УДК ????

Я. М. Дымарский

Лекции по математическому анализу, четвертый семестр

§ 1. Тригонометрические ряды Фурье. Введение

Тригонометрический ряд Фурье (ТРФ) (Жан Батист Жозеф Фурье 1768 – 1830) – это специальный функциональный ряд, который является бесконечномерным аналогом разложения вектора по ортогональному базису. Роль такого базиса выполняют синусы и косинусы всевозможных осцилляций. Развитие теории ТРФ приводит к методам функционального анализа. ТРФ являются мощнейшим инструментом в уравнениях математической физики, поскольку ряд Фурье ведёт себя прозрачно при дифференцировании, интегрировании и сдвиге функции по аргументу.

1.1. Вспомогательные понятия и утверждения. Напомним, что символ $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)$ называется функциональным рядом, порожденным последовательностью функций $c_k(x)$, где $x \in X \subset \mathbb{R}$ (X – **общая** для всех функций область определения). Суммы $S_n := \sum_{k=1}^{n} c_k(x)$ называются **частичными** суммами ряда. Сходимость при $n \to \infty$ при фиксированном аргументе x **числового** ряда $S_n(x)$ называется сходимостью ФР в точке x. Если ряд сходится в каждой точке $x \in X$, то сходимость называется **поточечной**. В результате возникает предельная функция $S(x) := \lim_{n\to\infty} S_n(x)$. Поточечно сходящийся ряд сходится **равномерно**, если $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на X. Ценность равномерной сходимости в том, что она “сохраняет” важные свойства слагаемых ряда: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость. Точные формулировки даны в теоремах 2.10.9 - 2.10.11.

ТРФ применяют для исследования функций более широкого класса, чем непрерывные. Для нас исходным будет следующий класс:

Определение 1.1. Функция f называется **абсолютно интегрируемой** (АИ) на конечном (полубесконечном, бесконечном) интервале (a, b), если

1. функция f имеет на (a, b) не более конечного числа особенностей, т.е. существуют точки $x_0 = a < x_1 < ... < x_i < ... < x_I = b$ такие, что для любого $i \in \{1, ..., I-1\}$ и любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset (a, b) \wedge [\alpha, \beta] \not\ni x_i$ интеграл Римана $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ существует в собственном смысле;
2. несобственный интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ сходится.

Замечание. Мы не акцентируем внимание на концах отрезка, поскольку значения функции в конечном количестве точек не влияют на ее интегрируемость.

Функциональное пространство всех АИ на (a, b) функций обозначим через $L^1_R(a, b) = L_R(a, b)$. Это традиционное обозначение, которое напоминает, что описываемые функции абсолютно интегрируемы в **первой** степени по

Риману. (Существуют простанства функций, интегрируемых, во-первых, с другими степенными показателями и, во-вторых, по принципиально другим методикам.) Далее, мы понимаем $L_R(a,b)$ именно как векторное пространство, элементы которого, т.е. функции f, g, ..., являются векторами с **поточечными** операциями сложения и умножения на число:

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x), \quad (\alpha\cdot f)(x) := \alpha\cdot f(x).$$

Задача. Какая функция является нулевым вектором? Проверьте: 1) векторные операции не выводят за пределы пространства $L_R(a,b)$; 2) выполнены все аксиомы векторного пространства.

Произведение АИ функций в общем случае не является АИ. Например, функция $f(x)=x^{-1/2}$ принадлежит пространству $L_R(0,1)$, а ее квадрат $f^2(x)=x^{-1}$ – нет. Потребность в умножении функций вынуждает нас предъявить более жесткие требования ко второму сомножителю:

Лемма 1.1. *(об умножении) Если функция $f\in L_R(a,b)$, а функция $g(x)$ – непрерывна и ограничена на (a,b), то произведение $f(x)g(x)\in L_R(a,b)$.*

Замечание. Функция g не обязана быть непрерывной вплоть до концов интервала, например, $g(x)=\sin(1/x)$ $(x\in(0,1))$.

