 1. Из доказательства следует, что неявное задание поверхности есть геометрическая интерпретация неявного способа задания отображения.

2. В доказательстве теоремы 1.5 мы задали поверхность как график гладкого отображения. Такой способ задания поверхности называется **явным**. Явный способ является частным случаем параметрического. Но он удобнее его, поскольку не использует дополнительные переменные-параметры: переменные $x^{(1)}, ..., x^{(n)}$ одновременно являются и параметрами, и первыми координатами точки на поверхности.

Задача. Дайте параметрическое, неявное и явное задания окружности, двумерной сферы и их касательных пространств.

Как известно из курса линейной алгебры, ранг матрицы равен количеству линейно независимых строк. Поскольку в условиях теоремы 1.5 $rank(DF(z))$ максимален, то все строки матрицы $DF(z)$ линейно независимы. Но i-я строка есть вектор градиента функции $F_i(z)$. Следовательно, условие максимальности ранга матрицы частных производных геометрически равносильно линейной независимости m градиентов $F_i'(z)$. Определим m-мерное подпространство $\Gamma_z S$ как линейную оболочку векторов $F_i'(z)$. Мы получаем

Следствие 1.2. *(о двух способах задания поверхности) Пусть одна и та же поверхность S параметризована вектор-функцией $\boldsymbol{r}(t) = x \in S \subset \mathbb{R}^{n+m}$ ($t \in V \subset \mathbb{R}^n$) и задана неявно уравнением $F(x) = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^m$. Тогда:*

1. $\forall t \in V \ \hookrightarrow \ F(\boldsymbol{r}(t)) \equiv \boldsymbol{0}$.
2. *В каждой точке $x \in S$ касательное пространство T_xS задается двумя способами – параметрическим (1.9) и неявным (1.10);*
3. *Касательное пространство T_xS является ортогональным дополнением к подпростанству $\Gamma_z S$: $\mathbb{R}^{n+m} = T_zS \oplus \Gamma_zS$ (см. рис. ???); в каждой точке $x = \boldsymbol{r}(t)$ справедливы $n \times m$ условий ортогональности:*

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}(t)}{\partial t^{(i)}}, F_j'(x)\right) \ \forall i = 1, ..., n, \ \forall j = 1, ..., m.$$

§ 2. Экстремумы функций нескольких переменных

В предыдущей лекции (п. 1.1) мы уже ввели понятие локального экстремума для функции $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$ (U – окрестность точки x) и доказали необходимое условие его существования: если x – точка экстремума функции, и функция дифференцируема в точке x, то

$$f'(x) = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial f(x)}{\partial x^{(1)}} = 0,\; \dots\,, \frac{\partial f(x)}{\partial x^{(n)}} = 0. \tag{2.1}$$

Решения этой системы являются точками подозрительными на экстремум. Их называют **стационарными**. Заметим, что система уравнений имеет "квадратный" вид – состоит из n уравнений с n неизвестными. В "типичном" случае такая система имеет изолированные решения. Если дополнительно доказано, что множество стационарных точек ограничено, тогда их количество конечно. Условие (2.1) не является достаточным. Так, функция $y = x^3$ имеет стационарную точку $x = 0$, которая не является точкой экстремума.

Задача. Приведите пример функции двух переменных, которая обладает стационарной точкой не являющейся точкой экстремума.

Возникает проблема получения обозримых достаточных условий существования экстремума

2.1. Достаточные и второе необходимое условия экстремума. Пусть функция $f \in C^2(U)$ в некоторой окрестности U стационарной точки x_0. Как и в случае функции одной переменной для получения достаточных условий существования эстремума воспользуемся формулой Тейлора $f(x) - f(x_0) = df(x_0; dx) + \frac{1}{2}d^2 f(x_0, dx) + o(|dx|^2)$. Напомним (см. п. 1.5.3), что:

1) дифференциал второгого порядка $d^2 f = d^2 f(x, dx)$ есть функция $2n$ переменных $(x; dx) = (x^{(1)}, ..., x^{(1)}; dx^{(1)}, ..., dx^{(n)})$;

2) $d^2 f(x, dx)$ относительно вектора $dx = x - x_0$ является квадратичной формой, порожденной симметрической матрицей вторых производных:

$$d^2 f(x, dx) = dx^T D^2 f(x)\ dx = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}} dx^{(i)} dx^{(j)}. \tag{2.2}$$

В силу (2.1), в точке x_0 первый дифференциал $df(x_0, dx) \equiv 0$ по переменной dx. Мы получаем следующее разложение Тейлора:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} d^2 f(x_0, dx) + o(|dx|^2) \text{ при } dx \to \mathbf{0}. \tag{2.3}$$

Напомним, что квадратичная форма $K(w)$ называется

1. **положительно определенной**, если $K(w) > 0$ для всех $w \neq \mathbf{0}$;
2. **отрицательно определенной**, если $K(w) < 0$ для всех $w \neq \mathbf{0}$;
3. **знаконеопределенной**, если существуют w_1, w_2 такие, что $K(w_1) > 0$, $K(w_2) < 0$;
4. положительно (отрицательно) **полуопределенной**, если она не принимает отрицательных (положительных) значений и существует $w \neq 0$, что $K(w) = 0$.

Знакоопределенность и знаконеопределенность проверяют с помощью критерия Сильвестра. Мы рассчитываем на то, что в разложении (2.3) разности $\Delta f(x) := f(x) - f(x_0)$ ведущую роль играет именно квадратичная форма, а не остаточный член, имеющий более высокий порядок малости. Именно так и происходит в *устойчивом* случае:

Теорема 2.1. *(достаточные условия экстремума) Пусть x_0 – стационарная точка функции f, и $f \in C^2$ в некоторой окрестности точки x_0. Тогда:*

1. *если квадратичная форма $d^2 f(x_0, dx)$ является положительно определенной, то x_0 – точка* ***строгого*** *локального минимума функции f;*
2. *если квадратичная форма $d^2 f(x_0, dx)$ является отрицательно определенной, то x_0 – точка* ***строгого*** *локального максимума функции f;*
3. *если квадратичная форма $d^2 f(x_0, dx)$ знаконеопределенная, то x_0 не является точкой локального экстремума функции f;*
4. *если квадратичная форма $d^2 f(x_0, dx)$ является или положительно, или отрицательно полуопределенной, то x_0 может быть точкой локального экстремума (как строгого, так и нестрогого), а может и не быть таковой.*

Обсуждение. 1. Случаи 1-3 устойчивые, т.е. малое изменение второго дифференциала не меняет типа точки x_0.

2. Примерами случаев 1-4 для функций двух переменных в точке $O(0,0)$ являются: 1) $z = x^2 + y^2$, 2) $z = -x^2 - y^2$, 3) $z = x^2 - y^2$, 4) $z = x^2 + y^4$ – точка строгого минимума, $z = x^2$ – точка нестрогого минимума, $z = x^2 - x^4$ – экстремум отсутствует. См. рис. ???

Рис. ???

Доказательство. Прежде всего заметим, что свойство точки x_0 быть экстремальной для функции f является геометрическим. Другими словами, если $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ортогональное проеобразование (сохраняющее скалярное произведение), то у функций $f(x)$ и $g(y) := f(A(y) + x_0)$ точки $x_0 = A(\mathbf{0}) + x_0$ и $y_0 = \mathbf{0}$ имеют одни и те же экстремальные свойства в указанной выше классификации. В силу линейности A, первый дифференциал $d(A(y) + x_0) = A(dy)$. По этой же причине в точке $\mathbf{0}$ второй дифференциал сложной функции g сохраняет инвариантный вид (2.2), т.е.

$$d^2 g(\mathbf{0}, dy) = d(dg(y, dy))|_{y=\mathbf{0}} = d(grad\ f(A(y) + x_0)|_{y=\mathbf{0}}, A(dy)) =$$
$$(D^2 f(A(y) + x_0)|_{y=\mathbf{0}} \cdot A(dy), A(dy)) = (A(dy))^T \cdot D^2 f(x_0) \cdot (A(dy)) =$$
$$= dy^T \cdot (A^T \cdot D^2 f(x_0) \cdot A) \cdot dy.$$

Поэтому существует такое преобразование A, что в координатах y квадратичная форма $d^2 f(x_0, dx)$ приобретает канонический диагональный вид. После указанной замены $x = A(y) + x_0$ остаточный член в формуле Тейлора остается таковым, т.е. $o(|dy|^2)$ (докажите!). Без ограничения общности рассуждений считаем, что исходная система координат уже каноническая и $x_0 = \mathbf{0}$. Тогда

$$\Delta f(x) = \frac{1}{2}(\lambda_1 (x^{(1)})^2 + ... + \lambda_k (x^{(k)})^2 + \lambda_{k+1} (x^{(k+1)})^2 + ... + \lambda_{k+l} (x^{(k+l)})^2) + o(|x|^2),$$

где $\lambda_1, ..., \lambda_k > 0$, $\lambda_{k+1}, ..., \lambda_{k+l} < 0$, $k + l \leqslant n$.

Квадратичная форма положительно определена тогда и т.т., когда все $\lambda_i > 0$ $(i = 1, ..., n)$. Пусть $\lambda = \min \lambda_1, ..., \lambda_n > 0$. Тогда существует такое малое $\varepsilon > 0$, что для любого $x \neq \mathbf{0} \wedge |x| < \varepsilon$ верно:

$$f(x) > \frac{1}{2}n\lambda|x|^2 + o(|x|^2) = |x|^2\left(\frac{1}{2}n\lambda + \frac{o(|x|^2)}{|x|^2}\right) > \frac{n\lambda}{4}|x|^2 > 0.$$

Первый пункт доказан. Второй пункт сводится к первому заменой функции f на функцию $-f$.

Знаконеопределенность означает, что среди чисел λ_i имеются хотя бы два числа разных знаков: пусть $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. Тогда существует $\varepsilon > 0$, что

$$f(x^{(1)}, 0, ..., 0) = \frac{1}{2}\lambda_1(x^{(1)})^2 + o((x^{(1)})^2) > 0 \text{ при } 0 < |x^{(1)}| < \varepsilon,$$

$$f(0, x^{(2)}, 0, ..., 0) = \frac{1}{2}\lambda_2(x^{(2)})^2 + o((x^{(2)})^2) < 0 \text{ при } 0 < |x^{(2)}| < \varepsilon.$$

Пункт 3 доказан.

Отсутствие знакоопределенности и знаконеопределенности квадратичной формы означает, что те числа λ_i, которые отличны от нуля, одного знака, но их количество строго меньше, чем n. В качестве примеров возьмем две функции двух переменных, у которых совпадают вторые дифференциалы:

$$f_1(x, y) = x^2 + y^4, \quad f_2(x, y) = x^2 - y^4.$$

Для первой функции точка $(0, 0)$ является точкой строгого минимума, а для второй она же не является точкой экстремума. (Обоснуйте!) Заметим, что графики функций f_1, f_2 аналогичны графикам из примеров 1 и 3 соответственно. ■

2.2. Условный экстремум. В геометрических задачах, задачах теории управления, в многочисленных физических приложениях (которые основаны на вариационном принципе) возникает проблема отыскания экстремума функции при наложенных дополнительных условиях. Постановка задачи такова. В области $U \subset \mathbb{R}^p$ задана скалярная функция f и отображение $F : U \to \mathbb{R}^m$, $F(x) = (F_1(x), ..., F_m(x))$. Решается задача отыскания точки **локального условного экстремума** функции f на множестве $S := \{x \in U : F(x) = \mathbf{0}\}$. Т.е. такой точки $x_0 \in S$, для которой существует ε-окрестность $B_\varepsilon(x_0)$, что в пересечении $\forall x \in B_\varepsilon(x_0) \cap S$ выполняется неравенство: $f(x) > f(x_0)$ $(\geqslant, <, \leqslant)$. В отсутствие дополнительных условий задачу на экстремум называют **безусловной**.

В координатах множество S задается системой $F_i(x^{(1)}, ..., x^{(p)}) = 0$ из m уравнений с p неизвестными, причем $m < p$. Предположим, что система **разрешима** относительно m переменных, т.е. вектор x представим в виде пары $x = (z, y)$ (где $y \in \mathbb{R}^m$, $z \in \mathbb{R}^{p-m}$), для которой условие $F(z, y) = \mathbf{0}$ равносильно функиональной зависимости $y = H(z)$. (Достаточные условия существования функциональной зависимости $y = H(z)$ сформулированы в теоремах 1.4 и 1.5.) В этом случае задача отыскания условного экстремума сводится к задаче отыскания безусловного экстремума функции $\widetilde{f}(z) := f(z, H(z))$. Указанный метод называется **прямым**. Аналитическое осуществление прямого метода обычно невозможно. Однако, в условиях теоремы 1.5, опираясь только лишь на **существование** зависимости $y = H(z)$, с помощью косвенных методов удается решить задачу отыскания условного экстремума. Точнее, мы увидим, что по сути задача на условный экстремум является задачей о взаимном расположении двух многомерных поверхностей – поверхности S и поверхности уровня $\{x \in U : \ f(x) = const\}$, которую еще предстоит найти.

Возникает естественный вопрос: насколько существенно дополнительные условия могут повлиять на экстремальные свойства функции? Ясно, что если точка x_0 является точкой безусловного **строгого** экстремума, то при любых допонительных условиях она останется таковой. Если x_0 – точка безусловного **нестрогого** экстремума, то она останется точкой экстремума того же типа; возможно, нестрогого, возможно – строгого.

Пример. Функция $z = f(x, y) := y^2$ в точке $O(0, 0)$ имеет нестрогий минимум. При дополнительном условии $y = x$ получаем функцию $\widetilde{f}(x) = x^2$, у которой точка 0 является точкой строгого минимума. Если же взять дополнительное условие $y = 0$, то $\widetilde{f}(x) = 0$, и 0 является точкой нестрогого минимума. См. рис. ???

Рис. ???

Если же точка x_0 вообще не является стационарной для данной функции $f(x)$, то дополнительные условия могут приводить к любой ситуации.

Пример. Рассмотрим функцию от двух переменных $f(x, y) = y$. Очевидно, у данной функции нет даже стационарных точек. Добавим условие связи $kx^2 - y = 0$. Прямым методом получаем задачу на безусловный экстремум функции одной переменной $\widetilde{f}(x) = kx^2$. В результате: 1) при $k < 0$ точка $O = (0, 0)$ является точкой условного строгого максимума; 2) при $k = 0$ функция $\widetilde{f}(x) \equiv const$; 3) при $k > 0$ точка O является точкой условного строгого минимума. См. рис. ???

Рис. ???

Всюду ниже предполагается:

1. функция $f \in C^1(U)$;
2. отображение $F \in C^1(U)$ и в каждой точке $x \in U$ ранг матрицы $DF(x)$ максимален, т.е. равен m.

Из условия 2, в силу теоремы 1.5, следует, что подмножество S является гладкой поверхностью размерности $n = p - m$, касательное пространство в точке x задается системой линеаризованных уравнений (1.10)

$$T_x S = \{v \in \mathbb{R}^p : \ (F_1'(x), v) = 0, ..., (F_m'(x), v) = 0\},$$

а система векторов $\{F_1'(x), ..., F_m'(x)\}$ вляется базисом в ортогональном дополнении $\Gamma_x S$ (см. следствие 1.2).

В принятых предположениях о функции f и отображении F задача на локальный условный экстремум может быть переформулирована как задача на безусловный.

Лемма 2.1. *(переформулировка экстремальной задачи) Пусть* $\boldsymbol{r} : V \to \mathbb{R}^p$ *– произвольная локальная параметризация поверхности* S*, т.е. параметризация некоторой окрестности точки* $x_0 \in S$*. Рассмотрим сложную функцию*

$$\widetilde{f}: \ V \to \mathbb{R}, \ \widetilde{f}(t) := f(\boldsymbol{r}(t)).$$

Мы утверждаем, что задача $f(x) \to extremum$ *при условии* $F(x) = \boldsymbol{0}$ *равносильна задаче* $\widetilde{f} \to extremum$*. Точнее, точка* $x_0 = \boldsymbol{r}(t_0)$ *является для функции* f *точкой локального условного экстремума любого из указанных типов тогда и т.т., когда точка* t_0 *для функции* $\widetilde{f}$ *является точкой локального безусловного экстремума того же типа.*

Доказательство. Из теоремы 1.5 следует, что параметризация $\mathbf{r}$ является **биекцией** между любой малой окрестностью $V_\varepsilon(x_0) = B_\varepsilon(x_0) \cap S$ точки x_0 и некоторой малой окрестностью $W(t_0, \varepsilon) = \mathbf{r}^{-1}(V_\varepsilon(x_0))$ точки t_0. ■

2.3. Необходимые и достаточные признаки существования условного экстремума.

Теорема 2.2. *(необходимый признак условного экстремума) Если* x_0 *– точка локального условного экстремума, то справедливы следующие равносильные между собой утверждения:*

1. *градиент* $f'(x_0) \perp T_{x_0}S \ \Leftrightarrow$
2. *существует единственный набор* $\Lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$ *из* m *чисел, для которого* $f'(x_0) = \lambda_1 F_1'(x_0) + ... + \lambda_m F_m'(x_0)$*.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Если x_0 – точка локального условного экстремума, то, в силу леммы 2.1, существует такая единственная точка t_0, что $x_0 = \mathbf{r}(t_0)$ и t_0 является точкой локального безусловного экстремума сложной функции $\widetilde{f} = f(\mathbf{r}(t))$. Следовательно, t_0 – стационарная точка гладкой функции $\widetilde{f}$:

$$\forall j \in \{1, ..., n\} \ \hookrightarrow \ \frac{\partial \widetilde{f}(t_0)}{\partial t^{(j)}} = 0 \ \Leftrightarrow \ f'(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}(t_0)}{\partial t^{(j)}} = 0 \ \Leftrightarrow \ (f'(x_0)), \frac{\partial \mathbf{r}(t_0)}{\partial t^{(j)}}) = 0.$$

Из (1.9) следует, что вектор $f'(x_0)$ ортогонален каждому базисному вектору касательного пространства $T_{x_0}S$, что доказывает первое утверждение.

Из следствия 1.2 вытекает, что: 1) утверждение п. 1 равносильно принадлежности $f'(x_0) \in \Gamma_{x_0}S$; 2) вектор $f'(x_0)$ единственным образом раскладывается по базису $\{F_1'(x_0), ..., F_m'(x_0)\}$. ■

Замечание (геометрический смысл теоремы 2.2). Обозначим значение функции f в точке x_0 через $c_0 = f(x_0)$. Пусть, дополнительно, $f'(x_0) \neq \mathbf{0}$. Тогда *поверхность уровня* $M_{c_0} = \{x \in \mathbb{R}^p : f(x) = c_0\}$ в окрестности точки x_0 является простой гладкой поверхностью размерности $p-1$, а касательное пространство к нему определяется одним условием $T_{x_0}M_{c_0} = \{v \in \mathbb{R}^p \ : \ (f'(x_0), v) = 0\}$. Следовательно, п. 1 теоремы означает, что в точке x_0 касательное простанство к поверхности уровня содержит касательное пространство к поверхности S. Проще говоря, поверхность уровня M_{c_0} и поверхность S **касаются** (см. рис. ???).

Рис. ???

Из теоремы 2.2 сразу вытекает

Следствие 2.1. *(о точках, подозрительных на условный экстремум) Точка $x = (x^{(1)}, ..., x^{(p)}) \in S$ может оказаться точкой условного экстремума функции f только в том случае, когда ее p координат и еще m чисел $(\lambda_1, ..., \lambda_m)$ удовлетворяют системе из $p + m$ уравнений*

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x^{(1)},...,x^{(p)})}{\partial x^{(j)}} = \lambda_1 \frac{\partial F_1(x^{(1)},...,x^{(p)})}{\partial x^{(j)}} + ... + \lambda_m \frac{\partial F_m(x^{(1)},...,x^{(p)})}{\partial x^{(j)}} \quad (j = 1, ..., p), \\ F_i(x^{(1)}, ..., x^{(p)}) = 0 \quad (i = 1, ..., m) \ . \end{cases} \tag{2.4}$$

Первые p уравнений есть покоординатная запись п. 2 теоремы 2.2. Остальные m уравнений есть условие принадлежности $x \in S$,

Замечание. Совпадение количества уравнений и количества неизвестных в системе (2.4) означает, что все условия задачи исчерпаны.

Утверждение следствия 2.2 часто формулируют с помощью вспомогательной **функции Лагранжа** от $p + m$ переменных:

$$L : U \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \ L(x, \lambda) := f(x) - \lambda_1 F_1(x) - ... - \lambda_m F_m(x).$$

Лемма 2.2. *(нахождение подозрительных точек с помощью функции Лагранжа) Точка $x \in S$ может оказаться точкой условного экстремума функции f только в том случае, когда пара $(x, \Lambda) \in U \times \mathbb{R}^m$ является стационарной точкой функции Лагранжа, т.е. удовлетворяет условию*

$$gradL(x, \lambda) = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^{p+m}.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\frac{\partial L}{\partial x^{(j)}} = \frac{\partial f(x^{(1)}, ..., x^{(p)})}{\partial x^{(j)}} - \lambda_1 \frac{\partial F_1(x^{(1)}, ..., x^{(p)})}{\partial x^{(j)}} - ... - \lambda_m \frac{\partial F_m(x^{(1)}, ..., x^{(p)})}{\partial x^{(j)}},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = F_i \quad (j = 1, ..., p; \quad i = 1, ..., m). \ \blacksquare$$

Пусть x_0 – точка подозрительная на условный экстремум, найденная с помощью системы (2.4). Попутно нами найден соответствующий набор коэффициентов Лагранжа $\Lambda^0 := (\lambda_1^0, ..., \lambda_m^0)$. Формулировать достаточный признак условного экстремума удобно с помощью функции Лагранжа, у которой уже фиксирован набор Λ^0; обозначим ее $L^0(x) := L(x, \Lambda^0)$. Нам понадобиться

Следствие 2.2. *(необходимый признак условного экстремума в терминах функии $L^0(x)$) Если точка $x_0 \in S$ является точкой условного экстремума функции f, то существует такой единственный набор чисел $\Lambda^0 \in \mathbb{R}^m$, для которого точка x_0 является стационарной для функции Лагранжа $L^0(x)$, т.е.*

$$gradL^0(x_0) = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^p. \tag{2.5}$$

Доказательство немедленно вытекает из следствия 2.2 и определения функции $L^0(x)$.