Доказательство. Из п. 1 определения 1 и непрерывности функции g следует, что для любого $i\in\{1,...,I-1\}$ и любого отрезка $[\alpha,\beta]\subset(a,b)\wedge[\alpha,\beta]\not\ni x_i$ интеграл Римана $\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx$ существует в собственном смысле. Значит, п. 1 определения выполнен и для функции $f(x)g(x)$. Из ограниченности функции $|g(x)|$ и сходимости интеграла $\int_a^b|f(x)|dx$ следует, согласно признаку сравнения (теорема 2.8.8), сходимость интеграла $\int_a^b|f(x)g(x)|dx$. ■

Периодичность тригонометрических функций вынуждает нас сосредоточиться на исследовании именно периодических функций. Нам понадобится

Лемма 1.2. *(о сдвиге при интегрировании на периоде) Если функция f является T-периодической и АИ на $(0,T)$, то для любого числа α справедливо*

$$\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx. \tag{1.1}$$

Обсуждение. Утверждение буквально очевидно, если разбить отрезок интегрирования на два подотрезка согласно рис. ???.

Рис. ???

Доказательство. В силу периодичности, фунция f является АИ на любом интервале вида (mT,nT), где $m,n\in\mathbb{Z}$, $m<n$. Поскольку любой конечный интервал можно погрузить в интервал указанного типа, то функция f является АИ на любом конечном интервале. Учитывая это замечание и используя периодичность, получаем

$$\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)dx = \int_\alpha^T + \int_T^{\alpha+T} = \int_\alpha^T + \int_0^\alpha = \int_0^T . \blacksquare$$

1.2. Ортогональная система тигонометрических функций. В качестве отправной точки рассмотрим арифметическое евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением $(\mathbf{f},\mathbf{g}) := f^{(1)}g^{(1)}+...+f^{(n)}g^{(n)}$. Если $\{\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n\}$ – ортогональный базис (т.е. $(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)=0$ при $i\neq j$), то координаты произвольного вектора $\mathbf{f}$ в разложении $\mathbf{f}=\xi^{(1)}\mathbf{e}_1+...+\xi^{(n)}\mathbf{e}_n$ получаются, если обе части разложения скалярно умножить на $\mathbf{e}_i$: $\xi^{(i)}=(\mathbf{f},\mathbf{e}_i)/(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_i)$.

Аналогом евклидового пространства $\mathbb{R}^n$ для нас является функциональное пространство $L^2_R(-\pi,\pi)$ **АИ с квадратом** функций, т.е. таких функций $f\in L_R(-\pi,\pi)$, что и $f^2\in L_R(-\pi,\pi)$. В силу определения, $L^2_R(-\pi,\pi)\subset L_R(-\pi,\pi)$. Важно, что функции из $L^2_R(-\pi,\pi)$ можно поточечно умножать $(f\cdot g)(x) := f(x)\cdot g(x)$ и при этом верна

Лемма 1.3. *Если $f,g\in L^2_R(-\pi,\pi)$, то произведение $f\cdot g\in L_R(-\pi,\pi)$.*

Доказательство. Пусть $\{x_i\}$ $(i=0,...,I)$ – множество всех особых точек функций f и g. Для любого отрезка $[\alpha,\beta]\subset(a,b)\wedge[\alpha,\beta]\not\ni x_i$ существование собственного интеграла $\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx$ вытекает из интегрируемости по Риману произведения двух интегрируемых функций (см. теорему 2.6.6). Существование несобственного интеграла $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)g(x)|dx$ вытекает из неравенства $2|f(x)g(x)|\leqslant f^2(x)+g^2(x)$ и условия $f^2,\ g^2\in L_R(-\pi,\pi)$. ■

Задача. Опираясь на лемму 1.3, докажите что пространство $L^2_R(-\pi,\pi)$ замкнуто относительно векторных операций. Точнее, $\forall f,g\in L^2_R(-\pi,\pi)$ и $\forall\mu,\ \nu\in\mathbb{R}$ выполнено $\mu f+\nu g\in L^2_R(-\pi,\pi)$.

Среди функций пространства $L^2_R(-\pi,\pi)$ мы выделим вспомогательный, очень удобный при интегрировании класс:

Определение 1.2. **кусочно-постоянных** (КП) функций. Функцию пространства $f\in L^2_R(-\pi,\pi)$ называют КП, если существует конечное разбиение $(-\pi,\pi)$ на промежутки $\langle x_i,x_{i+1}\rangle$, на каждом из которых функция постоянна. Не исключено, что промежуток вырождается в точку $[x_i,x_i]$.

Типичный вид графика КП функции изображен на рис. ???

Рис. ???

Рассмотрим две КП функции f и g, у которых разбиения на промежутки постоянства совпадают и равны по длине:

$$f(x)=f^{(i)},\ g(x)=g^{(i)} \text{ при } x\in(x_i,x_{i+1}),\ x_{i+1}-x_i=\frac{2\pi}{n},\ i=0,...,n-1.$$

Для выбранных функций сумма типа скалярного произведения отличается от интеграла только коэффициентом:

$$(f^{(1)}g^{(1)}+...+f^{(n)}g^{(n)})\cdot\frac{2\pi}{n}=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx.$$

Это наблюдение порождает

Определение 1.3. **(Неопределенным) скалярным произведением** произвольных функций $f,g\in L^2_R(-\pi,\pi)$ называется интеграл

$$(f,g):=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx. \tag{1.2}$$

Интегральной евклидовой (полу)нормой функции $f \in L^2_R(-\pi,\pi)$ называют

$$||f||_2 := (f,f)^{1/2} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx \right)^{1/2}. \tag{1.3}$$

Лемма 1.4. *Определение 1.3 "почти" корректно. Точнее, указанный интеграл (1.2): 1) существует для любых функций $f,g \in L^2_R(-\pi,\pi)$, 2) линеен по каждому сомножителю, 3) коммутативен относительно сомножителей, 4)* ***неотрицателен*** *при $f(x) = g(x)$.*

Задача. Докажите лемму 1.4.

Замечание. Чтобы формула (1.2) определяла "настоящее" скалярное произведение, а формула (1.3) определяла норму, не хватает **строгой положительности** $||f||_2 > 0$ при $f(x) \neq 0$ (отсюда термин "полунорма"). Например, функция равная нулю всюду, кроме конечного числа точек, отлична от нуля, а ее интегральная полунорма равна нулю. Обсуждение этой идеологически сложной проблемы мы отложим в конец теории.

Теперь мы введем аналог ортогонального базиса:

Определение 1.4. **Тригонометрической системой** (ТС) называют счетную совокупность функций

$$1 \equiv \cos(0x),\ \sin x,\ \cos x,\ \ldots\ \cos kx,\ \sin kx, \ldots,\ \text{где } k \in \mathbb{N}, \tag{1.4}$$

упорядоченную по росту осцилляции (количеству нулей) на интервале $(-\pi,\pi)$.

В основе теории РФ лежит наблюдение

Теорема 1.1. *(об ортогональности ТС). Справедливы утверждения:*

1. *Любые две функции из ТС ортогональны в смысле скалярного произведения (1.2).*
2. *Интегральные евклидовы нормы функций из ТС равны*

$$||1||_2 = \sqrt{2\pi},\ \ ||\cos kx||_2 = ||\sin kx||_2 = \sqrt{\pi},\ \ k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство основано на известных тригонометрических тождествах

$$\cos nx \cdot \cos mx = \frac{1}{2}(\cos(n+m)x + \cos(n-m)x),$$

$$\sin nx \cdot \sin mx = \frac{1}{2}(\cos(n-m)x - \cos(n+m)x),$$

$$\sin nx \cdot \cos mx = \frac{1}{2}(\sin(n+m)x + \sin(n-m)x).$$

Задача. Завершите доказательство теоремы 1.1.

Продолжая аналогию с вычислением координаты $\xi^{(i)}$, дадим

Определение 1.5. 1. Функциональный ряд (т.е. символ!)

$$TS := a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (trigonometric\ series) \tag{1.5}$$

называется **тригонометрическим рядом** (ТР).

2. **Тригонометрическими коэффициентами Фурье** (или просто КФ) абсолютно интегрируемой на $(-\pi,\pi)$ функции f называются числа

$$a_0 := \frac{1}{2\pi}(f,1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ a_k := \frac{1}{\pi}(f,\cos kx) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx,$$

$$b_k := \frac{1}{\pi}(f,\sin kx) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx,\ k\in\mathbb{N}. \tag{1.6}$$

3. Функциональный ряд (т.е. символ!) вида (1.5) называется **тригонометрическим рядом Фурье** (или просто РФ) функции f, если его коэффициенты вычислены по формулам (1.6). Обозначение:

$$\text{при (1.6)}\ f(x) \sim FS(f) := a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k \sin kx \quad (\mathit{Fourier\ series}).$$

Лемма 1.5. *(корректность определения 1.5) Для любой функции $f \in L_R(-\pi,\pi)$ коэффициенты Фурье (1.6), а следовательно и ряд Фурье как символ существуют.*

Доказательство немедленно вытекает из леммы 1.1.