ТЕОРЕМА 2.3. *(достаточные признаки условного экстремума) Пусть в некоторой окрестности точки x_0 функция f и отображение F принадлежат классу гладкости C^2. Пусть пара (x_0, Λ^0) удовлетворяет системе (2.4). Пусть $d^2L^0(x_0, \upsilon)$ – квадратичная форма относительно вектора $\upsilon = dx \in \mathbb{R}^p$, порожденная вторым дифференциалом функции $L^0(x)$ в точке x_0. Тогда:*

1. *если квадратичная форма $d^2L^0(x_0, \upsilon)$ положительно определена на касательном пространстве $T_{x_0}S$ (т.е. $\forall \upsilon \in T_{x_0}S \setminus \{\mathbf{0}\} \hookrightarrow d^2L^0(x_0, \upsilon) > 0$), то x_0 – точка локального* ***условного строгого*** *минимума функции f;*
2. *если квадратичная форма $d^2L^0(x_0, \upsilon)$ отрицательно определена на касательном пространстве $T_{x_0}S$ (т.е. $\forall \upsilon \in T_{x_0}S \setminus \{\mathbf{0}\} \hookrightarrow d^2L^0(x_0, \upsilon) < 0$), то x_0 – точка локального* ***условного строгого*** *максимума функции f;*
3. *если квадратичная форма $d^2L^0(x_0, \upsilon)$ знаконеопределенная на касательном пространстве $T_{x_0}S$ (т.е. $\exists\ \upsilon_1, \upsilon_2 \in T_{x_0}S \hookrightarrow d^2L^0(x_0, \upsilon_1) > 0 \ \wedge\ d^2L^0(x_0, \upsilon_2) < 0$), то x_0 не является точкой локального условного экстремума функции f;*
4. *если квадратичная форма $d^2L^0(x_0, \upsilon)$ является или положительно, или отрицательно полуопределенной на касательном пространстве $T_{x_0}S$, то x_0 может быть точкой локального условного экстремума (как строгого, так и нестрогого), а может и не быть таковой.*

Доказательство. Из леммы 2.1 и теоремы 2.1 следует, что достаточно проверить выполнение условий теоремы 2.1 для функции $\widetilde{f}(t)$ в точке t_0. Если мы докажем, что на касательном пространстве $T_{x_0}S$ второй дифференциал $d^2L^0(x_0, \upsilon)$ совпадает со вторым дифференциалом $d^2\widetilde{f}(t_0, \tau)$, то теорема будет доказана. Уточним, как следует понимать названное совпадение:

$$\text{что означает равенство } d^2L^0(x_0, \upsilon)|_{T_{x_0}S} = d^2\widetilde{f}(t_0, \tau)\ ?$$

Поскольку линейное отображение $\mathbf{r}'(t_0)$ порождает касательное пространство $T_{x_0}S$ и является **биекцией** на $T_{x_0}S$, то любой вектор $\upsilon \in T_{x_0}S$ **единственным** образом представим в виде $\upsilon = \mathbf{r}'(t_0)dt$, где $dt \in \mathbb{R}^n$. Совпадение дифференциалов следует понимать так:

$$\forall dt \in \mathbb{R}^n \ \hookrightarrow\ d^2L^0(x_0, \mathbf{r}'(t_0)dt) = d^2\widetilde{f}(t_0, dt).$$

Это тождество по dt нам нужно доказать.

Теперь заметим, что, в силу тождества $F(\mathbf{r}(t)) \equiv \mathbf{0}$ (см. п. 1 следствия 1.2),

$$L^0(\mathbf{r}(t)) = f(\mathbf{r}(t)) - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l^0 F_l(\mathbf{r}(t)) = f(\mathbf{r}(t)) - 0 = \widetilde{f}(t).$$

Поэтому первый дифференциал

$$d\widetilde{f} = d(L^0(\mathbf{r}(t))) = (grad\ L^0(\mathbf{r}(t)), d\mathbf{r}).$$

По определению второго дифференциала:

$$d^2\widetilde{f}(t, dt) = d(grad\ L^0(\mathbf{r}(t)), d\mathbf{r}(t)) =$$

$$(d(grad\ L^0(\mathbf{r}(t))), \mathbf{r}'(t)dt) + (grad\ L^0(\mathbf{r}(t)), d(\mathbf{r}'(t))dt =$$
$$(D^2L^0(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt, \mathbf{r}'(t)dt) + (grad\ L^0(\mathbf{r}(t)), d(\mathbf{r}'(t))dt).$$

Подставим в полученное выражение второго дифференциала значение t_0. Тогда, в силу (2.5), градиент $grad\ L^0(\mathbf{r}(t_0)) = grad\ L^0(x_0) = \mathbf{0}$. Поэтому

$$d^2\widetilde{f}(t_0, dt) = (D^2L^0(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0)dt, \mathbf{r}'(t_0)dt) = d^2L^0(x_0, \mathbf{r}'(t_0)dt). \blacksquare$$

В заключение обсудим, как использовать полученные признаки для нахождения точек условного экстремума и выяснения их типа. На первом этапе, решая систему (2.4), находят все точки $x_0 \in S$, подозрительные на экстремум, и все отвечающие им наборы Λ^0. Затем находят касательное пространство $T_{x_0}S$: решают систему **линейных** уравнений $DF(x_0)v = \mathbf{0}$, выражая m зависимых координат через $n = p - m$ независимых. На третьем этапе находят матрицу $D^2L^0(x_0)$ вторых производных размером $p \times p$. На последнем этапе рассматривают квадратичную форму, порожденную полученной матрицей, только на тех векторах, которые принадлежат касательному пространству $T_{x_0}S$.

Замечание. Систему нелинейных уравнений $F(x) = \mathbf{0}$ решить как неявное отображение как правило не удается. Но линеаризованную систему $DF(x_0)v = \mathbf{0}$ решить можно всегда. На этом наблюдении основан принцип множителей Лагранжа.

§ 3. Кратный интеграл

Понятие кратного интеграла (КИ) является многомерным обобщением определенного интеграла Римана на отрезке Его обоснование в основных чертах повторяет обоснование одномерного случая. Однако доказательство утверждения о связи специальных разбиений с их мелкостью (лемма 2.6.4) существенно усложняется.

3.1. Кратный интеграл Римана. Ниже приведены обобщения на многомерный случай понятий, введенных выше.

1. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое множество. Конечная совокупность $P(G) = P := \{G_1, ..., G_N\}$ непустых измеримых множеств называется **разбиением множества** E, если
   (a) попарно они пересекаются по множеству нулевой меры: $\mu(G_i \cap G_j) = \varnothing$ при $i \neq j$;
   (b) их объединение образует исходное множество: $\cup_{i=1}^N G_i = G$.
2. **Диаметром** произвольного множества G называют супремум расстояний между двумя точками этого множества:
$$diam(G) := \sup_{x,y\in G} \rho(x, y).$$
Максимальный диаметр подмножеств разбиения называют **мелкостью** разбиения:
$$p(P) := \max_{i=1,\dots,N} diam(G_i).$$
3. Говорят, что разбиение P' является **измельчением** разбиения P (обозначаем $P' \prec P$), если каждое подмножество из P' содержится в некотором подмножестве из P: $\forall i \in \{1, ..., N'\}\ \exists j \in \{1, ..., N\} :\ G'_i \subset G_j$.
4. Пусть $f : G \to \mathbb{R}$ – **ограниченная** функция. Обозначим
$$M_i(f) = M_i := \sup_{G_i} f(x) < +\infty, \quad m_i(f) = m_i := \inf_{G_i} f(x) > -\infty.$$
Неотрицательная величина
$$v(f, G_i) = \sup_{x,y\in G_i} |f(x) - f(y)| = \sup_{G_i} f - \inf_{G_i} f = M_i - m_i \geqslant 0$$
называется **колебанием** функции f на множестве G_i.
5. Определим
верхнюю сумму Дарбу $S^*_P(f) = S^*_P := \sum_{i=1}^N M_i\ \mu(G_i) < +\infty$,
нижнюю сумму Дарбу $S_{*P}(f) = S_{*P} := \sum_{i=1}^N m_i\ \mu(G_i) > -\infty$,
разность сумм Дарбу $V_P(f) := S^*_P - S_{*P} = \sum_{i=1}^N (M_i - m_i)\mu(P_i) = \sum_{i=1}^N v(f, G_i)\ \mu(G_i) \geqslant 0$.

Лемма 3.1. *Свойства разбиения и измельчения:*

1. *мера множества* G *равна сумме мер подмножеств из разбиения:* $\mu(G) = \sum_{i=1}^N \mu(G_i)$*;*
2. *если* $P' \prec P$*, то* $p(P') \leqslant p(P)$*;*

3. *транзитивность измельчения: если* $P' \prec P$ *и* $P'' \prec P'$, *то* $P'' \prec P$;
4. *для любых двух разбиений существует их общее измельчение:*

$$\forall P, P' \ \exists P'' \ : P'' \prec P \ \wedge \ P'' \prec P';$$

5. *существует разбиение сколь угодно малой мелкости.*

Задача. Докажите пп. 1-3.

Доказательство п. 4. В качестве P'' можно взять объединение всевозможных попарных пересечений $P_i \cap P'_j$ и отбросить пустые пересечения.

Доказательство п. 5. Погрузим данное множество в клетку K (т.е. прямоугольный параллелепипед, стороны которого параллельны осям координат). Разобьем клетку с помощью разбиения каждой стороны, добившись требуемой мелкости. Затем пересечем каждый элемент из разбиения клетки с данным множеством и отбросим пустые пересечения. ■

Определение 3.1. Схема Дарбу:

1. **Нижним интегралом Дарбу** называется $I_* := \sup_P S_{*P}$; **верхним интегралом Дарбу** называется $I^* := \inf_P S^*_P$.
2. Если $I_* = I^*$, то ограниченная функция f называется **интегрируемой по Риману на G по схеме Дарбу**, а общее значение $I_D = I_* = I^*$ называется **интегралом Римана** по схеме Дарбу.

Лемма 3.2. *(об упорядоченности интегральных сумм и интегралов Дарбу) Для произвольных разбиений* P, P' *справедливы двусторонние оценки*

$$-\infty < S_{*P} \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S^*_{P'} < +\infty.$$

Доказательство повторяет доказательства лемм 2.6.1-2.6.3.

Следующее утверждение о связи интегралов Дарбу с мелкостью разбиения формулируется без изменений (см. лемму 2.6.4), но его доказательство, которое весьма сложно в многомерном случае, мы опускаем.

Лемма 3.3. *Для произвольного* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\delta(\varepsilon) > 0$, *что для произвольного разбиения* P, *у которого мелкость* $p(P) < \delta$, *выполняются оценки:* $0 \leqslant I_* - S_{*P}(f) < \varepsilon \ \wedge 0 \leqslant S^*_P(f) - I^* < \varepsilon$.

Теперь мы можем сформулировать

Теорема 3.1. *(критерии интегрируемости функции по схеме Дарбу)*

1. *Существует интеграл* I_D.
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists P: \ V_P(f) < \varepsilon$.
3. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, *что разность* $V_P(f) < \varepsilon$ *для любого разбиения* P, *мелкость которого* $p(P) < \delta$.

Доказательство теоремы повторяет доказательство теоремы 2.6.1.

Определение 3.2. Схема Римана:

1. На каждом подмножестве $G_i \in P$ выберем произвольную точку $\xi_i \in G_i$. Объединение этих точек назовем **выборкой** и обозначим через $\Xi =$

$\{\xi_1, ..., \xi_N\}$. **Интегральной суммой Римана**, отвечающей разбиению P и выборке Ξ, ограниченной функции f называется

$$S_{P,\Xi}(f) = S_{P,\Xi} := \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\ \mu(G_i).$$

2. **Интегралом Римана по схеме Римана ограниченной** функции f называется конечный предел

$$I_R := \lim_{p(P)\to 0} S_{P,\Xi}(f) \in \mathbb{R},$$

т.е. такое число, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall P,\ p(P) < \delta\ \wedge\ \forall \Xi\ \hookrightarrow\ |S_{P,\Xi}(f) - I| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Теорема 3.2. *(о совпадении интегралов по схемам Дарбу и Римана) Интеграл I_R существует тогда и т.т., когда существует интеграл I_D; при этом они совпадают: $I_R = I_D$.*

Доказательство повторяет доказательство теоремы 2.6.2, но сейчас мы опираемся на **ограниченность** функции f как на условие, заложенное в определении 3.2

Обозначение:

$$I = \int\limits_G f(x)dx = \int \cdots \int\limits_G f(x^{(1)}, ..., x^{(n)})\ dx^{(1)}...dx^{(n)}.$$

Терминология: 1) при $n \geqslant 2$ интеграл называют **кратным**, при $n = 2$ – двойным, при $n = 3$ – тройным; 2) функцию f называют интегрируемой.

Замечание 1. Мы установили (лемма 2.6.5), что существование интеграла Римана **на отрезке** влечет ограниченность подынтегральной функции. Для кратных интегралов это утверждение в общем случае неверно даже для случая $n = 1$. Поэтому ограниченность функции f присутствует в определении 3.2.

Задача. Постройте контрпример интегрируемой, но неограниченной функции на измеримом одномерном множестве G. (Указание: в качестве множества G возьмите сходящуюся числовую последовательность.)

Замечание 2. При $n = 1$ определение 3.2 "почти" совпадает с определением интеграла Римана 2.6.3. Отличие состоит, во-первых, в том, что измеримое одномерное множество G не обязано быть отрезком. Во-вторых, согласно определению 2.6.4: $\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$. Т.е. интеграл Римана на отрезке есть интеграл второго рода на "ориентированной кривой" $[a, b]$, а кратный интеграл Римана на отрезке есть интеграл первого рода $\int_{[a,b]} f(x)dx$ на неориентированной кривой $[a, b]$. Точнее, имеет место

Лемма 3.4. *(о преемственности) Интеграл Римана от ограниченной функции f на измеримом множестве $[a, b]$ $(a < b)$ существует в смысле определения 3.2 тогда и т.т., когда существует интеграл Римана в смысле определения 2.6.3; при этом интегралы совпадают:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx,\ \text{где } a < b.$$

Доказательство импликации $\Rightarrow$ опирается на **существование** такого разбиения, при котором выполнен п. 2 теоремы 2.6.1. Остается применить для этого же разбиения п. 2 теоремы 3.1.

Доказательство импликации $\Leftarrow$ опирается на п. 3 теоремы 3.1, в котором рассматривается множество **всевозможных** разбиений отрезка на измеримые подмножества, в том числе и на подотрезки. Остается только применить п. 3 теоремы 3.1 и сослаться на п. 3 теоремы 2.6.1. ■

3.2. Классы интегрируемых функций.

ТЕОРЕМА 3.3. *Если функция f **непрерывна на компактном измеримом** множестве, то она интегрируема на нем.*

Задача. Докажите теорему 3.2. Указание: доказательство такое же, как у теоремы 2.6.8.

Докажем более общую теорему, продемонстрировав удобство применения критерия п. 2 теоремы 3.1.

ТЕОРЕМА 3.4. *Пусть функция f ограничена на компактном измеримом множестве G, и множество $\Gamma \subset G$ ее точек разрыва имеет жорданову меру ноль: $\mu(\Gamma) = 0$. Тогда f интегрируема на G.*

Доказательство. Обозначим $M := \sup_{x\in G} |f(x)|$. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. В силу леммы 2.13.4, сущетвует **открытое** измеримое подмножество D, которое обладает такими свойствами: $\Gamma \subset D$, $\mu(D) < \varepsilon$. В силу открытости D, на измеримом **комапактном** дополнении $G \setminus D$ функция f непрерывна и стало быть интегрируема. В силу п. 2 теоремы 3.1, существует такое разбиение P' множества $G \setminus D$, что $V_{P'}(f) < \varepsilon$. Пересечение $G_D = D \cap G$ двух измеримых множеств является измеримым и его мера удовлетворяет оценке: $\mu(G_D) \leqslant \mu(D) < \varepsilon$. Добавим к разбиению P' подмножество G_D, получим разбиение $P = P' \cup \{G_D\}$ всего множества G. Используя полученные выше оценки, имеем:

$$V_P(f) = V_{P'}(f) + v(f, G_D)\mu(G_D) < \varepsilon + 2M\varepsilon = (1 + 2M)\varepsilon.$$

Остается сослаться на п. 2 теоремы 3.1. ■

3.3. Свойства кратного интеграла. Свойства кратного интеграла связаны с изменением подынтегральной функции и с изменением множества, по которому осуществляется интегрирование.

ТЕОРЕМА 3.5. *(зависимость от подынтегральной функции) Пусть G – измеримое множество. Справедливы утверждения:*

1. ***(мера и интеграл)***

$$\int\limits_G dx = \int\limits_G 1 \cdot dx = \mu(G).$$

2. ***(линейность интеграла)*** *Пусть функции f, g интегрируемы на G, α, β – произвольные числа. Тогда существует интеграл*

$$\int\limits_G (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_G f(x)dx + \beta \int\limits_G g(x)dx.$$

3. ***(интегрируемость произведения и частного)*** *Пусть функции f, g интегрируемы на G. Тогда их произведение fg, а если $\inf_G |g| > 0$, то и частное f/g интегрируемы на G.*
4. ***(интегрируемость модуля функции)*** *Если функция f интегрируема на G, то и функция $|f|$ интегрируема на G, при этом*
$$\Big| \int_G f(x)dx \Big| \leqslant \int_G |f(x)|dx.$$
5. ***(интегрирование неравенств)*** *Если функции f, g интегрируемы на G и $f \leqslant g$ на G, то*
$$\int_G f(x)dx \leqslant \int_G g(x)dx.$$
6. ***(теорема о среднем)*** *(a) Пусть функции f, g интегрируемы на G, функция $g(x) \geqslant 0$, а $m \leqslant f(x) \leqslant M$ на G. Тогда существует такое число $\lambda \in [m, M]$, что*
$$\int_G f(x)g(x)dx = \lambda \int_G g(x)dx. \tag{3.2}$$
(b) Если, дополнительно, G – замыкание области, а f непрерывна на G, то
$$\exists x_0 \in G : \int_G f(x)g(x)dx = f(x_0) \int_G g(x)dx;$$
в частности, при $g(x) \equiv 1$
$$\int_G f(x)dx = f(x_0)\ \mu(G).$$

Доказательства пунктов 1- 6(a) аналогичны доказательствам тех же свойств интегрирования на отрезке.

Доказательство п. 6(b). Поскольку G – измеримое множество, то оно ограничено; по условию G замкнуто. Следовательно, G – компактное множество. Согласно теореме 2.3.7 непрерывная функция достигает на компактном множестве своих нижней и верхней граней. Поэтому существуют точки x_1, x_2, в которых $m = \inf_G f = f(x_1)$, $M = \sup_G f = f(x_2)$. Итак: $\forall x \in G \hookrightarrow f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$. Согласно п. 6 (a), существует число $\lambda \in [f(x_1), f(x_2)]$, для которого выполнено равенство (3.2). Если $\lambda = f(x_i)$ $(i = 1, 2)$, то утверждение доказано. Если же $\lambda \in (f(x_1), f(x_2))$, то из определения точных граней и в силу непрерывности функции f: (a) в окрестности точки x_1 найдется точка $x_3 \in Int(G)$, в которой $f(x_3) < \lambda$, (b) в окрестности точки x_2 найдется точка $x_4 \in Int(G)$, в которой $f(x_4) > \lambda$ (обоснуйте это утверждение!). Поскольку внутренность $Int(G)$, будучи областью, является линейно-связным множеством, на $Int(G)$ справедлива теорема 2.3.6 о промежуточных значениях: существует точка $x_0 \in Int(G)$, в которой $f(x_0) = \lambda$. ■

Теорема 3.6. *(зависимость от множества интегрирования) Справедливы утверждения:*

1. *Если функция f интегрируема на измеримом множестве G, то она* ***интегрируема на любом измеримом подмножестве*** *$G' \subset G$.*
2. *Пусть множества G_1, G_2 измеримы и не имеют общих внутренних точек, т.е. $Int(G_1) \cap Int(G_2) = \varnothing$. Пусть функция $f : E := G_1 \cup G_2 \to \mathbb{R}$ ограничена и интегрируема на G_1 и на G_2. Тогда функция f интегрируема на E и имеет место* ***аддитивность интеграла****:*
$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_{G_1} f(x)dx + \int\limits_{G_2} f(x)dx.$$
3. *Пусть функция f ограничена и интегрируема на G, а $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ – последовательность измеримых множеств $E_i \subset E$ таких, что $\lim_{i\to\infty} \mu(E_i) = \mu(E)$. Тогда имеет место* ***непрерывность интеграла по множеству****:* $\lim_{i\to\infty} \int_{E_i} f(x)dx = \int_E f(x)dx$.

Доказательство п. 1. Дополним разбиение P' множества G' мелкости $p(P')$ до разбиения P множества G с сохранением мелкости: $p(P) = p(P')$. Это можно сделать, присоединив к элементам разбиения P' все элементы разбиения **измеримого** дополнения $P \setminus P'$ с мелкостью, которая не превосходит $p(P')$. Для разности сумм Дарбу справедлива оценка:

$$V_{P'}(f) = \sum_{i=1}^{N'} v(G'_i, f)\ \mu(G_i) \leqslant \sum_{j=1}^{N} v(G_j, f)\ \mu(G_j) = V_P(f),$$

поскольку все слагаемые неотрицательные и правая сумма содержит все слагаемые из левой суммы. Остается сослаться на п. 3 теоремы 3.1 и учесть, что $V_P(f) \to 0$ при $p(P) \to 0$ в силу интегрируемости f на G.

Доказательство п. 2. Пусть P_k $(k = 1, 2)$ – произвольные разбиения множеств G_k. Поскольку множества G_k не имеют общих внутренних точек, объединение $P := P_1 \cup P_2$ является разбиением объединения $E = G_1 \cup G_2$. В силу п. 2 теоремы 3.1, разбиения P_k можно выбрать такими, чтобы разности $V_{P_k}(f) < \varepsilon/2$, где $\varepsilon > 0$ – произвольное. Тогда разность $V_P(f) = V_{P_1}(f) + V_{P_2}(f) < \varepsilon$, что доказывает утверждение.

Доказательство п. 3 следует из оценок

$$\Big| \int_G f(x)dx - \int_{G_i} f(x)dx \Big| = \Big| \int_{G\setminus G_i} f(x)dx \Big| \leqslant \sup_E |f(x)|\ \ \mu(G \setminus G_i) =$$

$$\sup_E |f(x)|\ (\mu(G) - \mu(G_i)) \to 0 \text{ при } i \to \infty. \ \blacksquare$$

Следствие 3.1. *(интегрирование и множество меры ноль)*

1. *Если функция f ограничена и интегрируема на измеримом множестве G, то при изменении ее значений на подмножестве $G' \subset G$ меры ноль (с сохранением ограниченности) ее интегрируемость сохраняется, а величина интеграла не меняется.*

2. *Пусть функция f определена и ограничена на замыкании $\overline{G}$ измеримого множества. Тогда, если интегралы*

$$\int_G f(x)dx, \quad \int_{\overline{G}} f(x)dx, \quad \int_{intG} f(x)dx$$

существуют, то одновременно, и при этом они равны.

Задача. Докажите следствие 3.1.

3.4. Элементарные множества. Этот тип множеств нам понадобится для перехода от кратных интегралов к "цепочке" интегралов от одной переменной.

Лемма 3.5. *Если множество $G \subset \mathbb{R}^n$ измеримо, то* ***цилиндр*** *с основанием G, т.е*

$$cyl(G) := G \times [a,b] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}: \ x \in G \ \wedge \ y \in [a,b]\},$$

тоже измерим и $\mu(cyl(G)) = \mu(G)(b-a)$.