1.3. Основные задачи классической теории рядов Фурье. Знак $\sim$ в определении 1.5 п. 3 следует понимать так: АИ функция f **порождает** (определяет) некоторый (символьный!) ряд Фурье. Однако существование символьного РФ еще не означает, что полученный ТР сходится хотя бы поточечно и – тем более – равномерно. А если сходится, то не факт, что он сходится к той функции, которой порожден.

Следует различать два типа утверждений. Первый тип возникает, когда данная АИ функция f порождает свой символьный ряд Фурье $FS(f)$; эту ситуацию мы будем обозначать $f\sim FS(f)$. Второй тип утверждений возникает, когда дан тригонометрический ряд, возможно порождающий функцию $f(TS)$; обозначение $TS \sim f(TS)$.

Перечислим задачи типа $f\sim FS(f)$:

1. Сходится ли $FS(f)$ в данной точке? поточечно? равномерно? Каковы условия (необходимые, достаточные) сходимости?
2. Если сходится, то к какой функции? Где и как отличается функция $FS(f)$ от функции f?
3. Какова “скорость” сходимости? (Это понятие нуждается в уточнениии.)
4. Как свойства функции f (периодичность, непрерывность, класс гладкости и др.) влияют на свойства $FS(f)$ и на скорость сходимости?
5. Какими свойствами обладает функция $FS(f)$ (периодичность, непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость)?

Задачи типа $TS\sim f(TS)$:

1. Сходится ли TS поточечно? равномерно? Каковы условия (необходимые, достаточные) сходимости?
2. Если да, то к какой по свойствам функции $f(TS)$?
3. Какова “скорость” сходимости?

4. Какими свойствами обладает функция $f(TS)$ (периодичность, непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость)?

Как видим, задачи однотипные – это **задачи о сходимости** специального функционального ряда, а именно ТР. Классическая постановка задачи предполагает поточечный (локальный) анализ сходимости. Следует постоянно учитывать, порождены ли эти задачи данной функцией, или данным ТР. Чтобы продемонстрировать тонкость возникающих вопросов, попробуем ответить на следующий: что будет, если по данному ТР мы определяем РФ? Другими словами: к какому результату мы придем при взоимнообратных переходах $TS \sim f(TS) \sim FS(f(TS))$? На этот вопрос частично отвечает

Теорема 1.2. *Если ряд (1.5)* ***равномерно сходится*** *на* $[-\pi, \pi]$*, то функция* $f(TS)$*:*

1. *непрерывна на* $[-\pi, \pi]$*;*
2. *значения функции на концах отрезка совпадают:* $f(\pi) = f(-\pi)$*;*
3. *ее коэффициенты Фурье совпадают с коэффициентами исходного ТР, т.е. справедливо равенство* $FS(f(TS)) = TS$*.*

Обсуждение. Утверждение теоремы можно сформулировать так: если ТР сходится равномерно, то он является РФ для своей суммы.

Заметим, что поточечно (равномерно) сходящийся на $[-\pi, \pi]$ ТР фактически поточечно (равномерно) сходится на всей числовой оси и является 2π-периодической функцией. Аналогично, в условиях теоремы 1.2 функцию $f(TS)$ можно (и полезно!) понимать как 2π-периодическую на всей числовой оси.

Доказательство. П. 1 следует из теоремы 2.10.9. П. 2 – из 2π-периодичности слагаемых ТР. Наконец, умножим тождество (1.5) на $\cos mx$ или $\sin mx$ ($m \in \mathbb{N}$). Полученные ряды также будут сходиться равномерно на $[-\pi, \pi]$ к функциям $f(x) \cdot \cos mx$ и $f(x) \cdot \sin mx$ соответственно . (Обоснуйте!) Проинтегрируем их почленно (сославшись на теорему 2.10.10) и воспользуемся свойством ортогональности ТС (теорема 1.1) – получим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = \pi a_m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \pi b_m.$$

Если же почленно проинтегрировать само тождество (1.5), то получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi a_0.$$

Все равенства совпадают с п. 2 определения 1.5. ■

Замечание. Из определения 1.5 следует, что всякий РФ некоторой АИ функции является ТР. В обратную сторону это утверждение в общем случае неверно: поточечно сходящийся ТР может не быть РФ никакой АИ функции. Соответствующий контрпример будет приведен позже.