Доказательство. Если $K_{in} \subset G$, $K_{ex} \supset G$ – вписанное и описанное в G клеточные множества, то $K_{in} \times [a,b] \subset G \times [a,b]$, $K_{ex} \times [a,b] \supset G \times [a,b]$ – клеточные множества **вписанное и описанное в цилиндр**. (Докажите! См. рис. ???) Поскольку

$$\mu(K_{in})(b-a) = \mu(K_{in} \times [a,b]) \leqslant \mu(K_{ex} \times [a,b]) = \mu(K_{ex})(b-a),$$

то для разности верхней и нижней мер цилиндра верна оценка:

$$\mu^*(cyl(G)) - \mu_*(cyl(G)) \leqslant (\mu(K_{ex}) - \mu(K_{in}))(b-a).$$

Но, в силу измеримости G, разность $\mu(K_{ex}) - \mu(K_{in})$ может быть сколь угодно малой. Значит, $\mu^*(cyl(G)) = \mu_*(cyl(G)) = \mu(cyl(G))$. ■

Рис. ???

Следующее понятие является обобщением понятия цилиндр.

Определение 3.3. Множество $F \subset \mathbb{R}^{n+1}$ называется **элементарным** относительно оси x_{n+1}, если существует такое измеримое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ и такие непрерывные функции $\varphi, \psi : \overline{G} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие оценке $\varphi(x) < \psi(x)$ на G, что

$$F = \{(x^{(1)}, ..., x^{(n)}, x^{(n+1)}) = (x, x^{(n+1)}): \ x \in G \ \wedge \ \varphi(x) < x^{(n+1)} < \psi(x)\}.$$

(см. рис. ???)

Рис. ???

Теорема 3.7. *(о мере элементарного множества) Элементарное множество измеримо и*

$$\mu(F) = \int_G (\psi(x) - \varphi(x))dx. \tag{3.3}$$

Доказательство. Мы построим два объединения цилиндров: A – вписанное в F и B – описанное около F. Затем покажем, что меры A и B есть суммы Дарбу интеграла (3.3).

Для произвольного разбиения $P(G) = \{G_i\}_{i=1}^N$ обозначим (см. рис. ???)

$$m_i^\varphi = \inf_{x\in E_i} \varphi(x), \quad M_i^\varphi = \sup_{x\in E_i} \varphi(x), \quad m_i^\psi = \inf_{x\in E_i} \psi(x), \quad M_i^\psi = \sup_{x\in E_i} \psi(x);$$

$$A_i = E_i \times [M_i^\varphi, m_i^\psi], \qquad B_i = E_i \times [m_i^\varphi, M_i^\psi];$$

$$A = \bigcup_{i=1}^N A_i, \qquad B = \bigcup_{i=1}^N B_i.$$

Рис. ???

В силу леммы 3.5, меры цилиндров

$$\mu(A_i) = \mu(E_i)\cdot(m_i^\psi - M_i^\varphi), \qquad \mu(B_i) = \mu(E_i)\cdot(M_i^\psi - m_i^\varphi).$$

По определению, при $i \neq j$ множества G_i, G_j не имеют внутренних точек. Поэтому цилиндры A_i и A_j (а также B_i и B_j) обладают тем же свойством (докажите!). Следовательно,

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^N \mu(A_i) = \sum_{i=1}^N \mu(E_i)\cdot(m_i^\psi - M_i^\varphi) = S_{*P}(\psi) - S_P^*(\varphi).$$

Т.е. **мера** множества A равна разности **интегральных сумм**. Поскольку $A \subset F$, а функции φ и ψ интегрируемы на G (обоснуйте!), то для нижней меры $\mu_*(F)$ (которая всегда существует!) получаем нижнюю оценку:

$$\mu_*(F) \geqslant \mu(A) = S_{*P}(\psi) - S_P^*(\varphi) \ \Rightarrow$$

$$\mu_*(F) \geqslant \lim_{p(P)\to 0}(S_{*P}(\psi) - S_P^*(\varphi)) = \int_G (\psi(x) - \varphi(x))dx.$$

Аналогично рассуждая, получаем верхнюю оценку для верхней меры: $\mu^*(F) \leqslant \int_G (\psi(x) - \varphi(x))dx$. Что доказывает теорему. ■

Замечание. Пункт 1 теоремы 3.5 и теорема 3.7 показывают, что понятия меры и инеграла по сути близки.

Следствие 3.2. *(о мере графика) График числовой функции, непрерывной на измеримом компактном множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, имеет нулевую меру в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Доказательство вытекает из принадлежности графика элементарному множеству:

$$Gr(f) \subset \{(x, x^{(n+1)}) : \ x \in G \ \wedge \ f(x) - \varepsilon < x^{(n+1)} < f(x) + \varepsilon\} \ \Rightarrow$$

$$\mu(Gr(f)) \leqslant 2\varepsilon\cdot\mu(G), \ \text{где } \varepsilon > 0 \text{ произвольное.} \ ■$$

3.5. Сведение кратного интеграла к повторному. Сначала рассмотрим частный случай, когда множество, по которому осуществляется интегрирование, является цилиндром.

Теорема 3.8. *(о повторном интеграле на цилиндре) Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое множество, функция f задана на цилиндре $cyl(G) := G\times[a,b]$ и интегрируема на нем. Пусть для любой точки $x = (x^{(1)}, ..., x^{(n)}) \in G$ существует интеграл $\int_a^b f(x,y)dy$. Тогда функция $h(x) := \int_a^b f(x,y)dy$ интегрируема на G и*

$$\int\limits_{cyl(G)} \cdots \int f(x^{(1)}, ..., x^{(n)}, y)dx^{(1)}...dx^{(n)}\ dy =$$

$$\int\limits_{G} \cdots \int dx^{(1)}...dx^{(n)} \int\limits_a^b f(x^{(1)}, ..., x^{(n)}, y)dy.$$

Второй интеграл в равенстве называют ***повторным****.*

Доказательство. Пусть $P(G) = \{P_i\}_{i=1}^N$ – произвольное разбиение мелкости $p(P) = \delta$, а $\Xi = \{\xi_i\}_{i=1}^N$ – произвольная выборка, подчиненная разбиению P. Пусть $Q([a,b]) = \{y_j\}_{j=1}^K$ – произвольное разбиение отрезка $[a,b]$ мелкости $p(Q) = \sigma$. Введенные разбиения порождают специальное разбиение $P(G) \times Q([a,b]) = \{P_i \times [y_{j-1}, y_j]\}$ и специальную выборку $\{(\xi_i, y_{j-1})\}$ $(i = 1, ...,;\ j = 1, ..., K)$ цилиндра $cyl(G)$. Из теоремы Пифагора следует, что мелкость ν специального разбиения равна $\nu \leqslant \sqrt{\delta^2 + \sigma^2}$.

Нам надо доказать существование повторного интеграла $\int_G dx \int_a^b f(x,y)dy$. С этой целью сравним значение данного кратного интеграла с **произвольной** интегральной суммой Коши повторного интеграла, воспользовавшись **специальной** интегральной суммой Коши данного кратного интеграла:

$$\Delta := \Big| \int\limits_{cyl(G)} \cdots \int f(x^{(1)}, ..., x^{(n)}, y)dx^{(1)}...dx^{(n)}\ dy - \sum_{i=1}^N \left(\int\limits_a^b f(\xi_i, y)dy \right) \mu(G_i) \Big| \leqslant$$

$$\Big| \int\limits_{cyl(G)} \cdots \int f(x,y)\ dxdy - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K f(\xi_i, y_{j-1})\ \mu(G_i)\ (y_j - y_{j-1}) \Big| +$$

$$\Big| \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K f(\xi_i, y_{j-1})\ \mu(G_i)\ (y_j - y_{j-1}) - \sum_{i=1}^N \left(\int\limits_a^b f(\xi_i, y)dy \right) \mu(G_i) \Big|$$

(мы воспользовались леммой 3.5 о мере цилиндра). Поскольку интеграл $\int_{cyl(G)} f(x,y)dxdy$ существует, то любая его интегральная сумма сходиться к нему при единственном условии, что мелкость ν стремиться к нулю. Значит, первое слагаемое Δ_1 в оценке меньше, чем $\varepsilon/2$, если $\sigma = \delta$ достаточно малы. Второе слагаемое Δ_2 оценивается так:

$$\Delta_2 \leqslant \sum_{i=1}^N \Big| \sum_{j=1}^K f(\xi_i, y_{j-1})(y_j - y_{j-1}) - \int\limits_a^b f(\xi_i, y)dy \Big|\ \mu(G_i).$$

Но $\sum_{j=1}^{K} f(\xi_i, y_{j-1})(y_j - y_{j-1})$ есть интегральная сумма интеграла $\int_a^b f(\xi_i, y)dy$, который, согласно условию, существует. Следовательно, для каждого $i = 1, ..., N$ существует такая мелкость σ_i разбиения Q_i отрезка $[a, b]$, что

$$\Big|\sum_{j=1}^{K} f(\xi_i, y_{j-1})(y_j - y_{j-1}) - \int\limits_a^b f(\xi_i, y)dy\Big| < \varepsilon/(2\mu(G)).$$

Из N мелкостей σ_i выберем наименьшую, что обеспечит оценку

$$\Delta_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2\mu(G)} \sum_{i=1}^{N} \mu(G_i) = \frac{\varepsilon}{2\mu(G)} \cdot \mu(G) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 < \varepsilon$. Поскольку ε произвольно, то, согласно определению 3.2, существует интеграл

$$\int\limits_G \cdots \int \left(\int\limits_a^b f(x^{(1)}, ..., x^{(n)}, y)dy \right) dx^{(1)}...dx^{(n)} =$$

$$\int\limits_G \cdots \int dx^{(1)}...dx^{(n)} \int\limits_a^b f(x^{(1)}, ..., x^{(n)}, y)dy =$$

$$\lim_{p(P)\to 0} \sum_{i=1}^{N} \left(\int\limits_a^b f(\xi_i, y)dy \right) \mu(G_i) = \int\limits_{cyl(G)} \cdots \int f(x^{(1)}, ..., x^{(n)}, y)dx^{(1)}...dx^{(n)}\, dy. \blacksquare$$

Обобщением теоремы 3.8 является

Теорема 3.9. *(о повторном интеграле на элементарном множестве) Пусть $F \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – элементарное множество относительно оси $x^{(n+1)}$, т.е.*

$$F = \{(x^{(1)}, ..., x^{(n)}, x^{(n+1)}) : \ (x^{(1)}, ..., x^{(n)}) \in G \ \wedge$$

$$\varphi(x^{(1)}, ..., x^{(n)}) < x^{(n+1)} < \psi(x^{(1)}, ..., x^{(n)})\},$$

где $G \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое множество, а функции φ и ψ непрерывны на $\overline{G}$ и всюду удовлетворяют оценке $\varphi < \psi$ (см. определение 3.2). Пусть функция f задана на множестве F и интегрируема на нем. Пусть для любой точки $(x^{(1)}, ..., x^{(n)}) \in G$ существует интеграл

$$g(x^{(1)}, ..., x^{(n)}) := \int\limits_{\varphi(x^{(1)},...,x^{(n)})}^{\psi(x^{(1)},...,x^{(n)})} f(x^{(1)}, ..., x^{(n)}, x^{(n+1)})\ dx^{(n+1)}.$$

Тогда функция g интегрируема на G и

$$\int\limits_F \cdots \int f(x^{(1)}, ..., x^{(n)}, x^{(n+1)})dx^{(1)}...\ dx^{(n)}dx^{(n+1)} =$$

$$\int\limits_G \cdots \int dx^{(1)}...dx^{(n)} \int\limits_{\varphi(x^{(1)},...,x^{(n)})}^{\psi(x^{(1)},...,x^{(n)})} f(x^{(1)},...,x^{(n)},x^{(n+1)})\ dx^{(n+1)}.$$

Доказательство основано на замене элементарного множества F цилиндром с основанием G. Пусть

$$a = \min_{\overline{G}} \varphi(x^{(1)},...,x^{(n)}),\quad b = \max_{\overline{G}} \psi(x^{(1)},...,x^{(n)}),\quad cyl(G) := G\times[a,b]\supset F.$$

Определим функцию (см. рис. ???)

$$\widetilde{f}:\ cyl(G)\to\mathbb{R},\quad \widetilde{f} = \begin{cases} f(x^{(1)},...,x^{(n)},x^{(n+1)}), & (x^{(1)},...,x^{(n)},x^{(n+1)})\in F,\\ 0, & (x^{(1)},...,x^{(n)},x^{(n+1)})\notin F.\end{cases}.$$

Рис. ???

Поскольку $\widetilde{f}$ интегрируема на измеримых множествах F и $cyl(G)\setminus F$, то, в силу аддитивности интеграла и определения функции $\widetilde{f}$, получаем:

$$\int\limits_{cyl(G)} \widetilde{f}(x)dx = \int\limits_F \widetilde{f}(x)dx\ + \int\limits_{cyl(G)\setminus F} \widetilde{f}(x)dx = \int\limits_F \widetilde{f}(x)dx = \int\limits_F f(x)dx.$$

Но на цилиндре справедлива теорема 3.7. Поэтому и опять же, в силу определения функции $\widetilde{f}$, получаем

$$\int\limits_{cyl(G)} \widetilde{f}(x)dx = \int\limits_G \cdots \int dx^{(1)}...dx^{(n)} \int\limits_a^b \widetilde{f}(x^{(1)},...,x^{(n)},x^{(n+1)})dx^{(n+1)} =$$

$$= \int\limits_G \cdots \int dx^{(1)}...dx^{(n)} \int\limits_{\varphi(x^{(1)},...,x^{(n)})}^{\psi(x^{(1)},...,x^{(n)})} f(x^{(1)},...,x^{(n)},x^{(n+1)})dx^{(n+1)}.\ \blacksquare$$

Замечание 1. Если множество G в свою очередь является элементарным относительно оси $x^{(n)}$ и выполнены условия теоремы 3.8, то интеграл $\int_G g(x^{(1)},...,x^{(n)})\ dx^{(1)}...dx^{(n)}$ можно заменить повторным:

$$\int\limits_F \cdots \int f(x^{(1)},...,x^{(n)},x^{(n+1)})dx^{(1)}...\ dx^{(n)}\ dx^{(n+1)} =$$

$$\int\limits_{G'} \cdots \int dx^{(1)}...dx^{(n-1)} \int\limits_{\varphi'(x^{(1)},...,x^{(n)})}^{\psi'(x^{(1)},...,x^{(n)})} dx^{(n)} \int\limits_{\varphi(x^{(1)},...,x^{(n)})}^{\psi(x^{(1)},...,x^{(n)})} f(x^{(1)},...,x^{(n+1)})\ dx^{(n+1)}.$$

Чтобы проверить, является ли множество G элементарным относительно оси x_n, нужно **спроектировать** его на дополнительное подпространство $\mathbb{R}^{n-1}$ вдоль выбранной оси x_n; получим проекцию $\widetilde{G}\subset\mathbb{R}^{n-1}$, которую следует рассмотреть как возможную область определения тех функций $\widetilde{\varphi}$ и $\widetilde{\psi}$, графики которых огарничивают элементарное множество G. На практике особенно важен случай, когда удается кратный интеграл свести к цепочке одномерных. В этом случае есть надежда на применение формулы Ньютона-Лейбница.

Замечание 2. Если множество, по которому осуществляют интегрирование, не является элементарным, то нужно попытаться разбить его ("разрезать") на элементарные подмножества. Для множеств, граница которых состоит из конечного количества гладких поверхностей, такое разбиение всегда возможно.

Замечание 3. Как уже отмечалось, в кратном интеграле порядок координат не существенен. Не исключено, что теорему 3.8 можно применить к разным координатам. В этом случае говорят об **изменении порядка интегрирования** в повторном интеграле.

Пример. Если F – плоское множество, и теорема 3.8 применима по каждой оси, то (см. рис. ???)

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx.$$

Рис. ???

§ 4. Замена переменных в кратном интеграле

Замена переменных не только важный технический прием, который позволяет найти конкретные кратные интегралы. Это ключевое понятие в теории многомерных поверхностей и, следовательно, в теории интегрирования по поверхностям. Оно лежит в основе дифференциальной геометрии и топологии, теории обыкновенных дифференциальных уравнений (особенно динамических систем) и уравнений математической физики. Существенно, что в этом понятии собраны понятия классической геометрии, линейной алгебры и математического анализа.

Прежде всего нам понадобятся

4.1. Геометрические свойства меры Жордана. Напомним, что: **движением** евклидова пространства называется преобразование, сохраняющее расстояние между произвольными точками; частным случаем движения является **ортогональное** пробразование, которое сохраняет скалярное произведение любых двух векторов; **растяжением** $str(\kappa, g) = str$ с коэффициентом $\kappa \neq 0$ вдоль единичного ветора $g = g_1 \in \mathbb{R}^n$ называется преобразование, действующее в ортонормированном базисе $\{g_1, ..., g_n\}$ по правилу: $str(y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n)}) := (\kappa y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n)})$; **самосопряженным** называется линейное преобразование $self$, которое действует как растяжение с коэффициентами κ_i $(i = 1, ..., n)$ вдоль n попарно ортогональных направлений, т.е. в каноническом ортонормированном базисе отображение $self(y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n)}) := (\kappa_1 y^{(1)}, \kappa_2 y^{(2)}, ..., \kappa_n y^{(n)})$; **аффинным** называется композиция линейного преобразования и сдвига. Многомерным (n-мерным) **параллелепипедом**, построенном на векторах $v_1, ..., v_n$, называется множество $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n, \quad \alpha_i \in [0, 1]\}$.

Задача. Проверьте определение параллелепипеда для случаев $n = 1, 2, 3$.

Кроме аффинных нас интересуют преобразования более широкого класса:

Определение 4.1. Пусть $U, V \subset \mathbb{R}^n$ – открытые подмножества. Биекция $F : U \to V$ называется **диффеоморфизмом**, если $F \in C^1(U)$ и в каждой точке $x \in U$ производная отображения невырождена, т.е. $detDF(x) \neq 0$.

Из теоремы 1.3 следует, что обратное отображение $F^{-1} \in C^1$ и в каждой точке $y \in V$ определитель $detDF^{-1}(y) \neq 0$, т.е. F^{-1} тоже диффеоморфизм. Из теоремы о дифференцировании сложного отображения следует, что композиция двух диффеоморфизмов является диффеоморфизмом (докажите!). Нас интересует влияние диффеоморфизма на измеримость и на саму меру множества. Предварительно будет доказана

Лемма 4.1. *(верхняя оценка диаметра и меры образа при диффеоморфизме) Пусть $F : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ – диффеоморфизм областей, $X \subset U$ – измеримое компактное подмножество. Пусть $c = \max_{x \in X} ||DF(x)||$. Тогда:*

1. *если X выпуклое множество, то диаметр образа $F(X)$ допускает оценку сверху через диаметр прообраза: $diam(F(X)) \leqslant c \cdot diam(X)$;*
2. *образ $F(X)$ содержится в некотором измеримом множестве $M \supset F(X)$, мера которого оценивается сверху: $\mu(M) \leqslant \gamma_n c^n \mu(X)$, где коэффициент γ_n зависит только от размерности n.*

Обсуждение. Смысл леммы в том, что при диффеоморфизме компактного множества изменение диаметра линейно зависит от максимума нормы производной на прообразе, а изменение меры зависит от n-й степени максимума нормы производной.

Замечание 1. Утверждение п. 2 не опирается на выпуклость множества X.

Замечание 2. Утверждение п. 2 носит условный характер: пока мы не можем утверждать, что сам образ $F(X)$ измеримое множество.

Доказательство. Поскольку множество X компактно, а отображение $F \in C^1(U)$, то $c = \max_{x \in X} ||DF(x)|| < +\infty$ существует. Опять же в силу компактности X, образ $F(X)$ – тоже компактное множество. Отсюда следует, что существуют точки $y_1, y_2 \in F(X)$, расстояние между которыми равно диаметру множества $F(X)$. Применяя теорему 1.1 о среднем, получаем требуемое:

$$diam(F(X)) = |y_2 - y_1| = |F(x_2) - F(x_1)| \leqslant c|x_2 - x_1| \leqslant c \cdot diam(X).$$

Поскольку X измеримо и компактно, а множество U открыто, то существует клеточное множество $C = \cup_{i=1}^{N} C_i$ (где C_i – клетки), которое содержит X, содержится в U и для которого справедливы следующие оценки: 1) оценка нормы $\max_{x \in C} ||DF(x)|| < 2c$, 2) оценка меры $\mu(C) < 2\mu(X)$. (Написанные оценки "грубые", но для наших целей этого достаточно.)

Чтобы определить множество M, измельчим клетки C_i до "почти кубов". Возьмем у клетки C_i самое малое ребро d и отложим его от любой вершины по всем исходящим ребрам до их исчерпания. Если ребро d не откладывается целое количество раз, то в конце оставим отрезок a, удовлетворяющий оценке $d < a < 2d$. В результате получим измельчение, которое состоит из клеток D_j $(j = 1, ..., N')$, у которых отношение размеров ребер $1 \leqslant \lambda < 2$, а их мера $d_j^n \leqslant \mu(D_j) < (2d_j)^n$ (через d_j обозначено самое малое ребро в клетке D_j). Диаметр полученных клеток оценивается сверху $diam(D_j) \leqslant 2d_j\sqrt{n}$ (теорема Пифагора). Из доказанного п. 1 получаем, что диаметр образа допускает оценку: $diam(F(D_j)) \leqslant (2c)2d_j\sqrt{n}$. Следовательно, образ клетки D_j принадлежит n-мерному шару радиуса $4cd_j\sqrt{n}$, который, в свою очередь, принадлежит n-мерному кубу-клетке Q_j с ребром $8cd_j\sqrt{n}$ (см. рис. ???). Мера куба-клетки Q_j равна $(8cd_j\sqrt{n})^n$. Объединение $M := \cup_{j=1}^{N'} Q_j$ является измеримым множеством, котрое содержит образ $F(C)$. Поскольку множество $C = \cup_{j=1}^{N'} D_j$ клеточное, его мера равна сумме мер клеток. Поэтому

$$\frac{\mu(M)}{\mu(C)} \leqslant \frac{\sum_{j=1}^{N'} \mu(Q_j)}{\mu(C)} \leqslant \frac{\sum_{j=1}^{N'} (8cd_j\sqrt{n})^n}{\mu(C)} = \frac{(8c\sqrt{n})^n \sum_{j=1}^{N'} d_j^n}{\mu(C)} \leqslant$$

$$\frac{(8c\sqrt{n})^n \sum_{j=1}^{N'} \mu(D_j)}{\mu(C)} = \frac{(8c\sqrt{n})^n \mu(C)}{\mu(C)} = (8c\sqrt{n})^n.$$

Окончательно получаем:

$$\mu(M) \leqslant (8\sqrt{n})^n c^n \mu(C) < \gamma_n c^n \mu(X), \text{ где } \gamma_n = 2(8\sqrt{n})^n. \blacksquare$$

Лемма 4.2. *(о сохранении измеримости при диффеоморфизме) Пусть $F : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ – диффеоморфизм областей, $X \subset U$ – измеримое компактное множество. Тогда образ $Y := F(X)$ – измеримое множество.*

Доказательство. Множество X компактное, отображение F, будучи дифференцируемым, является непрерывным. Поэтому (теорема 2.3.4) образ Y также компактное множество. В частности, Y – ограниченое множество.

Из определения диффеоморфизма следует, что отображение F преобразует внутренность множества во внутренность: в частности, $F(Int(X)) = Int(Y)$ и $F(Int(U \backslash X)) = Int(V \backslash Y)$. Поэтому граница ∂X преобразуется в границу $\partial Y = F(\partial X)$. Обсудим измеримость и оценим меру образа $F(\partial X)$ сверху. Поскольку граница ∂X компактна, ее можно погрузить в клеточное множество C, которое целиком принадлежит U. Поскольку граница ∂X имеет меру ноль, ее можно погрузить в клеточное множество C_ε, мера которого меньше произвольного малого $\varepsilon > 0$ и которое для всех достаточно малых ε принадлежит клеточному множеству C (докажите второе утверждение). Тогда, согласно п. 2 лемме 4.1, образ $F(C_\varepsilon)$ содержится в некотором измеримом множестве M_ε, мера которого оценивается так: $\mu(M_\varepsilon) \leqslant \gamma_n c^n \varepsilon$, где $c = \max_{x \in C} ||Df(x)||$. Значит, $\mu(M_\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Поэтому граница $\partial Y \subset M$ измерима и имеет меру ноль.

Из критерия измеримости следует, что множество Y измеримо. ■

Фундаментальными являются

Теорема 4.1. *(геометрические свойства меры) Справедливы утверждения:*

1. *Мера инвариантна относительно преобразования движения mot, т.е. для любого измеримого множества G мера $\mu(mot(G)) = \mu(G)$, и, в частности, мера инвариантна относительно ортогональных преобразований.*
2. *Преобразование растяжения $str(\kappa, g)$ изменяет меру множества G в $|\kappa|$ раз: $\mu(str(G)) = |\kappa| \cdot \mu(G)$.*
3. *Самосопряженное преобразование изменяет меру по следующему правилу: $\mu(self(G)) = |\kappa_1 \cdot ... \cdot \kappa_n| \cdot \mu(G) = |detS| \cdot \mu(G)$, где S – матрица преобразования $self$ в произвольном ортонормированном базисе.*
4. *Аффинное преобразование $aff(x) = Ax + \tau$, задаваемое в произвольном ортонормированном базисе матрицей A и вектором сдвига τ, изменяет меру произвольного измеримого множества по правилу: $\mu(aff(G)) = |detA| \cdot \mu(G)$.*
5. *Мера n-мерного параллелепипеда Π, построенного на векторах $v_1, ..., v_n$, равна модулю определителя матрицы, столбцы которой образованы координатами векторов v_i в произвольном ортонормированном базисе: $\mu(\Pi) = |det(v_1 ... v_n)|$.*

Обсуждение. Сформулированные свойства означают, что понятие жордановой меры является преемственным к понятиям длина, площадь и объем.

Доказательство п. 1. (A) Прежде всего, заметим, что при сдвиге клетка преобразуется в клетку тех же размеров и, следовательно, той же меры. Поэтому сдвиг преобразует клеточное множество в клеточное с сохранением меры. Отсюда уже следует, что *сдвиг сохраняет меру произвольного измеримого множества.*

(B) Во-первых, n-мерный шар – измеримое множество (доказательство индукцией с применением элементарности шара по добавляемой оси, см. теорему

3.7). Во-вторых, любой шар с центром в точке x_0 является образом шара того же радиуса с центром в начале координат при сдвиге на вектор x_0. Поэтому все шары одинакового радиуса имеют одинаковую меру. Отсюда следует, что *мера шара при движении не меняется.*

(C) *При гомотетии с коэффициентом $k > 0$ измеримость множества сохраняется, а мера изменяется в k^n раз.* В самом деле, при гомотетии с коэффициентом $k > 0$ клетка преобразуется в клетку с растяжением каждого ребра в k раз, Следовательно, мера клетки изменяется в k^n раз. Дальнейшее обоснование завершите самостоятельно.

(D) Покажем, что *в любое измеримое множество M положительной меры можно вложить конечное непересекающееся объединение $B := \cup_i Ball_i \subset M$ шаров $Ball_i$ одинакового (достаточно малого) радиуса, обладающее свойством* $\mu(B)/\mu(M) \geqslant \lambda_n > 0$, где число λ_n зависит только от размерности пространства n. Т.е. шарами одинакового малого радиуса можно заполнить некую гарантированную по мере часть множества. Возьмем вложенное в M клеточное множество $K = \cup_j K_j \subset M$, мера которого не меньше половины $\mu(M)$. В каждую клетку K_j вложим такое клеточное множество $Q_j = \cup_l q_{j,l}$, составленное из одинаковых достаточно малых n-мерных **кубов** $q_{j,l}$, чтобы мера $\mu(Q_j)$ была не меньше половины меры $\mu(K_j)$. Тогда клеточное множество $Q = \cup Q_j \subset M$ имеет меру $\mu(Q) \geqslant (1/4)\mu(M)$. Теперь в каждый куб $q_{j,l}$ впишем шар $Ball_{j,l}$ (т.е. диаметр шара равен ребру куба). В силу п. (C), отношение γ_n мер шара и описанной клетки-куба зависит только от размерности n. Окончательно получаем, что $\mu(B)/\mu(M) \geqslant (1/4)\gamma_n = \lambda_n$.

(E) Заполним шарами одинакового радиуса гарантированную по мере часть $B_1 \subset M$. Затем так же поступим с дополнением $C_1 := M \setminus B_1$ – заполним шарами одинакового (возможно, меньшего) радиуса гарантированную по мере часть $B_2 \subset C_1$. На следующем шаге возьмем дополнение $C_2 := M \setminus (B_1 \cup B_2)$... Строго возрастающая последовательность $\mu(\cup_{i=1}^k B_i) \to \mu(M)$ при $k \to \infty$ (доказательство от противного). Таким образом, *существует такая конечная упаковка $B := \cup_{j,l} Ball_{j,l} \subset M$ шаров $Ball_{j,l}$ (см. п. (D)) разного радиуса в произвольное измеримое множество M, что разность мер $0 \leqslant \mu(M) - \mu(B) \leqslant \varepsilon$ может быть сколь угодно мала.*

(F) Теперь к произвольному измеримому множеству M положительной меры применим произвольное движение mot – получим множество $M' := mot(M)$. Согласно п. 2 леммы 4.2 множество M' измеримо. Допустим, что $\mu(M) > \mu(M')$ Рассмотрим такую упаковку B шаров в M, чтобы $\mu(B) > \mu(M')$. Поскольку $B' = mot(B) \subset M'$, то $\mu(B') \leqslant \mu(M')$. Но, в силу аддитивности меры и доказанного в п. (B) сохранения меры шара при движении, $\mu(B') = \mu(B) > \mu(M')$. Противоречие. Следовательно, при движении мера множества не убывает. Допустим, что существует такое движение mot и такое множество M, что $\mu(M') > \mu(M)$. Тогда обратное преобразование mot^{-1} (которое также является движением!) преобразует M' в M с уменьшением меры, что противоречит только что доказанному.

Если же мера $\mu(M) = 0$, то заключим M в измеримое множество M_{ext} наперед выбранной положительной малой меры ε. По доказанному, $\mu(mot(M_{ext})) =$

$\mu(M_{ext})$. Но $mot(M) \subset mot(M_{ext})$. Следовательно, $\mu(mot(M)) \leqslant \mu(mot(M_{ext})) = \varepsilon$. Значит, $\mu(M) = \mu(mot(M)) = 0$.

Окончательно, *при движении мера любого измеримого множества не меняется.*

Доказательство п. 2. Пусть mot – произвольное движение, которое вектор g_1 преобразует в первый вектор $e_1 = (1, 0, ..., 0)$ стандартного базиса $\{e_i = (0, ..., 0, 1, 0...0)\}_{i=1}^n$. Тогда $str(\kappa, g_1) = mot^{-1} \cdot str(\kappa, e_1) \cdot mot$. Поскольку растяжение $str(\kappa, e_1)$ преобразует клетку в клетку, то оно меняет меру клетки в $|\kappa|$ раз. Остается сослаться на аддитивность меры и доказанный п. 1.

Доказательство п. 3. В каноническом ортонормированном базисе самосопряженное преобразоование есть суперпозиция n штук растяжений вдоль базисных векторов с коэффициентами κ_i. В силу предыдущего утверждения, $\mu(self(G)) = |\kappa_1 \cdot ... \cdot \kappa_n| \cdot \mu(G) = |detS_{can}| \cdot \mu(G)$, где S_{can} - матрица данного преобразования в каноническом базисе. Из курса линейной алгебры известно, что определитель матрицы преобразования один и тот же в любом базисе, что доказывает утверждение.

Доказательство утверждения п. 4 следует из пп. 1 и 3 и того факта, что произвольное невырожденное линейное преобразование представимо в виде произведения ортогонального и самосопряженного преобразований (полярное разложение).

Утверждение п. 5 есть следствие п. 4 и того факта, что параллелепипед есть образ единичного куба при его отображении матрицей $(v_1...v_n)$. Отметим, что утверждение п. 5 для случая $n = 2$ есть известное из аналитической геометрии правило нахождения площади параллелограмма, а при $n = 3$ – правило нахождения объема параллелепипеда с помощью смешанного произведения. ■

Замечание. Из пп. 1 и 5 теоремы 4.1 следует, что мера плоских множеств совпадает с их площадью, а мера трехмерных – с их объемом.

4.2. Геометрический смысл модуля якобиана.

Теорема 4.2. *Пусть $F : \mathbb{R}^n \supset U \to V \subset \mathbb{R}^n$ – диффеоморфизм областей. Пусть $x_0 \in U$, а $t > 0$. Рассмотрим n-мерный куб-клетку с вершиной в точке x_0 и ребром длины t:*

$$Q(x_0, t) = \{x = x_0 + h \in \mathbb{R}^n : \ 0 \leqslant h^{(i)} \leqslant t, \ i = 1, ..., n\}.$$

Пусть t настолько мало, что $Q(x_0, t) \subset U$. Тогда:

1. *Образ куба $F(Q(x_0, t))$ является измеримым множеством и справедливо предельное равенство:*

$$\lim_{t \to +0} \frac{\mu(F(Q(x_0, t)))}{\mu(Q(x_0, t))} = \lim_{t \to +0} \frac{\mu(F(Q(x_0, t)))}{t^n} = |detDF(x_0)|, \tag{4.1}$$

т.е. модуль якобиана диффеоморфизма в точке x_0 равен коэффициенту изменения меры в данной точке.

2. *Если замыкание подмножества $\overline{U}' \subset U$, то предел (4.1) равномерен на $\overline{U}'$, т.е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : \ \forall x_0 \in \overline{U}' \ \wedge \ \forall t < \delta \ \hookrightarrow \ |\nu(x_0, t)| < \varepsilon, \ \text{где}$$

$$\nu(x_0,t) := |detDF(x_0)| - \frac{\mu(F(Q(x_0,t)))}{t^n}.$$

Обсуждение. В окрестности точки x_0 отображение F представимо в виде

$$F(x) = F(x_0+h) = F(x_0) + DF(x_0)h + \eta(x_0,h),$$

где $\eta(x_0,h) = o(|h|)$ при $|h| \to 0$. Если отбросить остаточный член η, то оставшееся аффинное отображение $h \to F(x_0) + DF(x_0)h$ изменяет меру в точности в $|detDF(x_0)|$ раз (п. 4 теоремы 4.1). Т.е. смысл теоремы в том, что в пределе дифференцируемое отображение искажает меру так же, как его производная.

Доказательство. Во-первых, из леммы 4.2 следует измеримость образа $F(Q(x_0,t))$. Далее, из п. 4 теоремы 4.1 следует, что предельное равенство (4.1) достаточно доказать для отображения

$$\widehat{F}(h) := (DF(x_0))^{-1} \cdot (F(x_0+h) - F(x_0)) = h + \epsilon(h),$$

где $\epsilon(h) = (DF(x_0))^{-1} \cdot \eta(x_0,h) = o(|h|)$ при $|h| \to 0$. Рассмотрим n-мерный куб-клетку с вершиной в начале координат и ребром длины t: $Q(t) = \{\mathbb{R}^n \ni h : 0 \leqslant h^{(i)} \leqslant t,\ i = 1,...,n\}$. Обозначим $\epsilon_{sup}(t) = \sup_{h\in Q(t)} |\epsilon(h)|$. Из определения отображения $\widehat{F}$ следует, что образ куба $\widehat{F}(Q(t))$ целиком содержится в кубе $Q_{ext}(t)$ с ребром $x^{(i)} \in [-\epsilon_{sup}(t), t+\epsilon_{sup}(t)]$ $(i = 1,...,n)$ и целиком содержит куб $Q_{int}(t)$ с ребром $x^{(i)} \in [\epsilon_{sup}(t), t-\epsilon_{sup}(t)]$. Следовательно

$$(t - 2\epsilon_{sup}(t))^n \leqslant \mu(\widehat{F}(Q(t))) \leqslant (t + 2\epsilon_{sup}(t))^n \quad \Leftrightarrow$$

$$t^n\left(1 - 2\frac{\epsilon_{sup}(t)}{t}\right)^n \leqslant \mu(\widehat{F}(Q(t))) \leqslant t^n\left(1 + 2\frac{\epsilon_{sup}(t)}{t}\right)^n.$$

Отображение $\widehat{F}$ непрерывно, поэтому супремум $\epsilon_{sup}(t) = \sup_{h\in Q(t)} |\epsilon(h)|$ достигается в какой-то точке $h^*(t) \in Q(t)$. Если $|h^*(t)| \neq 0$, полученную двустороннюю оценку можно записать так:

$$t^n\left(1 - 2\frac{|\epsilon(h^*(t))|}{|h^*(t)|}\frac{|h^*(t)|}{t}\right)^n \leqslant \mu(\widehat{F}(Q(t))) \leqslant t^n\left(1 + 2\frac{|\epsilon(h^*(t))|}{|h^*(t)|}\frac{|h^*(t)|}{t}\right)^n.$$

Если же $|h^*(t)| = 0$, то и $|\epsilon(h^*(t))| = 0$; в этом случае положим $|\epsilon(h^*(t))|/|h^*(t)| := 0$. В результате дробь $|\epsilon(h^*(t))|/|h^*(t)|$ определена для всех достаточно малых $t > 0$. Но $|h^*(t)| \leqslant \sqrt{n}\cdot t$. Следовательно, при $t \to +0$ верно, что $|h^*(t)| \to +0$, $|\epsilon(h^*(t))| = o(|h^*(t)|)$ при $t \to +0$ и

$$1 \leftarrow \left(1 - 2\frac{|\epsilon(h^*(t))|}{|h^*(t)|}\sqrt{n}\right)^n \leqslant \frac{\mu(\widehat{F}(Q(t)))}{t^n} \leqslant \left(1 + 2\frac{|\epsilon(h^*(t))|}{|h^*(t)|}\sqrt{n}\right)^n \to 1. \quad (4.2)$$

Но $detD\widehat{F}(0) = det(id) = 1$. Значит, равенство (4.1) доказано.

Докажем второе утверждение. Умножим оценку (4.2) на $|detDF(x_0)|$. Из теоремы 4.1, бинома Ньютона и определения малого отображения ϵ следует, что иследуемая разность допускает оценку

$$\left||detDF(x_0)| - \frac{\mu(F(Q(x_0,t)))}{t^n}\right| \leqslant |detDF(x_0)| \sum_{k=1}^{n} C_n^k 2^k \left(\frac{|\epsilon(h^*(t))|}{|h^*(t)|}\sqrt{n}\right)^k \leqslant$$

$$|detDF(x_0)|\sum_{k=1}^{n} C_n^k 2^k \left(\frac{||DF^{-1}(x_0)||\cdot|\eta(x_0,h^*(t))|}{|h^*(t)|}\sqrt{n}\right)^k \leqslant$$

$$\frac{|\eta(x_0,h^*(t))|}{|h^*(t)|}\left(C_1 + C_2\frac{|\eta(x_0,h^*(t))|}{|h^*(t)|} + ... + C_n\left(\frac{|\eta(x_0,h^*(t))|}{|h^*(t)|}\right)^{n-1}\right), \tag{4.3}$$

где положительные коэффициенты C_k непрерывно зависят от определителя $detDF(x_0)$, нормы $||DF^{-1}(x_0)||$ и размерности пространства n, причем $x_0 \in \overline{U}'$. Поскольку отображение принадлежит классу C^1, на компактном множестве $\overline{U}'$ коэффициенты C_k ограничены.

Обозначим через $Ball(r,\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^n$ шар радиуса r с центром в нуле. Радиус r выбран настолько малым, чтобы точки $x+h \in U$ при $(x,h) \in \overline{U}' \times \overline{Ball}(r,\mathbf{0})$ (компактность множества $\overline{U}'$ гарантирует, что такой радиус существует, см. рис. ???).

Рис. ???

Исследуем числовую функцию от двух векторных переменных

$$\omega : \overline{U}' \times \overline{Ball}(r,\mathbf{0}) \to \mathbb{R},$$

$$\omega(x,h) := \frac{|\eta(x,h)|}{|h|} = \frac{|F(x+h)-F(x)-DF(x)h|}{|h|} \text{ при } h \neq \mathbf{0} \ \wedge \ \omega(x,\mathbf{0}) := 0.$$

Мы утверждаем, что функция ω всюду непрерывна. Собственно, в доказательстве нуждается непрерывность в точках вида $(x_0,\mathbf{0})$. Докажем, что $\lim \omega(x,h) = \omega(x_0,\mathbf{0}) = 0$ при $(x,h) \to (x_0,\mathbf{0})$. С этой целью осуществим оценку сверху:

$$\omega(x,h) = \frac{|F(x+h)-F(x)-DF(x)h|}{|h|} \leqslant$$

$$\frac{|(F(x+h)-F(x_0+h))-(F(x)-F(x_0))-(DF(x)h-DF(x_0)h)|}{|h|} +$$

$$+\frac{|F(x_0+h)-F(x_0)-DF(x_0)h|}{|h|} \leqslant$$

$$\frac{|(F(x+h)-F(x_0+h))-(F(x)-F(x_0))|}{|h|} + ||(DF(x)-DF(x_0))|| + \frac{|\eta(x_0,h)|}{|h|}.$$

Последнее слагаемое не зависит от переменной x и стремится к нулю при $h \to \mathbf{0}$ в силу определения отображения $\eta(x_0,h)$. Второе слагаемое не зависит от переменной h и стремится к нулю при $x \to x_0$ в силу **непрерывной** дифференцируемости отображения f. Первое слагаемое зависит от пары переменных (x,h). Для его исследования введем дифференцируемое отображение $\Delta F(x,h) := F(x+h) - F(x_0+h)$. Его производная по второму аргументу в точке (x,h) равна: $D_2(\Delta F)(x,h) = DF(x+h) - DF(x_0+h)$. Заметим, что

$$\Delta F(x,h) - \Delta F(x,\mathbf{0}) = (F(x+h)-F(x_0+h)) - (F(x)-F(x_0)).$$

Поэтому

$$\frac{|(F(x+h)-F(x_0+h))-(F(x)-F(x_0))|}{|h|} = \frac{|\Delta F(x,h)-\Delta F(x,\mathbf{0})|}{|h|} \leqslant$$

$$\frac{||D_2(\Delta F)(x,\theta h)|| \cdot |h|}{|h|} = ||DF(x+\theta h) - DF(x_0+\theta h)||,\ \text{где}\ \theta \in (0,1).$$

Но $||DF(x+\theta h) - DF(x_0+\theta h)|| \to 0$ при $(x,h) \to (x_0,\mathbf{0})$, опять же в силу непрерывной дифференцируемости F.

Значит, функция ω непрерывна на компактном множестве $\overline{U}' \times \overline{Ball}(r,\mathbf{0})$. Из теоремы Кантора следует, что она **равномерно** непрерывна. Поэтому выражение в скобках в оценке (4.3) равномерно ограничено на $\overline{U}' \times \overline{Ball}(r,\mathbf{0})$. Теперь, из равномерной непрерывности функции ω, в силу оценки (4.3), следует второе утверждение теоремы 4.2. ■

4.3. Формула замены переменной в кратном интеграле. Нам потребуется

Лемма 4.3. *(о малой мере) Пусть клетка-куб $Q_a = [0,a]^n \subset \mathbb{R}^n$ содержит множество нулевой меры $\Upsilon \subset Q$. Пусть $\cup_{i=1}^{k^n} q_i(k) = Q_a$ – разбиение куба на "малые" кубы-клетки со стороной a/k $k \in \mathbb{N}$. Обозначим через $I_k(\Upsilon)$ объединение всех таких номеров i кубов q_i, которые пересекаются с Υ. Тогда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 :\ \forall k > k_0\ \hookrightarrow\ \mu\Big(\bigcup_{i\in I_k(\Upsilon)} q_i\Big) < \varepsilon.$$

Обсуждение. По определению, множество нулевой меры может быть погружено в клеточное множество сколь угодно малой меры. В лемме сформулировано более тонкое свойство: если данное клеточное множество, которое содержит множество меры ноль, измельчать так, чтобы его мелкость стремилась к нулю, то автоматически множество нулевой меры будет погружено в клеточное множество сколь угодно малой меры.

Доказательство. Погрузим множество Υ в некоторое фиксированное клеточное множество $C = \cup_{j=1}^{N} C_j \subset Q_a$ меры $\varepsilon/2$. Оценим меру объединения всех тех малых кубов $q_i(k)$, которые могут пересечься с C. Пусть $C_j \cap q_i(k) \neq \varnothing$, где клетка C_j имеет размеры $c_j^{(l)}$ $(l = 1,...,n)$. Тогда клетка-куб $q_i(k)$ наверняка целиком принадлежит "раздутой" клетке C_j' с размерами $c_j^{(l)} + 2a/k$ (см. рис. ???). Мера последней равна

$$\mu(C_j') = \left(c_j^{(1)} + \frac{2a}{k}\right) \cdot ... \cdot \left(c_j^{(n)} + \frac{2a}{k}\right) = c_j^{(1)} \cdot ... \cdot c_j^{(n)} + P^{(n-1)}\left(\frac{2a}{k}\right), \qquad (4.4)$$

где $c_j^{(1)} \cdot ... \cdot c_j^{(n)} = \mu(C_j)$, а $P^{(n-1)}(2a/k)$ – многочлен по переменной $2a/k$ степени n, у которого все коэффициенты положительны, а свободный член равен нулю. Чтобы оценить выражение $P^{(n-1)}(2a/k)$, раскроем формально скобки в произведении (4.4). Получим 2^n слагаемых. Одно (первое) слагаемое мы выделили – это $\mu(C_j)$. Из оставшейся суммы $P^{(n-1)}(2a/k)$ вынесем за скобки дробь $2a/k$. Поскольку $C \subset Q_a$, то $c_j^{(l)} \leqslant a$ равномерно для всех $j = 1,...,N$ и $l = 1,...,n$. Для всех достаточно больших k дробь $2a/k < a$. Поэтому каждое слагаемое в скобках оценивается сверху выражением a^{n-1}. Следовательно, $P^{(n-1)}(2a/k) \leqslant (2a/k) \cdot (2^n - 1) \cdot a^{n-1}$. Теперь

$$\mu\Big(\bigcup_{i\in I_k(\Upsilon)} q_i\Big) \leqslant \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{N} C_j'\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{N} \mu(C_j') \leqslant \mu(C) + N\frac{2a}{k}(2^n-1)a^{n-1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

если натуральное k выбрано достаточно большим. ■

Рис. ???