1.4. Теорема Римана об осцилляции. Необходимым условием равномерной на X сходимости функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x)$ является равномерное стремление $c_k(x) \rightrightarrows 0$ при $k \to \infty$ (теорема 2.10.7). Для ТР это утверждение равносильно следующему:

Лемма 1.6. *(необходимое условие равномерной сходимости ТР, $TS \sim f(TS)$) Если ТР (1.5) равномерно сходится на $[-\pi, \pi]$, то $a_k^2 + b_k^2 \to 0$ при $k \to \infty$.*

Задача. Докажите лемму 1.6.

Замечание. ТР является функциональным рядом, у которого слагаемые имеют стандартный вид – это косинусы и синусы определенной осцилляции. Поэтому все свойства ТР сводятся к свойствам числовой последовательности коэффициентов $a_0, a_1, b_1, ...$, что существенно облегчает исследование ТР и, следовательно, РФ.

В связи с леммой 1.6 возникает естественный вопрос: какой должна быть функция f, чтобы коэффициенты ее РФ стремились к нулю? Ответить на него помогает

Теорема 1.3. *(Римана) Если функция $f \in L_R(a, b)$, то*

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f(x) \cos kx dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f(x) \sin kx dx = 0, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Доказательство дадим для случая $k \to +\infty$. Чтобы понять, в чем смысл утверждения, рассмотрим сначала постоянную функцию $f(x) = 1$. Тогда

$$\Big| \int_a^b 1 \cdot \cos kx \ dx \Big| = \frac{1}{k} |\sin kb - \sin ka| \leqslant \frac{2}{k} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Но если взять $f(x) = f(x, k) = \cos kx$, то $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \ dx = \pi$. Т.е. смысл теоремы таков: **фиксированная** функция из пространства $L_R(a, b)$ при умножении на сильно осциллирующую функцию $\cos kx$ ведет себя как постоянная. Поэтому доказательство будет основано на выделении постоянной составляющей функции $f(x)$, фактически мы аппроксимируем данную функцию кусочно постоянной.

Рассмотрим случай, когда (a, b) – конечный интервал, а функция $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a, b]$. Согласно критерию интегрируемости (теорема 2.6.1 п. 2) существует разбиение отрезка интегрирования, для которого разность верхней и нижней сумм Дарбу сколь угодно мало: $\sum_{i=1}^{N} (M_i - m_i)\Delta x_i < \varepsilon/2$. Выделим указанную разность в исследуемом интеграле:

$$\Big| \int_a^b f(x) \cos kx \ dx \Big| = \Big| \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - m_i) \cdot \cos kx \ dx + \sum_{i=1}^{N} m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos kx \ dx \Big| \leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - m_i| \cdot |\cos kx| \ dx + \sum_{i=1}^{N} \frac{|m_i|}{k} |\sin kx_{i-1} - \sin kx_i| \leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{N} (M_i - m_i)\Delta x_i + 2N\frac{M}{k}, \quad \text{где } M = \sup_{[a,b]} |f(x)|.$$

Число M постоянно, а число $N = N(\varepsilon)$ зафиксировано после выбора разбиения отрезка $[a, b]$. Поэтому существует $k_0 = k_0(\varepsilon)$, что для всех $k > k_0$ справедлива оценка $2NM/k < \varepsilon/2$. Для таких k выполняется неравенство $\left|\int_a^b f(x)\cos kx\ dx\right| < \varepsilon$, что доказывает утверждение.

Рассмотрим общий случай, т.е. f АИ и имеет на произвольном промежутке конечное количество особенностей. Без ограничения общности считаем, что особенность одна – в b. В силу сходимости несобственного интеграла $\int_a^{\to b} |f(x)|dx$, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $b' \in (a, b)$, что f интегрируема по Риману на $[a, b']$ и $\int_{b'}^{\to b} |f(x)|dx < \varepsilon/2$. Поскольку для функций, интегрируемых по Риману, теорема доказана, то существует $k_0 = k_0(\varepsilon, b')$, что для всех $k > k_0$ справедлива оценка $\left|\int_a^{b'} f(x)\cos kx\ dx\right| < \varepsilon/2$. Для тех же значений k выполняется оценка

$$\left|\int_a^{\to b} f(x)\cos kx\ dx\right| \leqslant \left|\int_a^{b'} f(x)\cos kx\ dx\right| + \left|\int_{b'}^{\to b} f(x)\cos kx\ dx\right| <$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + \int_{b'}^{\to b} |f(x)|\ dx < \varepsilon. \ \blacksquare$$