Перейдем к основному утверждению:

Теорема 4.3. *(о замене переменных) Пусть $F : \mathbb{R}^n \supset U \to V \subset \mathbb{R}^n$ – диффеоморфизм областей. Пусть $X \subset U$ – измеримое компактное подмножество, а $Y = F(X)$. Пусть $f : Y \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Тогда*

$$\int\limits_Y f(y)dy = \int\limits_X f(F(x))\ |detDF(x)|\ dx. \tag{4.5}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что оба интеграла в равенстве (4.5) существуют: подынтегральные функции непрерывны, множество X измеримо по условию, а множество $Y = F(X)$ измеримо в силу леммы 4.2. Поэтому любые последовательности разбиений множеств X и Y, у которых мелкости стремятся к нулю, устремляют интегральные суммы Римана к соответствующим интегралам из (4.5).

Погрузим множество X в клетку-куб Q_a. Рассмотрим $\cup_{i=1}^{k^n} q_i(k) = Q_a$ – разбиение куба на "малые" кубы-клетки со стороной a/k $k \in \mathbb{N}$. Все клетки разбиваются на три класса: 1) не пересекающиеся с $\overline{X} = X$, 2) пересекающиеся с границей ∂X, 3) целиком принадлежащие внутренности $Int(X)$ (см. рис. ???). Клетки из первого класса нас не интересуют. Объединение $\bigcup_{i\in I_k(\partial X)} q_i$ всех клеток из второго класса имеет сколь угодно малую меру, если k достаточно велико (лемма 4.3). Выберем в каждой клетке q_i, где $i \in I_k(\partial X)$, произвольную точку $\xi_i \in q_i \cap X$, составим для этих клеток интегральную сумму Римана и оценим ее модуль, опираясь на лемму 4.3:

$$\Big|\sum_{i\in I_k(\partial X)} f(F(\xi_i))\ |detDF(\xi_i)|\ \mu(q_i \cap X)\Big| \leqslant$$

$$\max_{y\in Y}|f(y)| \cdot \max_{x\in X}|detDF(x)| \cdot \mu\Big(\bigcup_{i\in I_k(\partial X)} q_i\Big)\ \to\ 0 \text{ при } k \to \infty; \tag{4.6}$$

в оценке (4.6) мы воспользовались непрерывностью функции f, непрерывностью производной DF, компактностью множества X и компактностью образа $Y = F(X)$.

Рис. ???

Обозначим через $J_k(Int(X))$ объединение всех таких номеров i кубов q_i, которые принадлежат третьему классу, т.е. $q_i \subset Int(X)$. Выберем в каждой клетке $q_i \subset Int(X)$ точку $\xi_i \in q_i$ с минимальным набором координат. (Если $n = 2$, то это будет точка в левом нижнем углу, см. рис. ??? Такой выбор точки ниже позволит нам использовать теорему 4.2.) Тогда, с учетом (4.6), для интегральной суммы Римана получим предельное равенство:

$$\int\limits_X f(F(x))\ |detDF(x)|\ dx = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i\in I_k(\partial X)} f(F(\xi_i))\ |detDF(\xi_i)|\ \mu(q_i \cap X) +\right.$$

$$\left.\sum_{i\in J_k(Int(X))} f(F(\xi_i))\ |detDF(\xi_i)|\ \mu(q_i)\right) =$$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i\in J_k(Int(X))} f(F(\xi_i))\ |detDF(\xi_i)|\ \mu(q_i). \tag{4.7}$$

Таким образом, интеграл по X является пределом интегральной суммы Римана только по **внутренним** кубам разбиения.

Перейдем к интегралу в левой части равенства (4.5). Отображение F порождает разбиение множества $Y = \cup_{i=1}^{k^n}(F(q_i(k)) \cap Y)$ на "криволинейные" кубы. Из п. 1 леммы 4.1 следует, что мелкость разбиения множества Y стремится к нулю при $k \to +\infty$. Поэтому интеграл по Y является пределом интегральной суммы Римана:

$$\int\limits_Y f(y)dy = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i\in I_k(\partial X)} f(F(\xi_i))\mu(F(q_i\cap X)) + \sum_{i\in I(Int(X))} f(F(\xi_i))\mu(F(q_i))\right).$$

Для первой суммы, с учетом п. 2 теоремы 4.2 и леммы 4.3, получаем оценку

$$\Big|\sum_{i\in I_k(\partial X)} f(F(\xi_i))\mu(F(q_i\cap X))\Big| \leqslant \sum_{i\in I_k(\partial X)} |f(F(\xi_i))|\ \mu(F(q_i)) \leqslant$$

$$\max_{y\in Y}|f(y)| \sum_{i\in I(\partial X)} (|detDF(\xi_i)| + \nu(\xi_i, 1/k))\mu(q_i) \leqslant$$

$$\max_{y\in Y}|(f(y)|\cdot(\max_{x\in X}|detDF(x)|+\varepsilon)\cdot\mu\Big(\bigcup_{i\in I_k(\partial X)} q_i\Big)\ \to\ 0 \text{ при } k\to\infty.$$

Для второй суммы получаем

$$\sum_{i\in J_k(Int(X))} f(F(\xi_i))\mu(F(q_i)) = \sum_{i\in J_k(Int(X))} f(F(\xi_i))(|detDF(\xi_i)| + \nu(\xi_i,1/k))\mu(q_i).$$

Но, в силу п. 2 теоремы 4.2, $|\nu(\xi_i, 1/k)| \to 0$ при $k \to \infty$ равномерно по всем $\xi_i \in X$. Поэтому

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i\in J_k(Int(X))} f(F(\xi_i))\mu(F(q_i)) = \lim_{k\to\infty}\sum_{i\in J_k(Int(X))} f(F(\xi_i))|detDF(\xi_i)|\mu(q_i).$$

Сравнивая с (4.7), получаем утверждение теоремы. ■

4.4. Геометрический смысл знака якобиана. Обсуждаемый вопрос связан с понятием ориентации пространства. В основе лежит

Лемма 4.4. *(о двух классах базисов) Множество всех базисов n-мерного пространства разбивается на* ***два*** *непересекающихся класса по следующему отношению: два базиса $\{e_1, ..., e_n\}$ и $\{g_1, ..., g_n\}$ принадлежат одному классу тогда и т.т., когда матрица невырожденного линейного преобразования $A(e_i) := g_i$ имеет положительный определитель: $detA > 0$.*

Доказательство. Указанное отношение является отношением эквивалентности поскольку оно:

1) рефлексивно: $id(e_i) = e_i$ и $det(id) = 1 > 0$;

2) симметрично: поскольку $A^{-1}(g_i) = e_i$ и $det(A^{-1}) = (detA)^{-1} > 0$;

3) транзитивно: если $B(g_i) = h_i$ и $detB > 0$, то $(B \cdot A)(e_i) = h_i$ и $det(B \cdot A) = detB \cdot detA > 0$.

Остается только заметить, что для знака определителя невырожденной матрицы есть в точности две возможности – или быть положительным, или отрицательным.

Определение 4.2. Задать **ориентацию** в $\mathbb{R}^n$ означает из двух классов эквивалентных базисов произвольно выбрать один и назвать его **правым**, а второй класс – **левым**.

Примеры. На плоскости традиционно правым называют базис, в котором поворот от первого вектора ко второму по меньшему углу осуществляется **против часовой стрелки**. В трехмерном пространстве традиционно правым называют базис, в котором третий вектор принадлежит полупространству, построенному по "правилу буравчика" .

Теперь мы можем перейти к осовному вопросу:

Теорема 4.4. *(о знаке якобиана) Пусть $F : \mathbb{R}^n \supset U \to V \subset \mathbb{R}^n$ – диффеоморфизм областей. Если в какой-либо точке $x_0 \in U$ определитель $detDF(x_0) > 0$, тогда в каждой точке $x \in U$ линейное преобразование $DF(x)$ сохраняет ориентацию; если же $detDF(x_0) < 0$, то в каждой точке $x \in U$ преобразование $DF(x)$ меняет ее на противоположную.*

Доказательство основано на **постоянстве знака якобиана**. Допустим, что в двух точках он противоположный. Соединим эти точки непрерывной кривой в U; тогда получим, в силу непрерывности определителя, такую точку $x \in U$, в которой $detDF(x) = 0$. Последнее противоречит определению диффеоморфизма. Остается сослаться на определение 4.2. ■

В дальнейшем мы обсудим понятие ориентации (и, автоматически, смысл знака якобиана) кривых и поверхностей.

§ 5. Формула Грина

Формула Джорджа Грина (английский математик, 1793-1841) является первым аналогом формулы Ньютона-Лейбница. Она связывает интегрирование по плоской области с интегрированием по ее границе. Позже мы получим пространственные аналоги формулы Н-Л.

5.1. Ориентация замкнутой кривой. В этом пункте мы обсудим (без доказательств) понятия ориентации плоской кривой и связности плоской области.

Пусть $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ – плоская замкнутая кусочно-гладкая кривая (ЗКГК). Напомним (см. рис ???), что такая кривая непрерывна и состоит из конечного количества гладких **дуг**:

1. каждая из дуг задана вектор-функцией $\mathbf{r}_i \in C^1[t_{i-1}, t_i]$, $\forall t \in (t_{i-1}, t_i) \hookrightarrow \mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ $(i = 1, ..., N)$;
2. в **концах** дуги правильно состыкованы: $\mathbf{r}_i(t_i) = \mathbf{r}_{i+1}(t_i)$ $(i = 1, ..., N-1)$, $\mathbf{r}_N(t_N) = \mathbf{r}_1(t_0)$; существуют односторонние производные $\mathbf{r}'_i(t_{i-1}+0) \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{r}'_i(t_i - 0) \neq \mathbf{0}$;
3. вектор-функция $\mathbf{r}(t) := \mathbf{r}_i(t)$ для $t \in [t_{i-1}, t_i]$ инъективна.

Рис. ???

Примем без доказательства очевидное (но очень трудно доказываемое!) утверждение

Лемма 5.1. *(Жордана о разбиении плоскости) Замкнутая кусочно-гладкая кривая γ разбивает плоскость $\mathbb{R}^2$ на **две** области – ограниченную $\Omega_{int}(\gamma)$ и неограниченную $\Omega_{ext}(\gamma)$ и является их общей границей:*

$$\mathbb{R}^2 = \Omega_{int}(\gamma) \bigcup \Omega_{ext}(\gamma) \bigcup \gamma, \quad \partial\Omega_{int}(\gamma) = \partial\Omega_{ext}(\gamma) = \gamma.$$

*Ограниченная область $\Omega_{int}(\gamma)$ называется **внутренностью кривой**, неограниченная $\Omega_{ext}(\gamma)$ – **внешностью кривой**.*

Из теоремы о существовании обратного отображения следует, что в любой точке гладкости $t \neq t_i$ существует такой вектор **внутренней нормали** $\mathbf{n}_{int}(t) \perp \mathbf{r}'(t)$, что точка $\mathbf{r}(t) + \varepsilon\mathbf{n}_{int}(t) \in \Omega_{int}$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Мы знаем, что параметризация кривой уже задает ее ориентацию – порядок точек, порожденный ростом параметра. Оказывается, с помощью $\mathbf{n}_{int}(t)$ ориентацию замкнутой кривой можно **согласовать** с ориентацией всей плоскости:

Определение 5.1. Назовем ориентацию замкнутой кусочно-гладкой кривой **положительной**, если в каждой точке гладкости базис $\{\mathbf{r}'(t), \mathbf{n}_{int}(t)\}$ правый.

Лемма 5.2. *(о корректности определения правой ориентации) Если ориентация ЗКГК, порожденная ростом параметра t, правая в одной точке гладкости, то она правая в каждой точке гладкости.*

Обсуждение. Доказательство леммы для случая гладкой кривой сразу следует из компактности кривой и непрерывности вектор-функции $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ (обоснуйте!). Случай кусочно-гладкой кривой примем без доказательства.

Перейдем к уточнению понятия линейной связности.

Определение 5.2. Плоская область G называется **односвязной**, если любая замкнутая кусочно-гладкая кривая $\zeta \subset G$ принадлежит области вместе со своей внутренностью: $\Omega_{int}(\zeta) \subset G$.

Обсуждение. Множество G, будучи областью, уже линейно связно. Односвязность, интуитивно, означает, что область не имеет дырок (см. рис. ???).

Примерами односвязных областей являются полуплоскость, открытый круг, внутренность многоугольника. Введенная в лемме 5.1, область $\Omega_{int}(\gamma)$ является односвязной.

Рис. ???

Определение 5.3. Пусть замкнутые кусочно-гладкие кривые γ_j $(j = 1, ..., N-1)$ попарно не пересекаются, принадлежат внутренности кусочно-гладкой кривой γ и не принадлежат внутренности друг друга:

$$\forall j \neq k \ \ (j,k = 1, ..., N-1) \ \hookrightarrow \ \gamma_j \bigcap \gamma_k = \varnothing, \ \ \gamma_j \subset \Omega_{int}(\gamma), \ \gamma_i \not\subset \Omega_{int}(\gamma_k).$$

В этом случае внутренности $\Omega_{int}(\gamma_j) \subset \Omega_{int}(\gamma)$ (см. рис. ???). Область

$$\Omega_{int}(\gamma, N) := \Omega_{int}(\gamma) \setminus \bigcup_{j=1}^{N-1} \overline{\Omega}_{int}(\gamma_j),$$

в которой $N-1$ дырок, называется N-**связной**, или, проще, – **многосвязной**.

Граница этой N-связной области

$$\partial\Omega_{int}(\gamma, N) = \gamma \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 ... \cup \gamma_{N-1}$$

остоит из N связных компонент. Например, кольцо является двусвязной областью (рис. ???).

Ориентируем замкнутые кривые γ_j по тому же принципу, что и кривую γ: в каждой точке гладкости кривой γ_j базис $\{\mathbf{r}'_j(t), \mathbf{n}_{j,int}(t)\}$ правый. Теперь вся граница $\partial\Omega_{int}(\gamma, N)$ нами ориентирована. Образно говоря, **правым** мы называем такое **направление обхода границы** многосвязной области, при которой **область остается слева** (см. рис. ???).

Рис. ???

5.2. Формула Грина. Напомним понятие криволинейного интеграла второго рода (КИВР). Пусть: $G \subset \mathbb{R}^2$ – область, содержащая кривую $\gamma = \widetilde{AB}$, которая задана гладкой вектор-функцией $\mathbf{R}(s) = (x(s), y(s))$ от натурального параметра $s \in [0, S]$; $d\mathbf{R}(s) = (dx(s), dy(s))$ – дифференциал вектор-функции $\mathbf{R}(s)$; $\mathbf{f}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ $((x,y) \in \Omega)$ – непрерывное векторное поле. КИВР по γ – это определенный интеграл

$$\int_\gamma Pdx + Qdy := \int_0^S (\mathbf{f}(\mathbf{R}(s)), d\mathbf{R}(s)) = \int_0^S (P(x(s), y(s))dx(s) + Q(x(s), y(s))dy(s)).$$

Для кусочно гладких кривых КИВР определяется как сумма интегралов по гладким дугам. Если кривая задана явно $y = \varphi(x)$, то из формулы замены переменной следует, что

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \int_a^b (P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x))dx.$$

Теорема 5.1. *(формула Грина для односвязной области) Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ – односвязная область, функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ принадлежат классу $C^1(G)$, $\gamma \subset G$ – положительно ориентированная замкнутая кусочно-гладкая кривая, ограничивающая область $\Omega \subset G$ (т.е. $\gamma = \partial\Omega$). Тогда справедлива* ***формула Грина***

$$\oint_{\partial\Omega} Pdx + Qdy = \int\int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy. \tag{5.1}$$

Доказательство. Предположим, дополнительно, что область Ω элементарна относительно обеих координатных осей. Т.е. существуют непрерывные функции $\varphi(x), \psi(x)$ $(x \in [a,b])$ и $\alpha(y), \beta(y)$ $(y \in [c,d])$, что (см. рис. ???)

$$\Omega = \{(x,y): \ x \in (a,b), \ \varphi(x) < y < \psi(x)\} = \{(x,y): \ y \in (c,d), \ \alpha(y) < x < \beta(y)\}.$$

Рис. ???

Переходя от двойного интеграла к повторному, получаем для второго слагаемого (см. рис. ???)

$$-\int\int_{\Omega} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = -\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy =$$

$$\int_a^b P(x,\varphi(x))dx - \int_a^b P(x,\psi(x))dx =$$

$$\int_{ABCD} Pdx + \int_{DE} Pdx + \int_{EFMN} Pdx + \int_{NA} Pdx = \oint_{\partial\Omega} Pdx.$$

Мы учли, что на вертикальных отрезках DE и NA интеграл обнуляется, поскольку дифференциал $dx = 0$.

Рис. ???

Аналогично доказывается, что $\int\int_{\Omega} (\partial Q/\partial x) dxdy = \oint_{\partial\Omega} Qdy$. Что доказывает формулу (5.1).

Теперь рассмотрим случай, когда область Ω не является элементарной, но кусочно-гладкой кривой $\widetilde{AC}$ ее можно разбить на две подобласти Ω_1 и Ω_2, каждая из которых является элементарной относительно обеих осей. Поскольку $\int_{\widetilde{CA}} = -\int_{\widetilde{AC}}$, КИВР (в силу аддитивности) представим как сумма интегралов (см. рис ???), к каждому из которых можно применить формулу (5.1):

$$\oint_{\partial\Omega} Pdx + Qdy =$$

$$\left(\int_{\widetilde{ABC}} Pdx + Qdy + \int_{\widetilde{CA}} Pdx + Qdy \right) + \left(\int_{\widetilde{AC}} Pdx + Qdy + \int_{\widetilde{CDA}} Pdx + Qdy \right) =$$

$$\oint_{\partial\Omega_1} Pdx + Qdy + \oint_{\partial\Omega_2} Pdx + Qdy =$$

$$\int\int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \int\int_{\Omega_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int\int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Рис. ???

Индукцией утверждение теоремы доказывается в том случае, когда G можно разбить кусочно-гладкими дугами на конечное количество элементарных областей. В общем случае формулу Грина можно доказать аппроксимируя границу ломаной. ■

Теорема 5.2. *(формула Грина для многосвязной области) Пусть, по-прежнему, G – односвязная область, а $\Omega \subset G$ – N-связная область, ограниченная кусочно-гладкими замкнутыми кривыми: внешней γ и внутренними γ_i ($i = 1, ..., N-1$). Пусть граница $\partial\Omega = \gamma \cup \gamma_1 \cup ... \cup \gamma_{N-1}$* ***ориентирована правым образом****. В этом случае формула (5.1) остается верной:*

$$\oint\limits_{\gamma\cup\gamma_1\cup...\cup\gamma_{N-1}} Pdx + Qdy = \int\int_\Omega \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dxdy.$$

Докажем утверждение для двусвязной области (т.е. $N = 2$). С помощью кусочно-гладких дуг $\widetilde{AB}$, $\widetilde{CD}$ разобьем Ω на две односвязные области (см. рис. ???), к каждой применим теорему 5.1 и сложим полученные равенства, воспользовавшись ориентированностью КИВР: $\int_{\widetilde{AB}} = -\int_{\widetilde{BA}}$, $\int_{\widetilde{CD}} = -\int_{\widetilde{DC}}$.

Рис. ???

Задача. Завершите доказательство утверждения.

Индукцией формула обобщается на произвольное N. ■

Из формулы Грина сразу получаем

Следствие 5.1. *(о площади плоской области) Площадь (мера) области Ω вычисляется по формуле*

$$S(G) = \int\int_\Omega dxdy := \int_{\partial\Omega} xdy = -\oint_{\partial\Omega} ydx = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} xdy - ydx. \qquad (5.2)$$

§ 6. Поверхностные интегралы

Поверхностные интегралы первого и второго рода (ПИПР и ПИВР) являются аналогами криволинейных интегралов первого и второго рода. ПИПР является обобщением понятия площади поверхности. ПИВР вычисляет поток векторного поля через поверхность, это важнейшее понятие в физике (потоки жидкостей и газов, магнитный поток).

6.1. Кусочно-гладкие поверхности. Напомним (см. п. 1.4), что простой гладкой двумерной поверхностью в трехмерном пространстве (простой гладкой поверхностью = ПГП) мы называем образ $S = Im(\mathbf{r}) \subset \mathbb{R}^3$ инъективного гладкого отображения $\mathbf{r}$ плоской области $G \subset \mathbb{R}^2$; причем в каждой точке $(u, v) \in G$ ранг матрицы $D\mathbf{r}(u, v) = 2$ максимален. Касательная плоскость $T_A S = Im(D\mathbf{r}(u, v))$ к S в точке $A = \mathbf{r}(u, v) \in S$ порождена линейно независимыми векторами частных производных, т.е. пара $\{\mathbf{r}'_u(u, v), \mathbf{r}'_v(u, v)\}$ является базисом в $T_A S$. Трехмерность объемлющего пространства позволяет использовать векторное и смешанное произведения. Так, ортогональное дополнение $\Gamma_A S$ (см. следствие 1.2) представляет собой одномерное подпространство, порожденное векторным произведением $\mathbf{N}(A) := \mathbf{r}'_u(u, v) \times \mathbf{r}'_v(u, v)$. Из курса аналитической геометрии известно, что площадь (мера) параллелограмма $\Pi(u, v)$, построенного на векторах $\mathbf{r}'_u(u, v), \mathbf{r}'_v(u, v)$, равна модулю векторного произведения: $\mu(\Pi(u, v)) = |\mathbf{N}(A)|$.

Нам понадобятся расширения понятия ПГП. Чтобы определить интегрирование на ПГП, введем понятие ПГП с краем.

Определение 6.1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – плоская область, замыкание которой $\overline{\Omega} \subset G$, а граница $\partial\Omega$ является кусочно-гладкой (плоской) кривой. Образ $\overline{\Theta} := \mathbf{r}(\overline{\Omega})$ называется **ПГП с краем** или **куском**. **Краем куска** называется образ границы плоской области: $\partial\Theta := \mathbf{r}(\partial\Omega)$. Точки не принадлежащие краю называют **точками гладкости**. См. рис. ???

Замечание. Поскольку $\overline{\Omega} \subset G$, кусок принадлежит ПГП $S = \mathbf{r}(G)$, а его край $\partial\Theta$ является пространственной кусочно-гладкой кривой, т.е. конечным объединением **краевых дуг** $\partial\Theta = \cup_i \theta_j$, которые правильно состыкованы в **концах** A_j. Край поверхности совпадает с ее границей в том случае, когда поверхность плоская, т.е. принадлежит выделенной фиксированной плоскости. Заметим, что поверхность, принадлежащая пространству, не имеет внутренних точек – она вся состоит из граничных точек! Традиционно край поверхности обозначают как границу, что не приводит к путанице.

Рис. ???

Результатом “правильно сшитых” кусков является следующее понятие:

Определение 6.2. **Кусочно-гладкой поверхностью** (КГП) Π мы называем такое конечное объединение кусков $\overline{\Theta}_i$ $(i = 1, ..., I)$, которое удовлетворяет условиям:

1. два произвольных куска могут пересекаться или по нескольким общим краевым дугам $\theta_{i,j} \subset \overline{\Theta}_i$ (**соседние куски**) и нескольким общим концам дуг $A_{i,j}$, или только по нескольким общим концам дуг;

2. для любых двух произвольных кусков $\overline{\Theta}_i, \overline{\Theta}_k$ существует связывающий их набор соседних кусков: $\overline{\Theta}_i$ соседствует с $\overline{\Theta}_{i_1}$, который соседствует с $\overline{\Theta}_{i_2}$, ... , который соседствует с $\overline{\Theta}_k$.
3. три различных куска могут пересекаться не более, чем в концах дуг.

Возможные случаи правильно сшитых кусков и неправильно сшитых изображены на рис. ???

Рис. ???

Для всех точек гладкости кусков $\overline{\Theta}_i$ определено понятие касательной плоскости к КГП и понятие нормали к ней. Край КГП, если он не пуст, представляет собой конечное объединение тех краевых дуг, которые не являются общими для соседних кусков; поэтому край КГП является кусочно-гладкой кривой. Реализацией понятия КГП является одежда, сшитая из нескольких кусков ткани.

6.2. Поверхностный интеграл первого рода. ПИПР можно определить по аналогии с криволинейным интегралом первого рода: сначала конструктивно определить площадь поверхности в духе определения длины кривой (как супремум площадей вписанных многогранных поверхностей), затем определить итегральную сумму Римана и т.д. Однако такой путь является весьма сложным. Поэтому мы дадим только мотивацию ПИПР и сразу его аналитическое определение.

Пусть $\overline{\Theta}$ - ПГП с краем, параметризованная инъекцией замыкания $\overline{\Omega}$ (см. определение 6.1). Погрузим $\overline{\Omega}$ в "большой" квадрат со стороной a; разобьем стороны квадрата на k отрезков длины a/k – в результате квадрат разобьется на k^2 малых квадратов $q_{i,j}$ с вершинами $Q_{i,j}$ $(i, j = 0, ..., k-1)$. Рассмотрим только те малые квадраты, которые целиком принадлежат Ω. Объединение образов $\cup_{q_{i,j}\subset\Omega}\mathbf{r}(q_{i,j}) \subset S$ есть "почти" разбиение ПГП с краем на малые "криволинейные параллелограммы". Касательные к сторонам криволинейных параллелограммов суть векторы $\mathbf{r}'_u(Q_{i,j})$ и $\mathbf{r}'_v(Q_{i,j})$ (см. рис. ???). Наряду с малыми криволинейными параллелограммами рассмотрим малые параллелограммы $\widehat{q}(i,j)$, построенные на дифференциалах $\mathbf{r}'_u(Q_{i,j})du$ и $\mathbf{r}'_v(Q_{i,j})dv$. Каждый такой параллелограмм лежит в своем касательном пространстве $T_{A(i,j)}\Theta$, где $A(i,j) = \mathbf{r}(Q_{i,j})$. Удобно прикрепить такой параллелограмм именно к точке $A(i,j)$ – получим "чушую" $\cup_{i,j}\widehat{q}(i,j)$, которая "близка" к ПГП при больших $k >> 1$. Площади малых параллелограммов равны $\mu(\widehat{q}(i,j)) = |\mathbf{r}'_u(Q_{i,j}) \times \mathbf{r}'_v(Q_{i,j})|dudv$. Описанная конструкция мотивирует

Определение 6.3. Пусть $f : \overline{\Theta} \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция. **Поверхностным интегралом первого рода** от функции f по ПГП Θ называется двойной интеграл

$$\int\int_{\Theta} f(x,y,z)dS := \int\int_{\Omega} f(\mathbf{r}(u,v)) \cdot |\mathbf{r}'_u(u,v) \times \mathbf{r}'_v(u,v)|dudv. \tag{6.1}$$

Замечание. Определение (6.1) сконструировано по проинципу формулы (4.5) замены переменной в интеграле: вместо модуля якобиана стоит модуль векторного произведения частных производных. Отметим аналогию в обозначениях ПИПР и КИПР.

Лемма 6.1. *(корректность определения 6.3) Интеграл (6.1) существует. Его вид не меняется при замене параметризации поверхности Θ.*

Доказательство. Из определения области Ω, поверхности Θ и функции f следует, что подынтегральная функция непрерывна на измеримом компактном множестве $\overline{\Omega}$. Что влечет (см. теорему 3.3) существование интеграла (6.1).

Другая параметризация $\mathbf{R}: H \to S$ порождена некоторым диффеоморфизмом $F: H \to G$ плоских областей: $\mathbf{R}(s,t) = \mathbf{r}(F(s,t))$, где $(s,t) \in H$ (см. замечание после определения 1.2). Диффеоморфизм F порождает $\Phi := F^{-1}(\Omega)$ – плоскую область с кусочно-гладкой границей $\partial\Phi = F^{-1}(\partial\Omega)$ После замены переменных (теорема 4.3) интеграл примет вид

$$\int\int_{\Theta} f(x,y,z)dS =$$

$$\int\int_{\Phi} f(\mathbf{r}(F(s,t))) \cdot |\mathbf{r}'_u(F(s,t)) \times \mathbf{r}'_v(F(s,t))| \cdot |detDF(s,t)|dsdt.$$

С другой стороны (согласно дифференцированию сложного отображения, линейности векторного произведения и его антикоммутативности) получаем

$$\mathbf{R}'_s(s,t) \times \mathbf{R}'_t(s,t) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\partial F_1}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\partial F_2}{\partial s}\right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\partial F_2}{\partial t}\right) =$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial s}\frac{\partial F_2}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) + \frac{\partial F_1}{\partial t}\frac{\partial F_2}{\partial s}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right) = detDF(s,t)(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v).$$

Следовательно, $|\mathbf{R}'_s(s,t) \times \mathbf{R}'_t(s,t)| = |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v||detDF(s,t)|$. ■

Частным случаем параметризации поверхности является ее явное задание, т.е. задание поверхности как графика гладкой функции $z = \varphi(x,y)$, где $(x,y) \in \overline{\Omega}$ (см. замечание 2 после теоремы 1.5). В этой параметризации $\mathbf{r}(x,y) := (x, y, \varphi(x,y))$. Определение (6.1) приобретает вид

Следствие 6.1.

$$\int\int_{\Theta} f(x,y,z)dS = \int\int_{\Omega} f(x,y,\varphi(x,y))\ \sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2}\ dxdy. \tag{6.2}$$

Доказательство. В самом деле, $\mathbf{r}'_x = (1, 0, \varphi'_x)^T$, $\mathbf{r}'_y = (0, 1, \varphi'_y)^T$, $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (-\varphi'_x, -\varphi'_y, 1)^T$. Поэтому $|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y| = \sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2}$. ■

Определение 6.4. Для КГП $\Pi = \cup_{i=1}^{I} \overline{\Theta}_i$ положим

$$\int\int_{\Pi} f(x,y,z)dS := \sum_{i=1}^{I} \int\int_{\Theta_i} f(x,y,z)dS. \tag{6.3}$$

Поскольку интеграл (6.1) по ПГП определен как кратный интеграл, а интеграл (6.3) по КГП определен как сумма интегралов по ПГП, то, в конечном итоге, поверхностный интеграл первого рода, во-первых, не зависит от разбиения поверхности на куски и, во-вторых, обладает свойством аддитивности.

Опираясь на мотивацию, изложенную в начале этого пункта, и доказанную аддитивность ПИПР, мы можем дать

Определение 6.5. **Площадью (плоской мерой)** простой гладкой поверхности Θ называют интеграл

$$\mu(\Theta) := \int\int_{\Theta} dS = \int\int_{\Omega} |\mathbf{r}'_u(u,v) \times \mathbf{r}'_v(u,v)| dudv.$$

Площадью кусочно-гладкой поверхности

$$\Pi = \cup_{i=1}^{I} \overline{\Theta}_i$$

полагаем сумму $\mu(Pi) := \sum_{i=1}^{I} \mu(\Theta_i)$.

В качестве косвенного подтверждения естественности определения 6.5 докажем, что

Лемма 6.2. *Площадь инвариантна относительно ортогонального преобразования $O : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Рис. ???*

Доказательство. Из геометрического определения векторного произведения следует, что ортогональное преобразование сохраняет его модуль:

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \ \hookrightarrow \ |O(\mathbf{a}) \times O(\mathbf{b})| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$$

Поэтому, а также в силу линейности преобразования O и правила дифференцирования сложного отображения, получаем:

$$\mu(O(\Theta)) := \int_{\Omega} |(O\mathbf{r})'_u \times (O\mathbf{r})'_v| dudv = \int\int_{\Omega} |O(\mathbf{r}'_u) \times O(\mathbf{r}'_v)| dudv =$$

$$\int\int_{\Omega} |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| dudv = \mu(\Theta). \ \blacksquare$$

Рис. ???

Задача. Воспользовавшись сферическими координатами, докажите, что площадь сферы радиуса R равна πR^2.

Физический смысл ПИПР. Если подынтегральная функция $f(x,y,z) \geqslant 0$, ПИРП равен массе тонкого слоя (пленки, мембраны ...) с поверхностной плотностью f. Для знакопеременной функции f ПИПР можно трактовать как сумарный заряд тонкого слоя с поверхностной плотностью f.

Вычисление ПИПР приводит к необходимости каждый раз находить модуль векторного произведения. Проще воспользоваться известной из аналитической геометрии формулой, которая выражает модуль векторного произведения через скалярное:

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \ \hookrightarrow \ |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2}.$$

Мы получаем следующую формулу для вычисления ПИПР:

$$\int\int_{\Theta} f(x,y,z) dS := \int\int_{\Omega} f(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \sqrt{|\mathbf{r}'_u|^2 |\mathbf{r}'_v|^2 - (\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v)^2} \ dudv.$$

6.3. Ориентация кусочно-гладкой поверхности. Напомним те виды и примеры поверхностей, которые мы уже ввели:

1. простая гладкая поверхность: плоскость, параболоиды, одна компонента связности двуполостного гиперболоида, полусфера без края;
2. гладкая поверхность: сфера, тор, цилиндрическая поверхность без края $Cyl = S^1 \times (0,1)$, лист Мебиуса без края (Август Фердинанд Мёбиус, 1790 — 1868);
3. простая гладкая поверхность с краем: полусфера с краем, многоугольник;
4. кусочно-гладкая поверхность: двугранный угол, многогранная поверхность, поверхность многогранника, коническая поверхность с краем, цветок колокольчик, цилиндрическая поверхность с краем $\overline{Cyl} = S^1 \times [0,1]$ (край – несвязное объединение двух окружностей), лист Мебиуса с краем (а что собой представляет край листа Мебиуса?).

Задача. Разрежьте названные КГП на куски.

Мы видим, что в один класс ГП и КГП попадают качественно отличающиеся примеры. Разумно дополнительно ввести более узкий класс

Определение 6.6. **Замкнутой гладкой (кусочно-гладкой) поверхностью**=ЗГП (ЗКГП) называют ГП (КГП), которая является границей некоторой трехмерной области.

Примеры: сфера (граница шара), тор (граница “бублика”) – ЗГП, поверхности многогранников – ЗКГП.

Обсуждение. Требования, которые определение 6.5 предъявляет к поверхности являются весьма жесткими: с одной стороны – это требование локальное гладкости, с доугой стороны – глобальное требование быть границей некоторой области. Примем без доказательства, что замкнутая поверхность не имеет края. Не трудно проверить, что замкнутые поверхности являются компактными множествами (докажите). Нетривиальным является обратное утверждение: компактные поверхности без края в трехмерном пространстве являются замкнутыми. Уже в четырехмерном пространстве двумерные компактные поверхности без края могут не быть границами (точнее, краями) какой-то трехмерной поверхности. Например, проективная плоскость, бутылка Клейна (Феликс Христиан Клейн, 1849-1925).

Замечание. Замкнутая поверхность, конечно, замкнутое подмножество пространства; однако не наоборот.

Мы введем понятие ориентации поверхности, а потом согласуем с ней ориентацию края (сравните с определением 5.1).

Определение 6.7. Гладкая поверхность Θ (это может быть ПГП, замкнутая ГП, а также ПГП с краем) называется **ориентируемой**, если на множестве ее точек гладкости существует непрерывное **поле единичных нормалей**, т.е. определено такое непрерывное отображение $\mathbf{n} : \Theta \to \mathbb{R}^3$, что для любой точки $A \in \Theta$ справедливо: 1) $|\mathbf{n}(A)| = 1$, 2) $\mathbf{n}(A) \perp T_A\Theta$.

Лемма 6.3. *Если гладкая поверхность ориентируема, то существует в точности два векторных поля единичных нормалей.*

Доказательство немедленно следует из того обстоятельства, что ортогональное дополнение $\Gamma_A\Theta$ одномерно.

Выбор одного из названных полей **определяет ориентацию** поверхности. В результате поверхность становится **ориентированной**.

Лемма 6.4. *Простая ГП, ПГП с краем, замкнутая ГП ориентируемы.*

Доказательство очевидно для простых поверхностей. Для них (см. начало п. 6.1) непрерывное поле единичных нормалей имеет вид

$$\mathbf{n}(A) = \frac{\mathbf{N}(A)}{|\mathbf{N}(A)|} = \frac{\mathbf{r}'_u(u,v) \times \mathbf{r}'_v(u,v)}{|\mathbf{r}'_u(u,v) \times \mathbf{r}'_v(u,v)|}. \tag{6.4}$$

Можно доказать, что у гладкой замкнутой поверхности Θ, ограничивающей область V, в каждой точке $A \in \Theta$ из двух единичных нормалей $\pm\mathbf{n}(A)$ одна и только одна является **внутренней** (т.е. $\mathbf{n}_{int}(t) \perp T_A\Theta$ и точка $\overrightarrow{A} + \varepsilon \mathbf{n}_{int}(t) \in V$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, см. п. 5.1). Поле внутренних нормалей (как и поле внешних) определяет ориентацию. ■

Замечание. Одного требования гладкости уже не достаточно для ориентируемости. Существуют неориентируемые гладкие поверхности! Самым известным примером является лист Мебиуса (докажите его неориентируемость!).

Опишем процедуру согласования ориентации ПГП с краем $\overline{\Theta}$ с ориентацией ее края $\partial\Theta$. Пусть граница прообраза $\partial\Omega = \gamma$ ориентирована ее параметризацией $\mathbf{a}(t) = (u(t), v(t))$ $(t \in [0,T])$. Пусть $Q = \mathbf{a}(t_0)$ – произвольная точка гладкости, т.е. Q не совпадает с концом дуги. Тогда край ПГП параметризован вектор-функцией $\mathbf{R}(t) := \mathbf{r}(\mathbf{a}(t))$, а точка $A = \mathbf{r}(Q)$ также не совпадает с концом дуги. Таким образом, в точке A определен касательный к краю $\partial\Theta$ вектор $\overrightarrow{\tau}(A) := (\mathbf{r}(\mathbf{a}))'(t_0) = D\mathbf{r}'(Q) \cdot (\mathbf{a}'(t_0))$. Далее, в точке Q определен вектор внутренней нормали $\mathbf{n}_{int}(Q)$ к кривой γ. Поскольку $\overline{\Omega} \subset G$ (см. определение 6.1), то к вектору $\mathbf{n}_{int}(Q)$ можно применить линейное отображение $D\mathbf{r}(Q) : \mathbb{R}^2 \to T_AS$. Получим вектор $\overrightarrow{\nu}(A) := D\mathbf{r}(Q) \cdot \mathbf{n}_{int}(Q)$. Наконец, в точке A определен вектор (единичной) нормали $\overrightarrow{\beta}(A) := \mathbf{n}(A) \perp T_AS$. Поскольку отображение производной $D\mathbf{r}(Q)$ имеет ранг два, а векторы $\mathbf{r}'(Q)$ и $\mathbf{n}_{int}(Q)$ перпендикулярны, векторы $\overrightarrow{\tau}(A)$ и $\overrightarrow{\nu}(A)$ образуют базис в касательной плоскости T_AS. Следовательно, тройка $\{\overrightarrow{\tau}(A), \overrightarrow{\nu}(A), \overrightarrow{\beta}(A)\}$ образует базис в $\mathbb{R}^3$. См. рис. ???

Рис. ???

Определение 6.8. (согласование ориентации ПГП с ориентацией ее края) Назовем ориентацию края $\partial\Theta$ **положительной** относительно ПГП $\overline{\Theta}$, если в любой точке гладкости $A \in \partial\Theta$ базис $\{\overrightarrow{\tau}(A), \overrightarrow{\nu}(A), \overrightarrow{\beta}(A)\}$ правый.

Лемма 6.5. *(о корректности определения положительной ориентации края) Если ориентация края ПГП положительная в одной точке гладкости края, то она положительная в каждой точке гладкости края.*

Обсуждение. Примем утверждение леммы без доказательства. Сравните определение 6.7 и лемму 6.6 с определением 5.1 и леммой 5.2.

Принципиальным при вычислении ПИВР является

Определение 6.9. Кусочно-гладкая поверхность называется **ориентируемой**, если ее куски можно ориентировать **согласованно**, т.е. так, что положительные ориентации краев соседних кусков **противоположны** (см. рис. ???).

Рис. ???

Обсуждение. Теперь понятно, что пп. 2 и 3 в определении 6.2 КГП предназначены для введения понятия согласования ориентации всех кусков. Чтобы ориентировать КГП нужно в одном куске ориентировать край; после чего разнести ориентацию по принципу противоположности повсем кускам. Если это получится, значит, во-первых, поверхность ориентируемая и, во-вторых, она нами ориентирована.

Задача. Разрежьте на куски цилиндрическую поверхность с краем и ориентируйте ее. Попробуйте эту же процедуру осуществить с листом Мебиуса.

6.4. Поверхностный интеграл второго рода. Пусть на области $W \subset \mathbb{R}^3$ задано непрерывное векторное поле

$$\mathbf{a} : W \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{a}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))^T.$$

Пусть $\Theta \subset W$ – ПГП, ориентированная полем единичных нормалей $\mathbf{n}(x, y, z)$. Положим по определению $\overrightarrow{dS} := \mathbf{n}\ dS$, где dS – дифференциал площади поверхности.

Определение 6.10. **Поверхностным интегралом второго рода** от непрерывного векторного поля $\mathbf{a} = (P, Q, R)^T$ по ПГП Θ называется двойной интеграл первого рода

$$\int\int_\Theta P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy = \int\int_\Theta (\mathbf{a}, \overrightarrow{dS}) :=$$

$$\int\int_\Theta (\mathbf{a}(x, y, z), \mathbf{n}(x, y, z))dS. \tag{6.5}$$

Обсуждение. Первые два обозначения являются символическими. Эти обозначения аналогичны обозначениям КИВР. Третье обозначение является ПИПР от функции $f(x, y, z) := (\mathbf{a}(x, y, z), \mathbf{n}(x, y, z))$ (см. формулу (6.1)).

Физический смысл ПИВР. Если интерпретировать поле $\mathbf{a}$ как стационарное (т.е. неизменное по времени) поле скоростей жидкости, то выражение $(\mathbf{a}(x, y, z), \mathbf{n}(x, y, z))dS$ равно объему, протекающему через "малую" площадку dS за единицу времени. Указанный объем положительный только если скорость образует с вектором нормали острый угол. Таким образом, ПИВР равен **ориентированному объему жидкости**, протекающей через поверхность за единицу времени. В общем случае ПИВР интерпретируют как **ориентированный поток** векторного поля.

Лемма 6.6. *(корректность определения 6.9) Интеграл (6.5) существует. Его вид не меняется при замене параметризации поверхности* Θ.

Доказательство. Существование интеграла следует из непрерывности функции $f(x,y,z) := (\mathbf{a}(x,y,z), \mathbf{n}(x,y,z))$. Поле нормалей $\mathbf{n}(x,y,z))$ не зависит от параметризации (см. формулу (6.4) и лемму 1.1 – корректность определения касательной плоскости). ■

Чтобы получить удобную формулу для вычисления ПИВР, вспомним, что смешанное произведение трех векторов $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) := (\mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c})$. В произвольном орто-нормированном базисе $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = det(\mathbf{a}^T, \mathbf{b}^T, \mathbf{c}^T)$, где второе выражение в скобках означает квадратную матрицу 3×3, заполненную по строкам координатами указанных векторов.

Теорема 6.1. *(о вычислении ПИВР) Пусть ПГП Θ параметризована вектор-функцией $\boldsymbol{r} : \Omega \to W$. Тогда*

$$\int\int_{\Theta} (\boldsymbol{a}(x,y,z), \boldsymbol{n}(x,y,z)) dS = \int\int_{\Omega} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}'_u, \boldsymbol{r}'_v) du dv. \tag{6.6}$$

Доказательство немедленно следует из определения (6.5) ПИПР, определения (6.4) поля единичных нормалей и определения смешанного произведения. ■

Следствие 6.2. *(о вычислении ПИВР в случае явного задания ПГП) Пусть ПГП Θ является графиком гладкой функции $z = \varphi(x,y)$, где $(x,y) \in \Omega$, а ориентирующее поле нормалей $\boldsymbol{n}$ образует острый угол с осью Oz. Пусть поле $\boldsymbol{a}(x,y,z) = (0,0,R(x,y,z))^T$. Тогда*

$$\int\int_{\Theta} (\boldsymbol{a}(x,y,z), \boldsymbol{n}(x,y,z)) dS = \int\int_{\Theta} R(x,y,z) dx dy = \int\int_{\Omega} R(x,y,\varphi(x,y)) dx dy.$$

Замечание. Описанный в следствии случай ориентации поверхности традиционно называют **интегрированием по верхней стороне** Θ^+, а противоположную ориентацию называют **интегрированием по нижней стороне** Θ^- (см. рис. ???). В указанных обозначениях

$$\int\int_{\Theta^+} R(x,y,z) dx dy = -\int\int_{\Theta^-} R(x,y,z) dx dy =$$
$$\int\int_{\Omega} R(x,y,\varphi(x,y)) dx dy. \tag{6.7}$$

Доказательство. Воспользовавшись доказательством следствия 6.1, заполним определитель из формулы (6.6):

$$(\mathbf{a}, \mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v) = det \begin{pmatrix} 0 & 0 & R(x,y,\varphi(x,y)) \\ 1 & 0 & \varphi'_x \\ 0 & 1 & \varphi'_y \end{pmatrix} = R(x,y,\varphi(x,y)).$$

Теперь убедимся, что поле нормалей, порожденное явным заданием поверхности, требуемое:

$$\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (-\varphi'_x, -\varphi'_y, 1)^T \;\Rightarrow\; (\mathbf{k}, \mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y) = 1 > 0. \blacksquare$$

Замечание. Находя ПИВР без проверки ориентации мы рискуем потерять знак. Проверку можно осуществить в любой точке поверхности.