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *($f \sim FS(f)$) Коэффициенты Фурье a_k, b_k функции $f \in L_R(-\pi, \pi)$ стремятся к нулю при $k \to \infty$.*

Замечание. Мы показали, что для произвольной АИ функции, во-первых, символический РФ существует (лемма 1.5) и, во-вторых, для полученного ТР выполнено необходимое условие равномерной сходимости. Но отсюда вовсе не следует, что ряд сходится хотя бы поточечно. А.Н. Колмогоров (1903-1987) привел пример АИ (по Лебегу, а не по Риману) функции, РФ которой расходится всюду!

§ 2. Сходимость ряда Фурье в точке

Хотя мы пришли к идее РФ в пространстве $L^2_R(-\pi,\pi)$ с **интегральной** нормой (1.3), оказывается РФ является тонким инструментом для **локального** исследования функции.

2.1. Ядро Дирихле и принцип локализации. Сходимость (любого вида!) РФ означает сходимость его частичных сумм

$$FS_n(f,x) := a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \tag{2.1}$$

где коэффициенты a_k, b_k вычисляются по формулам (1.6). Всюду ниже, учитывая замечание после формулировки теремы 1.2, мы будем понимать функции и ряды, заданные на $(-\pi,\pi)$, продолженными 2π-периодически на всю числовую ось. В исследовании частичных сумм РФ ключевую роль играет следующее понятие

Определение 2.1. **Ядром Дирихле** порядка n $(n = 0,1,2...)$ называют функцию

$$D_n(t) := \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + ... + \cos nt. \tag{2.2}$$

Лемма 2.1. *Ядро Дирихле*

1. *является четной, непрерывной, 2π-периодической функцией;*
2. *для всех n оно удовлетворяет неизменному условию нормировки*

$$\int_0^\pi D_n(t)dt = \frac{\pi}{2};$$

3.

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} \text{ при } t \neq 2\pi m; \quad D_n(t) = n + \frac{1}{2} \text{ при } t = 2\pi m \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Обсуждение. Из формулы п. 3 следует, что при больших значениях n ядро Дирихле сильно осциллирующая функция, амплитуда которой не меньше, чем $1/2$, и которая в точках $2\pi m$ принимает наибольшее значение $n + 1/2 \to \infty$ с ростом порядка ядра. (График ядра Дирихле см. на рис. ???) Ниже мы увидим, как все перечисленные свойства ядра влияют на сходимость РФ.

Рис. ???

Доказательство. Первое утверждение следует непосредственно из определения. Второе получается почленным интегрированием суммы (2.2). Третье утверждение следует из цепочки элементарных преобразований:

$$\text{при } t \neq 2\pi m \text{ произведение } 2\sin\frac{t}{2}\cdot D_n(t) = \sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{t}{2}\cos kt =$$

$$\sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\sin(k+\frac{1}{2})t - \sin(k-\frac{1}{2})t) = \sin(n+\frac{1}{2})t.$$

Если $t = 2\pi m$, то ответ получаем подстановкой. ∎

Лемма 2.2. *(об интегральных представлениях частичной суммы РФ) Пусть функция f 2π-периодическая и $f \in L_R(-\pi,\pi)$. Тогда для частичных сумм ее ряда Фурье справедливы представления*

$$FS_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt = \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (f(x+t)+f(x-t))D_n(t)dt. \tag{2.4}$$

Второе представление (2.4) называется ***интегралом Дирихле***

Обсуждение. Достоинство полученных формул в том, что частичная сумма ряда представлена в виде одного слагаемого, т.е. функциональный ряд заменен на функциональную последовательность. Отметим, что подынтегральное выражение представляет собой произведение двух сомножителей: первый – исследуемая функция, второй – ядро Дирихле (которое вообще от функции f не зависит!). Интеграл (2.3) от произведения двух функций, где в одном из сомножителей (любом!) имеется **сдвиг аргумента**, называют **сверткой** этих функций.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $x \in \mathbb{R}$. Воспользовавшись 2π-периодичностью функции f, сдвинем на x отрезок интегрирования в определении (1.6) коэффициентов ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(s)ds, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(s)\cos ksds,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(s)\sin ksds,\ k \in \mathbb{N}.$$