Нам остается сделать последний шаг и дать

Определение 6.11. Для КГП $\Pi = \cup_{i=1}^{I}\overline{\Theta}_i$ положим

$$\int\int_{\Pi} f(x,y,z)dS := \sum_{i=1}^{I} \int\int_{\Theta_i} (\mathbf{a}(x,y,z), \mathbf{n}(x,y,z))dS. \tag{6.8}$$

Можно показать, что в силу определения 6.9 ориентации КГП, поверхностный интеграл второго рода на КГП: 1) не зависит от разбиения поверхности на куски, 2) обладает свойством аддитивности, 3) меняет знак при изменении ориентации поверхности.

§ 7. Формула Остроградского-Гаусса

Формула Михаила Васильевича Остроградского (1801-1861) и Карла Фридриха Гаусса (1777-1855) получена ими независимо в первой четверти 19 века. Но впервые установлена за полвека до этого Лагранжем. Она является следующим после формулы Грина аналогом формулы Ньютона-Лейбница, т.е. связывает интегрирование по границе (трехмерной) области с интегрированием по самой области. Формула является ключевой в механике сплошных сред и теории поля.

7.1. Теорема Остроградского-Гаусса. Введем в рассмотрение

Определение 7.1. Пусть на области $U \subset \mathbb{R}^3$ задано гладкое векторное поле $\boldsymbol{a}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))^T$. Его **дивергенцией** называют числовую функцию

$$div\,\boldsymbol{a}:\ U \to \mathbb{R},\quad div\,\boldsymbol{a}(x,y,z) := \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}.$$

Теорема 7.1. *Пусть $\overline{G} \subset U \subset \mathbb{R}^3$ – замыкание области, граница которой ∂G есть кусочно-гладкая (и автоматически замкнутая) поверхность, ориентированная полем внешних нормалей $\boldsymbol{n}(x,y,z)$. Пусть векторное поле $\boldsymbol{a} \subset C^1(U)$. Тогда поток этого поля через границу области ∂G равен интегралу по самой области от дивергенции поля:*

$$\oiint\limits_{\partial G} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})dS = \iiint\limits_{G} div\,\boldsymbol{a}\, dV, \tag{7.1}$$

где dS – дифференциал площади поверхности ∂G, а $dV = dxdydz$ – дифференциал объема. (Петля на обозначении ПИВР напоминает, что поверхность ∂G замкнутая.)

Доказательство для случая, когда множество G элементарно относительно каждой оси (см. рис. ???; сравните с доказательством формулы Грина – теорема 5.1).

Рис. ???

Прежде всего заметим, что требования, предъявленные к векторному полю **a** и к области G гарантируют существование обоих интегралов в (7.1). Пусть G_z – ортогональная проекция множества G на плоскость $\{x,y\}$. Тогда

$$G = \{(x,y,z):\ (x,y) \in G_z,\ \varphi(x,y) < z < \psi(x,y)\},$$

где φ и ψ – непрерывные функции на $\overline{G}_z$. Обозначим через $Gr(\varphi)$, $Gr(\psi)$ графики указанных функций. Согласно теореме 3.9 о повторном интеграле, формуле Ньютона-Лейбница и формуле (6.7),

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{G_z} dxdy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dz =$$

$$\iint\limits_{G_z} R(x,y,\psi(x,y))dxdy - \iint\limits_{G_z} R(x,y,\varphi(x,y))dxdy =$$

$$\iint\limits_{Gr(\psi)^+} R(x,y,z)dxdy + \iint\limits_{Gr(\varphi)^-} R(x,y,z)dxdy,$$

где $Gr(\psi)^+$ верхняя, а $Gr(\varphi)^-$ нижняя стороны указанных графиков. Внешне ориентированная поверхность $\partial G = Gr(\psi)^+ \cup Gr(\varphi)^- \cup Cyl_z$, где Cyl_z – цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны оси z. В произвольной точке $A \in Cyl_z$ вектор нормали $\mathbf{n}(A) \perp (0,0,R(A))^T$ (см. рис. ???), поэтому $\iint_{Cyl_z} R(x,y,z)dxdy = 0$. Окончательно получаем, что

$$\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \oiint\limits_{\partial G} R(x,y,z)dxdy.$$

Воспользовавшись элементарностью относительно других осей, получаем равенства

$$\iiint\limits_G \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \oiint\limits_{\partial G} P(x,y,z)dydz, \quad \iiint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \oiint\limits_{\partial G} R(x,y,z)dzdx.$$

Остается сложить полученные формулы и воспользоваться линейностью как тройного так и поверхностного интегралов.

Примерами областей, элементарных относительно всех осей, являются выпуклые области.

Теперь рассмотрим случай, когда множество G разбивается на конечное количество элементарных (сравните с завершением доказательства теоремы 5.1). Т.е. $\overline{G} = \cup_{i=1}^I \overline{G}_i$, где G_i элементарны по всем осям, не пересекаются по внутренностям, а пересечение границ $\partial_{ij} G := \partial G_i \cap \partial G_j$ (если оно не пусто) представляет собой КГП. Для каждой подобласти

$$\iiint\limits_{G_i} div \boldsymbol{a}\ dV = \oiint\limits_{\partial G_i} (\boldsymbol{a}, \mathbf{n}) dS,$$

где поверхностный интеграл берется по внешней стороне границы ∂G_i. Суммируя, получаем:

$$\iiint\limits_G div \boldsymbol{a}\ dV = \sum_{i=1}^I \oiint\limits_{\partial G_i} (\boldsymbol{a}, \mathbf{n}) dS.$$

В последней сумме интегралы по **общим** кускам границ $\partial_{ij} G$ берутся дважды с противоположными ориентациями. Поскольку ПИВР меняет знак при изменении ориентации поверхности, указанные слагаемые взаимно уничтожаются. В сумме остаются лишь те слагаемые, которые отвечают всем кускам внешне ориентированной границы ∂G. В силу аддитивности ПИВР, получаем

$$\sum_{i=1}^I \oiint\limits_{\partial G_i} (\boldsymbol{a}, \mathbf{n}) dS = \oiint\limits_{\partial G} (\boldsymbol{a}, \mathbf{n}) dS.$$

Задача. Разбейте полноторий (бублик) на области элементарные относительно всех осей.

Доказательство общего случая мы опускаем в виду его громоздкости. ■

Следствие 7.1. *(нахождение объемов с помощью ПИВР) Объем (мера) области G, удовлетворяющей условиям теоремы 7.1, равен*

$$V(G) = \mu(G) = \frac{1}{3} \oiint_{\partial G} xdydz + ydzdx + zdxdy.$$

Задача. Докажите следствие 7.1.

7.2. Геометрический и физический смысл дивергенции. Определение дивергенции дано нами в координатном виде. Возникает подозрение, что это понятие зависит от выбора системы координат. Оказывается, оно инвариантно относительно замены ПДСК, т.е. является геометрическим понятием.

Теорема 7.2. *(геометрический смысл дивергенции) Пусть векторное поле $\boldsymbol{a} \in C^1(Ball(A,R))$, где $Ball(A,R)$ – открытый шар с центром в точке A радиуса R. Тогда*

$$div\boldsymbol{a}(A) = \lim_{r\to 0} \frac{\oiint\limits_{\partial Ball(A,r)} (\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})dS}{\mu(Ball(A,r))} . \tag{7.2}$$

Обсуждение. Формулу (7.2) можно проинтерпретировать так: дивергенция является производной потока по объему. Отсюда название: дивергенция (от латинского *divergere* – обнаруживать расхождение) показывает насколько **расходятся** (в смысле отличаются) в исследуемой точке входящий и исходящий потоки.

Доказательство. Применяя формулу (7.1) и теорему о среднем 3.5 п. 6(b), получаем

$$\lim_{r\to 0} \frac{\oiint\limits_{\partial Ball(A,r)} (\boldsymbol{a},\mathbf{n})dS}{\mu(Ball(A,r))} = \lim_{r\to 0} \frac{div\boldsymbol{a}(\widetilde{A}(r)) \iiint\limits_{Ball(A,r)} dV}{\mu(Ball(A,r))} = \lim_{r\to 0} div\boldsymbol{a}(\widetilde{A}(r)) = div\mathbf{a}(A),$$

где $\widetilde{A}(r) \in Ball(A,r)$. ■

Следствие 7.2. *(инвариантность определения 7.1) Дивергенция векторного поля не зависит от выбора прямоугольной декартовой системы координат (ПДСК).*

Доказательство. Поток векторного поля и мера множества – геометрические понятия, т.е. инвариантные относительно замены ПДСК.

Если интерпретировать поле **a** как поле скоростей несжимаемой жидкости, то поток поля через замкнутую поверхность ∂G есть объем жидкости, которая вытекает и втекает через ∂G за единицу времени. Отличие потока от нуля означает, что внутри, т.е. в области G, имеются **источники** и **стоки** жидкости. Следовательно, дивергенцию $div\boldsymbol{a}(A)$ можно трактовать как мощность источников (стоков) в точке A или как их точечную плотность.

Для электростатического поля справедлива теорема Гаусса: *дивергенция электростатического поля в точке равна плотности электрического заряда в этой точке, умноженному на 4π.*

Если $t(x,y,z)$ – скалярное поле температур, то векторное поле градиента $\mathbf{grad}\ t = (\partial t/\partial x, \partial t/\partial y, \partial t/\partial z)^T$ порождает поток тепла (тепловой энергии). Согласно закону Фурье (Жан Батист Жозеф Фурье, 1768 – 1830), *дивергенция поля* ***grad*** *t равна (с точностью до коэффициента) плотности источников (потребителей) тепла.*

7.3. Соленоидальные векторные поля.

Определение 7.2. Векторное поле $\boldsymbol{a}$ класса гладкости $C^1(U)$ на области $U \subset \mathbb{R}^3$ называется **соленоидальным** (или трубчатым в переводе с греческого), если поток через любую замкнутую кусочно-гладкую поверхность $\partial G \subset U$ равен нулю:

$$\oiint\limits_{\partial G} (\boldsymbol{a}(x,y,z), \mathbf{n}(x,y,z))dS = 0.$$

Из определения соленоидальности и физического смысла дивергенции следует, что речь идет о полях вне источников (зарядов). Несоленоидальное поле и возможный вид соленоидального поля изображены на рис. ??? Визуально эти поля не всегда различимы. Важно уметь различать их аналитически.

Рис. ???

По аналогии с односвязностью плоской области дадим

Определение 7.3. Область $U \subset \mathbb{R}^3$ называется **объемно односвязной**, если для любой замкнутой поверхности $\partial G \subset U$ внутренность $G \subset U$.

Образно говоря, объемно односвязная область не содержит **внутренних** полостей.

Примерами объемно односвязных областей являются шар и полноторий, а также области, полученные из них в результате взаимно непрерывной биекции. Шаровой слой и “сыр с дырками” не являются объемно односвязными областями.

Теорема 7.3. *(критерий соленоидальности) Чтобы векторное поле* $\boldsymbol{a}$ *класса гладкости $C^1(U)$ было соленоидальным на области $U \subset \mathbb{R}^3$ необходимо, а в случае объемной односвязности U и достаточно, чтобы его дивергенция равнялась нулю:*

$$\boldsymbol{a}\ \textit{соленоидально} \quad \underset{\textit{объемно односв. обл. } U}{\rightleftarrows} \quad div\,\boldsymbol{a}(x,y,z) = 0 \ \textit{для всех}\ (x,y,z) \in U.$$

Доказательство необходимости следует непосредственно из определения 7.2 и теоремы 7.2.

Если дивергенция в каждой точке равна нулю, то, согласно теореме 7.1 и определению 7.3 объемной односвязности, поток через любую замкнутую поверхность ∂G равен нулю. ■

Следствие 7.3. *(о локальной соленоидальности) Если дивергенция гладкого поля на области U равна нулю, то оно соленоидально на каждом шаре, принадлежащем U.*

Задача. Докажите следствие 7.3.

Пример несоленоидального векторного поля, дивергенция которого равна нулю. Рассмотрим напряженность точечного электрического заряда, расположенного в начале координат. Это векторное поле, которое с точностью до коэффициента равно $\boldsymbol{a}(A) = (1/|\mathbf{r}|^3) \cdot \mathbf{r}$, где $\mathbf{r}(A) = \overrightarrow{OA} = (x, y, z)^T$. Заметим, что в начале координат, где расположен заряд, поле не определено. Возьмем шаровой слой $G := \{A \in \mathbb{R}^3 : \ 0 < R_1 < |\overrightarrow{OA}| < R_2\}$, который является объемно неодносвязной областью. Для произвольного $R \in (R_1, R_2)$ сфера $S^2_R = \{A : \ |\overrightarrow{OA}| = R\} \subset G$. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathbf{r}_x}{|\mathbf{r}|^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = \frac{-2x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},$$

то $div\boldsymbol{a}(A) = 0$. Однако поток через сферу, принадлежащую шаровому слою, равен

$$\oiint\limits_{S^2_R}(\boldsymbol{a}, \mathbf{n})dS = \oiint\limits_{S^2_R}(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}, \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|})dS = \oiint\limits_{S^2_R}\frac{dS}{|\mathbf{r}|^2} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi \neq 0.$$

Заметим, что поток через границу шарового слоя

$$\oiint\limits_{\partial G}(\boldsymbol{a}, \mathbf{n})dS = \oiint\limits_{(S^2_{R_1})^-}(\boldsymbol{a}, \mathbf{n})dS + \oiint\limits_{(S^2_{R_2})^+}(\boldsymbol{a}, \mathbf{n})dS = -4\pi + 4\pi = 0,$$

что согласуется с теоремой 7.1 Остроградского-Гаусса.

Задача. Проверьте, что центральное поле $\boldsymbol{a}(A) = (1/|\mathbf{r}|^\alpha) \cdot \mathbf{r}$ имеет нулевую дивергенцию только в случае $\alpha = 3$.

Название “трубчатое” поле объясняет следующая конструкция, которую дадим без доказательства. Возьмем такую гладкую замкнутую кривую (петлю) $\gamma \subset U$, чтобы в каждой точке $A \in \gamma$ вектор $\boldsymbol{a}(A) \notin T_A\gamma$, т.е. петля не касается векторного поля ни в одной своей точке (в частности, $\boldsymbol{a}(A) \neq \mathbf{0}$). Из каждой точки $A \in \gamma$ вдоль поля $\mathbf{a}$ выпустим **фазовую кривую**, т.е. такую кривую $\mathbf{r}(t, A)$, что $\mathbf{r}(0, A) = A$ и $\mathbf{r}'_t(t, A) = \boldsymbol{a}(\mathbf{r}(t, A))$ (см. рис. ???). Существование и единственность такой кривой доказывается в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рис. ???

Возьмем фиксированное значение $T > 0$, для которого определено $\mathbf{r}(T, A)$ для всех $A \in \gamma$. Объединение построенных фазовых кривых образует **фазовую трубку**

$$Cyl(\boldsymbol{a}; 0, T) := \bigcup_{t\in[0,T], A\in\gamma} \{\mathbf{r}(t, A)\}.$$

Поскольку в каждой точке $B = \mathbf{r}(t, A) \in Cyl(\boldsymbol{a}; 0, T)$ вектор производной принадлежит касательной плоскости $\mathbf{r}'_t(t, A) \in T_B Cyl(\boldsymbol{a}; 0, T)$, то единичный вектор номали $\mathbf{n}(B)$ к фазовой трубке ортогонален вектору $\mathbf{r}'_t(t, A) = \boldsymbol{a}(\mathbf{r}(t, A)) = \boldsymbol{a}(B)$ (см. рис. ???).

Множество всех точек $\gamma_T = \cup_{A\in\gamma}\{\mathbf{r}(T, A)\}$ образует вторую петлю. На обе петли натянем гладкие пленки Θ и Θ_T соответственно: $\partial\Theta = \gamma$, $\partial\Theta_T = \gamma_T$. Объединение $S := Cyl(\boldsymbol{a}; 0, T) \cup \Theta \cup \Theta_T$ является замкнутой КГП, который мы ориентируем полем внешних нормалей. В силу соленоидальности поля $\boldsymbol{a}$, поток

$$\oiint\limits_{S}(\boldsymbol{a},\mathbf{n})dS=0 \ \Leftrightarrow \ \oiint\limits_{Cyl(\boldsymbol{a};0,T)}(\boldsymbol{a},\mathbf{n})dS+\oiint\limits_{\Theta^{+}}(\boldsymbol{a},\mathbf{n})dS+\oiint\limits_{\Theta^{+}_{T}}(\boldsymbol{a},\mathbf{n})dS=0.$$

Но в каждой точке $B=\mathbf{r}(t,A)\in Cyl(\boldsymbol{a};0,T)$, как было отмечено, выполнено условие ортогональности $(\boldsymbol{a}(B),\mathbf{n}(B))=0$. Поэтому $\oiint_{Cyl(\boldsymbol{a};0,T)}(\boldsymbol{a},\mathbf{n})dS=0$. Следовательно, поменяв внешнюю нормаль на Θ на внутреннюю, мы получаем:

$$\oiint\limits_{\Theta^{-}}(\boldsymbol{a},\mathbf{n})dS=\oiint\limits_{\Theta^{+}_{T}}(\boldsymbol{a},\mathbf{n})dS.$$

Вывод: поток, протекающий за единицу времени через сечение трубки, порожденной соленоидальным полем, один и тот же для всех сечений этой трубки.

§ 8. Формула Стокса

Следующая в ряду формул Ньютона-Лейбница, Грина и Остроградского-Гаусса формула Стокса связывает интеграл по замкнутому контуру с интегралом по поверхности (пленке), натянутой на этот контур. Она носит имя Сэра Джорджа Габриеэля Стокса (1819 — 1903), который впервые ввел ее в курс математического анализа. Но ее автором является Уильям Томсон, барон Кельвин (1824 — 1907).

8.1. Теорема Стокса. *Терминология*: криволинейный интеграл второго рода по **замкнутой** кривой называется **циркуляцией**. Мы уже имели дело с циркуляцией в теореме Грина.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. Пусть на области $U \subset \mathbb{R}^3$ задано гладкое векторное поле $\boldsymbol{a}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))^T$. Его **ротором** называют веторное поле, координаты которого вычисляют с помощью символического определителя:

$$rot\boldsymbol{a} : U \to \mathbb{R}^3, \quad rot\boldsymbol{a} := \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \tag{8.1}$$

ТЕОРЕМА 8.1. *Пусть $\overline{\Theta} \subset U \subset \mathbb{R}^3$ – простая гладкая поверхность с кусочно гладким краем $\partial\Theta$. Пусть ориентация поверхности полем единичных нормалей $\boldsymbol{n}(x, y, z)$ согласована с ориентацией края. Пусть векторное поле $\boldsymbol{a}(x, y, z)$ принадлежит классу гладкости $C^1(U)$. Тогда циркуляция поля $\boldsymbol{a}$ по кривой $\partial\Theta$ равна потоку поля $\boldsymbol{a}$ через поверхность Θ, т.е.*

$$\oint\limits_{\partial\Theta} (\boldsymbol{a}, \vec{\tau})ds = \iint\limits_{\Theta} (rot\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})\ dS, \tag{8.2}$$

где $\vec{\tau}(x, y, z)$ – поле ориентирующих единичных касательных к кривой $\partial\Theta$, ds – дифференциал длины дуги кривой $\partial\Theta$, dS – дифференциал площади поверхности Θ. (Петля на обозначении КИВР напоминает, что кривая $\partial\Theta$ замкнутая.)

Обсуждение. Теорема Стокса является обобщением теоремы Грина. Ее формулировка является облее общей, чем теорем Грина и Остроградского-Гаусса: в тех теоремах интегрирование по **области** заменялось интегрированием по **границе**, в этой теореме интегрирование по **поверхности** заменяется интегрированием по **краю**. Именно теорема Стокса явилась основой для дальнейшего обобщения на случай поверхности произвольной размерности m, принадлежащей пространству произвольной размерности $n > m$. Также отметим, что на фиксированную замкнутую кривую $\partial\Theta$ может быть натянута другая пленка Θ' (т.е. $\partial\Theta = \partial\Theta'$), но при этом поток ротора $rot\boldsymbol{a}$ (но не самого поля $\boldsymbol{a}$!) не изменяется.

Доказательство дадим для случая, когда поверхность $\overline{\Theta}$ имеет класс гладкости два. Т.е. существуют плоские области $\Omega \subset G \subset \mathbb{R}^2$ и отображение

$$\mathbf{r}:\ G \to \mathbb{R}^3,\ \mathbf{r} \in C^2(G),$$

которым параметризована поверхность $\overline{\Theta} = \mathbf{r}(\overline{\Omega})$. Мы рассмотрим три векторных поля: $\boldsymbol{a}_1 = (P,0,0)^T$, $\boldsymbol{a}_2 = (0,Q,0)^T$, $\boldsymbol{a}_3 = (0,0,R)^T$. Для каждого из них докажем формулу Стокса, после чего сложим полученные равенства. Доказательство осуществляется в три этапа: 1) заменяем циркуляцию по пространственной кривой $\partial\Theta$ на циркуляцию по плоской кривой $\partial\Omega$; 2) воспользовавшись формулой Грина, заменяем циркуляцию по $\partial\Omega$ интегрированием по плоской области Ω; 3) “узнаем” в полученном интеграле по Ω ПИВР от ротора по Θ.

Без ограничения общности можно считать, что в $\mathbb{R}^2$ система координат (u,v) правая, а поверхность Θ ориентирована семейством единичных нормалей $\mathbf{n} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v / |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|$. Пусть кусочно гладкий край $\partial\Omega$ параметризован против часовой стрелки вектор-функцией $(u(t),v(t))^T$ $(t \in [0,T])$. Тогда край $\partial\Theta$ параметризован вектор-функцией $\mathbf{r}(u(t),v(t)) = (x(u(t),v(t)), y(u(t),v(t)), z(u(t),v(t)))^T$. Поэтому

$$\oint\limits_{\partial\Theta} (\boldsymbol{a}_1, \vec{\tau})ds = \oint\limits_{\partial\Theta} P dx = \int\limits_0^T P(\mathbf{r}(u(t),v(t)))(x(u(t),v(t)))'_t\, dt =$$

$$\int\limits_0^T P(\mathbf{r}(u(t),v(t)))(x'_u u'_t + x'_v v'_t)dt = \oint\limits_{\partial\Omega} P(\mathbf{r}(u,v))x'_u du + P(\mathbf{r}(u,v))x'_v dv.$$

Итак, мы заменили циркуляцию поля $(P,0,0)^T \subset \mathbb{R}^3$ по $\partial\Theta$ на циркуляцию плоского поля (Px'_u, Px'_v) по $\partial\Omega$.

Теперь воспользуемся формулой Грина (5.1):

$$\oint\limits_{\partial\Omega} P(\mathbf{r}(u,v))x'_u du + P(\mathbf{r}(u,v))x'_v dv = \iint\limits_{\Omega} (P(\mathbf{r}(u,v))x'_v)'_v - (P(\mathbf{r}(u,v))x'_u)'_u)dudv.$$

Преобразуем подынтегральное выражение, воспользовавшись совпадением смешанных производных (вот для чего понадобилась гладкость класса C^2):

$$(P(\mathbf{r}(u,v))x'_v)'_v - (P(\mathbf{r}(u,v))x'_u)'_u = P'_u x'_v + P x''_{uv} - P'_v x'_u - P x''_{vu} = P'_u x'_v - P'_v x'_u =$$

$$(P'_x x'_u + P'_y y'_u + P'_z z'_u)x'_v - (P'_x x'_v + P'_y y'_v + P'_z z'_v)x'_u =$$

$$-P'_y(x'_u y'_v - x'_v y'_u) + P'_z(x'_v z'_u - x'_u z'_v) = -P'_y \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} + P'_z \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}.$$

Теперь, после второго этапа, получаем:

$$\oint\limits_{\partial\Theta} (\boldsymbol{a}_1, \vec{\tau})ds = \iint\limits_{\Omega} \left(-P'_y \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} + P'_z \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} \right) dudv.$$

С другой стороны, в силу определения 7.1 ротора векторного поля,

$$rot\boldsymbol{a}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & 0 & 0 \end{vmatrix} = P'_z\mathbf{j} - P'_y\mathbf{k}.$$

Поэтому из формулы (6.6) вычисления ПИВР следует

$$\iint\limits_{\Theta} (rot\boldsymbol{a}_1, \mathbf{n})\ dS = \iint\limits_{\Omega} (rot\boldsymbol{a}_1, \mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v) dudv =$$

$$\iint\limits_{\Omega} \begin{vmatrix} 0 & P'_z & -P'_y \\ x'_u & y'_u & z_u \\ x'_v & x'_v & x'_v \end{vmatrix} dudv = \iint\limits_{\Omega} \left(-P'_y \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} + P'_z \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} \right) dudv,$$

что совпадает с результатом преобразований после второго этапа.

Для поля $\boldsymbol{a}_1$ справедливость формулы установлена. Аналогично доказывается формула для полей $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_3$. Остается сложить полученные формулы и воспользоваться линейностью операций скалярного и векторного произведений по каждому сомножителю и линейностью интегрирования относительно подынтегральной функции.

Чтобы доказать теорему в предположении, что поверхность Θ только класса гладкости C^1, нужно аппроксимировать (приблизить) Θ пленками Θ_n класса C^2 с тем же краем $\partial\Theta$ и перейти к пределу (см. обсуждение теоремы 7.1). Поскольку мы пока не владеем методами теории аппроксимации, доказательство опускаем. ■

Теорема 7.1 остается справедливой для кусочно-гладких поверхностей:

Теорема 8.2. *Пусть $\overline{\Theta} \subset U \subset \mathbb{R}^3$ – КГП с кусочно гладким краем $\partial\Theta$. Пусть ориентация поверхности полем единичных нормалей $\boldsymbol{n}(x, y, z)$ согласована с ориентацией края. Пусть векторное поле $\boldsymbol{a}(x, y, z)$ принадлежит классу гладкости $C^1(U)$. Тогда справедлива формула Стокса (8.2).*

Доказательство осуществляется по тому же принципу сложения противоориентированных слагаемых, что и доказательства теорем Грина 5.1 и Остроградского-Гаусса 7.1. Пусть КГП Θ составлена из конечного количества ПГП – кусков Θ_i. Тогда для каждого куска справедлива формула Стокса. Складывая все равенства, справа мы получим, в силу определения (6.8),

$$\sum_{i=1}^{I} \iint\limits_{\Theta_i} (rot\boldsymbol{a}, \mathbf{n})\ dS = \iint\limits_{\Theta} (rot\boldsymbol{a}, \mathbf{n})\ dS$$

поток ротора через всю поверхность Θ. В сумме криволинейных интегралов слева интегралы по **общим** кускам границ $\partial_{ij}\Theta$ берутся дважды с противоположными ориентациями. Поскольку КИВР меняет знак при изменении ориентации кривой, указанные слагаемые взаимно уничтожаются. В сумме остаются лишь те слагаемые, которые отвечают всем кускам ориентированной границы $\partial\Theta$. В силу аддитивности КИВР, получаем

$$\sum_{i=1}^{I} \oiint\limits_{\partial\Theta_i} (\boldsymbol{a}, \vec{\tau}) ds = \oiint\limits_{\partial\Theta} (\boldsymbol{a}, \vec{\tau}) ds. \ ■$$

8.2. Геометрический и физический смысл ротора. Как и дивергенция, определение ротора дано нами в координатном виде. Однако это геометрическое понятие:

Теорема 8.3. *Пусть векторное поле $\boldsymbol{a} \in C^1(Ball(A,R))$, где $Ball(A,R)$ – открытый шар с центром в точке A радиуса R. Пусть $\boldsymbol{n}$ – фиксированный единичный вектор, $Circ(A,r,\boldsymbol{n})$ – круг с центром в точке A, радиуса r, лежащий в плоскости перпендикулярной вектору $\boldsymbol{n}$ (см. рис. ???). Тогда в точке A проекция ротора на направление $\boldsymbol{n}$ есть предел:*

$$(rot\boldsymbol{a}(A),\boldsymbol{n}) = \lim_{r\to 0} \frac{\oint\limits_{\partial Circ(A,r,\boldsymbol{n})} (\boldsymbol{a},\vec{\tau})ds}{\mu(Circ(A,r,\boldsymbol{n}))}\ , \tag{8.3}$$

где окружность $\partial Circ(A,r,\boldsymbol{n})$ ориентирована согласованно с вектором $\boldsymbol{n}$, а мера (площадь) круга $\mu(Circ(A,r,\boldsymbol{n})) = \pi r^2$.

Обсуждение. Формулу (8.3) можно проинтерпретировать так: проекция ротора поля $\boldsymbol{a}$ на направление $\mathbf{n}$ является производной **циркуляции** поля по малой петле, перпендикулярной $\mathbf{n}$, по площади, которую ограничивает эта петля. Если $\boldsymbol{a}$ – поле скорости течения жидкости, то $rot\boldsymbol{a}$ – вектор, пропорциональный вектору **угловой** скорости бесконечно малой частицы сплошной среды. Отсюда название: ротор от латинского *roto* – вращаю, или в старой терминологии вихрь.

Доказательство. Применяя формулу (8.2) и теорему о среднем 3.5 п. 6(b), получаем

$$\lim_{r\to 0} \frac{\oint\limits_{\partial Circ(A,r,\mathbf{n})} (\boldsymbol{a},\vec{\tau})ds}{\mu(Circ(A,r,\mathbf{n}))} = \lim_{r\to 0} \frac{(rot\boldsymbol{a}(\widetilde{A}(r)),\mathbf{n}) \iint\limits_{Circ(A,r,\mathbf{n})} dS}{\mu(Circ(A,r,\mathbf{n}))} =$$

$$\lim_{r\to 0}(rot\boldsymbol{a}(\widetilde{A}(r)),\mathbf{n}) = (rot\boldsymbol{a}(A),\mathbf{n}),\ \text{где } \widetilde{A}(r) \in Circ(A,r,\mathbf{n}). \ \blacksquare$$

Следствие 8.1. *(инвариантность определения 8.1) Ротор векторного поля не зависит от выбора прямоугольной декартовой системы координат.*

Доказательство. Циркуляция векторного поля и мера множества – геометрические понятия, т.е. инвариантные относительно замены ПДСК.

Замечание о теоремах типа Ньютона-Лейбница. Доказательства этих теорем мы осуществляли по принципу от "внутренности Ω к краю $\partial\Omega$", сводя, в конечном итоге, к теореме Н-Л. Методически верным было бы поступать наоборот. Во-первых, на краю берется интеграл от вектор-функции (в одномерном случае функция и вектор-функция совпадают) общего вида, а внутри от дифференциального оператора, примененного к исходной вектор-функции – это дифференцирование первообразной, дивергенция, ротор. Во-вторых, мы используем готовые подынтегральные выражения для внутренностей – это производная первообразной, определение 7.1 дивергенции и 8.1 ротора соответственно. Но откуда мы получили эти выражения, нам неизвестно. Наконец, определения 7.1 и 8.1 имеют координатный вид и дополнительно нуждаются в доказательстве инвариантности. "Правильная" схема доказательства была бы следующей.

1. Внутренность разбивают на “мелкие” подобласти Ω_i с кусочно гладкими краями $\partial\Omega_i$, которые согласованно ориентируют. См. рис. ???
2. Представляют интеграл по краю как сумму

$$\oint_{\partial\Omega} F = \sum_i \oint_{\partial\Omega_i} F = \sum_i \oint_{\partial\Omega_i} \frac{F}{\mu(\Omega_i)} \cdot \mu(\Omega_i).$$

3. Полученная сумма может быть проинтерпретирована как интегральная по Ω от “производной” функции F по мере $\mu(\Omega)$. Найдя эту производную в координатном выражении, получают искомый ответ, который символически можно записать так:

$$\oint_{\partial\Omega} F = \int_{\Omega} dF.$$

Рис. ???

Указанный способ доказательства технически сложнее, но перспективнее для обобщения на многомерный случай. В частности, он показывает, что на самом деле интегрируют не подынтегральную функцию f, а дифференциал $dF = F'dx = fdx$. Поэтому классическое обозначение $\int_a^b f(x)dx$, где появление dx кажется лишним, не случайно оказалось удобным при замене переменной!

8.3. Потенциальные векторные поля. Изучая понятие производной для числовых функций одной переменной, мы выяснили, что произвольная **непрерывная** на (a, b) функция $f(x)$ является производной другой функции: существует **первообразная** $F \in C^1(a, b)$, для которой $F'(x) = f(x)$, все первообразные имеют вид $F(x, C) = \int_{x_0}^x f(t)dt + C$, где $x_0 \in (a, b)$ – произвольная фиксированная точка, C – произвольная постоянная. В силу топологических причин этот вывод НЕ справедлив для функции нескольких переменных. Поскольку производной функции $u(x, y, z)$ является **вектор** $u' = \mathbf{grad}u$, возникает важный вопрос: каковы условия, при которых векторное поле является полем градиента некоторой функции. Прежде всего нам потребуется

Определение 8.2. Пусть $U \subset \mathbb{R}^3$ – область, функция $u \in C^1(U)$, векторное поле $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)^T \in C^0(U)$. Функция u называется **потенциалом** поля $\boldsymbol{a}$, если $\mathbf{grad}u = \boldsymbol{a}$, т.е. $\partial u/\partial x = P$, $\partial u/\partial y = Q$, $\partial u/\partial z = R$. (В случае двух переменных останется два условия.) Само векторное поле в указанном случае называется **потенциальным**.

Теорема 8.4. *(глобальный критерий существования потенциала) Пусть векторное поле $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)^T \in C^0(U)$ в некоторой области U. Следующие утверждения равносильны:*

1. *Циркуляция поля по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset U$ (возможно, с самопересечениями!) равна нулю, т.е.*

$$\oint_\gamma (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{s}) = \int_0^T (\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}(t)), \boldsymbol{r}'(t))dt = 0,$$

где $\boldsymbol{r}$ – кусочно-гладкая вектор-функция, удовлетворяющая условию периодичности $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}(T)$ (см. рис. ???).

2. *Для произвольных точек* $A, B \in U$ *интеграл* $\int_{\widetilde{AB}}(\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{s})$ *НЕ зависит от кусочно-гладкой кривой* $\widetilde{AB} \subset U$ *(возможно, с самопересечениями), а зависит только от самих точек* A *и* B.
3. *Векторное поле* $\boldsymbol{a}$ *потенциально.*

Рис. ???

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Если $A, B \in U$, то, в силу определения области, существует непрерывная кривая, соединяющая эти точки и принадлежащая U. Можно доказать, что существует кусочно-гладкая (и даже гладкая) кривая, соединяющая точки области (доказательство будет дано позже). Пусть $\widetilde{AB}$ и $\widehat{AB}$ две такие **ориентированные** кривые. Обозначим через $\widehat{BA}$ кривую $\widehat{AB}$ с противоположной ориентацией. Тогда кривая $\gamma := \widetilde{AB} \cup \widehat{BA}$ является замкнутой и, в силу аддитивности КИВР, справедливо:

$$0 = \oint_\gamma (\boldsymbol{a}, d\mathbf{s}) = \int_{\widetilde{AB}} + \int_{\widehat{BA}} = \int_{\widetilde{AB}} - \int_{\widehat{AB}},$$

что доказывает утверждение.

$2 \Rightarrow 3$. Мы предъявим функцию, которая является потенциалом. Зафиксируем произвольную точку $A(x_0, y_0, z_0) \in U$. Поскольку U область, для произвольной точки $B(x, y, z) \in U$ существует непрерывная кривая, соединяющая точки A и B и принадлежащая U. Методами теории аппроксимации можно доказать, что существует кусочно-гладкая кривая $\widetilde{AB} \subset U$. В условиях п. 2 независимо от выбора кривой $\widetilde{AB}$ корректно определена функция

$$u : U \to \mathbb{R},\ \forall B \in U \text{ значение } u(B) := \int_{\widetilde{AB}} (\boldsymbol{a}, d\mathbf{s}). \tag{8.4}$$

Покажем, что она дифференцируема на U и в произвольной точке $B(x, y, z) \in U$ справедливо $\mathbf{grad}u(B) = \boldsymbol{a}(B)$. С этой целью докажем существование частной производной $\partial u(B)/\partial x$. Если возмущение Δx достаточно мало, точка $D(x + \Delta x, y, z) \in U$ вместе с отрезком $[BD]$, рис. ???. Поэтому предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y, z) - u(x, y, z)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_{\widetilde{AD}} - \int_{\widetilde{AB}}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_{[BD]}}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} (\boldsymbol{a}(x + s, y, z), \mathbf{i}) ds}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x + \xi, y, z)\Delta x}{\Delta x} = P(x, y, z).$$

Мы воспользовались аддитивностью интеграла, п. 2, теоремой о среднем ($\xi \in (x, x + \Delta x)$) и непрерывностью функции P. Следовательно, $\partial u(B)/\partial x = P(B)$. Аналогично $\partial u(B)/\partial y = Q(B)$, $\partial u(B)/\partial z = R(B)$. Поскольку функции P, Q, R непрерывны, то утверждение полностью доказано.

$3 \Rightarrow 1$. В силу потенциальности поля $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)^T$, существует функция $u \in C^1(U)$, для которой

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P,\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q,\ \frac{\partial u}{\partial z} = R.$$

Поэтому в параметризации $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ циркуляция

$$\oint_\gamma (\boldsymbol{a}, d\mathbf{s}) = \int_0^T (\mathbf{a}(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}'(t)) dt = \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial u}{\partial z} z'(t) \right) dt =$$

$$\int_0^T (u(\mathbf{r}(t)))'_t dt = u(\mathbf{r}(T)) - u(\mathbf{r}(0)) = 0. \blacksquare$$

Рис. ???

Теперь мы можем дать

Теорема 8.5. *(описание всех потенциалов) При выполнении любого из трех условий теоремы 8.4 справедливы следующие утверждения:*

1. *Для любой точки $A \in U$ функция (8.4) является потенциалом.*
2. *Для любого потенциала и поля $\boldsymbol{a}$ имеет место формула Ньютона-Лейбница для КИВР:*
$$\int_{\widetilde{AB}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{s}) = u(B) - u(A).$$
3. *Любые два потенциала отличаются на константу, т.е. все потенициалы описывает формула*
$$u(B) := \int_{\widetilde{AB}} (\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{s}) + C,$$
где C – произвольная постоянная.

Доказательство п. 1 содержится в доказательстве п. 2 теоремы 8.4. Доказательство п. 2 осуществляется по той же схеме, что и доказательство п. 3 теоремы 8.4:

$$\int_{\widetilde{AB}} (\boldsymbol{a}, d\mathbf{s}) = \int_\alpha^\beta (u(\mathbf{r}(t)))'_t dt = u(\mathbf{r}(\beta)) - u(\mathbf{r}(\alpha)) = u(B) - u(A).$$

Если u и v – два потенциала одного поля, то, в силу предыдущего пункта,

$$\int_{\widetilde{AB}} (\boldsymbol{a}, d\mathbf{s}) = u(B) - u(A) = v(B) - v(A).$$

Значит, разность $u(B) - v(B) = u(A) - v(A) = const = C$ не зависит от точки $B \in U$. $\blacksquare$

8.4. Безвихревые векторные поля. Критерии потенциальности, сформулированные в пп. 1 и 2 теоремы 8.4 труднопроверяемые. Оказывается, усиление гладкости поля $\boldsymbol{a}$ позволяет проверить его потенциальность с помощью локальной характеристики (а именно $rot\boldsymbol{a}$) и одного глобального топологического свойства области U. Этот подход аналогичен применению дивергенции и объемной односвязности при исследовании соленоидальности поля. Нам потребуется два определения.

Определение 8.3. Векторное поле $\boldsymbol{a} \in C^1(G)$ называется **безвихревым** на U, если тождественно $rot\boldsymbol{a}(B) \equiv \mathbf{0}$ для любой точки $B \in U$.

Определение 8.4. Область $U \subset \mathbb{R}^3$ называется **поверхностно односвязной**, если для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset U$ существует кусочно-гладкая поверхность $\Theta \subset U$, краем которой является кривая γ.

Образно говоря, поверхностно односвязная область вместе с любой своей петлей содержит некоторую пленку (не обязательно все!), натянутую на эту петлю. Или иначе, поверхностно односвязная область не имеет **сквозных** отверстий, т.е. дырок.

Примерами поверхностно односвязных областей являются пространство, из которого удалили шар, сам шар, шаровой слой, а также области, полученные из них в результате взаимно непрерывной биекции. Пространство, из которого удалили прямую (но не плоскость!), полноторий, "крендели" не являются поверхностно односвязными областями. (См. рис. ??? Сравните объемно односвязные и поверхностно односвязные области!)

Рис. ???

Замечание. Определение 8.4 нуждается в доказательстве корректности, а именно: у любой замкнутой КГК существует хотя бы одна кусочно-гладкая поверхность, для которой эта кривая является краем (т.е. доказательство теоремы типа Жордана). Попросту говоря: на любую петлю можно натянуть пленку, в чем мы убеждаемся, поместив проволочный контур в мыльную воду.

Теорема 8.6. *(критерий потенциальности) Чтобы векторное поле* $\boldsymbol{a}$ *класса гладкости* $C^1(U)$ *было потенциальным на области* $U \subset \mathbb{R}^3$ *необходимо, а в случае поверхностной односвязности* U *и достаточно, чтобы оно было безвихревым:*

$$\boldsymbol{a} \text{ потенциально} \underset{\text{поверхн. односв. обл. } U}{\rightleftarrows} rot\,\boldsymbol{a}(x,y,z) = \boldsymbol{0} \text{ для всех } (x,y,z) \in U.$$

Доказательство необходимости следует непосредственно из п. 1 теоремы 8.4 и теоремы 8.3 о геометрическом смысле ротора.

Пусть поле безвихревое. В силу п. 1 теоремы 8.4 для доказательства потенциальности достаточно проверить, что циркуляция по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой (возможно с самопересечениями!) равна нулю. Ограничимся случаем кривой γ без самопересечений. Из поверхностной односвязности следует, что существует кусочно-гладкая поверхность $\Theta \subset U$, для которой $\partial\Theta = \gamma$. Из формулы Стокса (8.2) и безвихревости поля следует, что циркуляция по γ равна нулю. ■

Следствие 8.2. *(о локальной потенциальности) Если гладкое поле безвихревое на области* U*, то оно потенциально на каждом шаре, принадлежащем* U*.*

Задача. Докажите следствие 8.2.

Пример безвихревого, но непотенциального векторного поля. Рассмотрим поле $\boldsymbol{a} = (-y/(x^2+y^2), x/(x^2+y^2), 0)$ на толстостенном цилиндре $U = \{1 < x^2+y^2 < 9,\ z \in \mathbb{R}\}$, который является поверхностно неодносвязной областью. На U ротор

$$rot\,\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Но циркуляция по окружности $S^1 = \{\mathbf{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0),\ t \in [0, 2\pi]\} \subset U$ равна

$$\oint_{S^1} (\boldsymbol{a}, d\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-2\sin t}{4} \cdot (-1) 2\sin t + \frac{2\cos t}{4} \cdot 2\cos t \right) dt = 2\pi \neq 0.$$

Выпишем как выглядят условия потенциальность на плоскости. Пусть на области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ задано непрерывное векторное поле $\boldsymbol{a} = (P(x,y), Q(x,y))^T$. Содержание п. 8.3 переносится на него без изменений. Теорема 8.6 получает следующую переформулировку:

Теорема 8.7. *(критерий потенциальности плоского поля) Чтобы векторное поле $(P, Q) \in C^1(\Omega)$ было потенциальным на области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ необходимо, а в случае односвязности Ω и достаточно, чтобы оно было безвихревым в следующем смысле:*

$$rot\,\boldsymbol{a} := \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 0 \text{ для всех } (x,y) \in \Omega. \tag{8.5}$$

Обсуждение. Теорема является частным случаем теоремы 8.6, если положить в ней $P(x,y,z) = P(x,y)$, $Q(x,y,z) = Q(x,y)$, $R(x,y,z) \equiv 0$.

Доказательство. Если поле $\boldsymbol{a}$ потенциально, то существует функция $u \in C^2(\Omega)$, для которой $P(x,y) = u'_x$, $Q(x,y) = u'_y$ при всех $(x,y) \in \Omega$. Следовательно смешанные производные второго порядка функции u существуют и совпадают, т.е. $P'_y = u''_{xy} = u''_{yx} = Q'_x$. Значит, условие (8.5) выполнено.

Пусть справедливо (8.5). В силу п. 1 теоремы 8.4, для доказательства потенциальности достаточно проверить, что циркуляция по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой γ нулевая. Из односвязности следует, что внутренность $Int\gamma$ принадлежит области Ω. Поэтому можно воспользоваться формулой Грина (5.1):

$$\oint_\gamma (\boldsymbol{a}, d\mathbf{r}) = \oint_\gamma P dx + Q dy = \int\int_{Int(\gamma)} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy = 0. \blacksquare$$