Следовательно,

$$FS_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(s)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\cos ks+\sin kx\sin ks\right)ds =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(s)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(s-x)\right)ds = \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(s)D_n(s-x)ds.$$

Применив замену $t = s-x$, мы сразу получим формулу (2.3). Воспользуемся четностью ядра Дирихле – после несложных преобразований получаем формулу (2.4):

$$FS_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x+t)D_n(t)dt + \int_{0}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{\pi} f(x-t)D_n(-t)dt + \int_{0}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (f(x+t)+f(x-t)D_n(t)dt. \blacksquare$$

В дальнейшем мы будем применять формулу (2.4) с учетом п. 3 леммы 2.1. С ее помощью мы выделим сейчас существенную часть частичной суммы РФ:

Лемма 2.3. *(о локализации интеграла Дирихле) Пусть функция f 2π-периодическая и $f \in L_R(-\pi, \pi)$. Тогда для любых фиксированных $\delta \in (0, \pi]$ и $x \in \mathbb{R}$ справедливо представление*

$$FS_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) dt + \varepsilon(n; x, \delta), \tag{2.5}$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon(n; x, \delta) = 0$.

Обсуждение. Из формулы (2.5) следует, что с ростом количества слагаемых в частичной сумме РФ вся информация о частичной сумме в точке x локализуется в сколь угодно малой δ-окрестности этой точки.

Доказательство. Разобьем промежуток интегрирования на два: $[0, \delta]$ и $[\delta, \pi]$. Оценим второе слагаемое, применив п. 3 леммы 2.1:

$$\varepsilon(x, n, \delta) := \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) dt =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_\delta^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{\sin \frac{t}{2}} \sin(n + \frac{1}{2})t \; dt.$$

На $[\delta, \pi]$ функция $\sin \frac{t}{2}$ непрерывна и отделена от нуля значением $|\sin(\delta/2)| > 0$, функция $f(x+t) + f(x-t)$ абсолютно интегрируема. Поэтому (лемма 1.1) функция $(f(x+t)+f(x-t))/\sin(t/2)$ также АИ. Из теоремы Римана 1.3 следует утверждение леммы. ■

Теперь мы можем сформулировать

Теорема 2.1. *(принцип локализации; $f \sim FS(f)$) Справедливы равносильные утверждения:*

1. *Пусть функция f 2π-периодическая и $f \in L_R(-\pi, \pi)$. Тогда для любого фикисрованного $\delta \in (0, \pi]$ в любой фиксированной точке $x \in \mathbb{R}$ совпадают пределы частичных сумм ряда Фурье и δ-локализованных интегралов Дирихле, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} FS_n(f, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta (f(x+t) + f(x-t)) D_n(t) dt;$$

если один из пределов отсутствует, то автоматически отсутствует и другой.

2. *Пусть функции f, g 2π-периодические и обе АИ на $(-\pi, \pi)$. Пусть функции совпадают $f(x) \equiv g(x)$ в некоторой δ-окрестности фиксированной точки $x \in \mathbb{R}$. Тогда в точке x ряды Фурье функций f и g сходятся или расходятся одновременно, а если сходятся, то к одинаковым значениям.*

Обсуждение. Хотя коэффициенты РФ определяются с помощью интегралов **на всем интервале** $(-\pi, \pi)$, оказалось, что наличие сходимости РФ в фиксированной точке (а в случае сходимости ряда – и его сумма) зависят только от поведения функции **в сколь угодно малой окрестности** исследуемой точки. Значит, РФ можно использовать для локального исследования функции подобно тому, как мы использовали ряд Тейлора.

Доказательство. П. 1 сразу следует из леммы 2.3.

Задача. Докажите равносильность п. 1 и п. 2 теоремы 2.1.

2.2. Достаточные условия сходимости РФ в точке.

Теорема 2.2. *(Улисс Дини, 1845 – 1918; $f \sim FS(f)$) Пусть 2π-периодическая функция $f \in L_R(-\pi,\pi)$. Пусть $A \in \mathbb{R}$ такое, что при некотором $\delta > 0$ сходится несобственный интеграл*

$$\int_{0\leftarrow}^{\delta} \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2A|}{t} dt < \infty. \tag{2.6}$$

Тогда РФ функции f сходится в точке x к числу A.

Обсуждение. Непосредственно проверить выполнение условий Дини непросто – для этого надо, по крайней мере, правильно выбрать число A. Однако описан (см. ниже) широкий класс функций, для которых условия теоремы выполнены, а число A не только найдено, но и связано со свойствами функции f в точке x.

Доказательство. В силу АИ функции f на $(-\pi,\pi)$ и непрерывности функции $1/t$ на $[\delta,\pi]$, подынтегральная функция АИ на (δ,π). Следовательно, подынтегральная функция АИ на $(0,\pi)$. В силу п. 2, 3 леммы 2.1 и формулы (2.4),

$$FS_n(f,x) - A = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2A}{2\sin\frac{t}{2}} \sin(n+\frac{1}{2})t\; dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2A}{t} \cdot \frac{t}{2\sin\frac{t}{2}} \cdot \sin(n+\frac{1}{2})t\; dt.$$

Первый слева сомножитель является АИ согласно условию теоремы. Второй сомножитель всюду непрерывен поскольку в нуле он имеет устранимую особенность: $\lim\limits_{t\to+0} t(2\sin t/2)^{-1} = 1$. Следовательно, произведение дробей есть АИ функция (лемма 1.1). Третий сомножитель – “сильно осциллирующий“ при $n \to \infty$ синус. В силу теоремы 1.3 Римана об осцилляции, интеграл стремится к нулю при $n \to \infty$. Т.е. $\lim\limits_{n\to+\infty} FS_n(f,x) = A$. ■

Обсуждение. В доказательстве существенно использованы свойства ядра Дирихле, перечисленные в лемме 2.1: свойство 2 позволяет представить постоянную A в интегральном виде, а свойство 3 обосновывает абсолютную интегрируемость подынтегральной функции и обнуляет интеграл в результате предельного перехода $n \to \infty$.

В связи с теоремой Дини возникает вопрос: как связано число A со значением $f(x)$? Ответ на него зависит от поведения функции в окрестности точки x. Нас интересуют следующие типы точек.

Определение 2.2. Точку $x \in \mathbb{R}$ назовем **точкой скачка производной** для функции f, если

1. в x функция f непрерывна;
2. в точке x существуют конечные односторонние производные

$$f'_{\pm}(x) := \lim_{t\to+0} \frac{f(x\pm t)-f(x)}{\pm t} \in \mathbb{R},$$

где все знаки берутся или "+", или все "−".

Точку $x \in \mathbb{R}$ назовем **точкой разрыва и скачка производной** для функции f, если

1. в x функция f претерпевает разрыв первого рода;
2. в точке x существуют конечные односторонние производные

$$f'_{\pm}(x) := \lim_{t\to+0} \frac{f(x\pm t)-f(x\pm 0)}{\pm t} \in \mathbb{R},$$

где все знаки берутся или "+", или все "−".

На рис. ??? x_1 – точка скачка производной, x_2 – точка разрыва и скачка производной. В обоих случаях графики имеют полукасательные в точках $(x_i, f(x_i \pm 0))$ $(i = 1, 2)$.

Рис. ???

Следствие 2.1. *(о сходимости РФ к полусумме односторонних пределов; $f \sim FS(f)$) Пусть 2π-периодическая функция $f \in L_R(-\pi,\pi)$. Пусть x точка разрыва и скачка производной. Тогда РФ функции f сходится в точке x к числу $A = (f(x+0)+f(x-0))/2$.*

Доказательство. Возьмем значение $A = (f(x+0)+f(x-0))/2$ и покажем, что в условиях следствия интеграл Дини (2.6) сходится. В самом деле, для любого $\delta' \in (0,\delta)$ интеграл Дини на **отрезке** $[\delta',\delta]$ существует как собственный в силу АИ функции f и непрерывности функции $1/t$. Из определения точки разрыва и скачка призводной имеем на $(0,\delta]$ равномерную оценку подынтегральной функции из интеграла Дини:

$$\frac{|f(x+t)+f(x-t)-2A|}{t} \leqslant \frac{|f(x+t)-f(x+0)|}{t} + \frac{|f(x-t)-f(x-0)|}{t} \leqslant$$

$$|f'_+(x)| + \frac{|o(t)|}{t} + |f'_-(x)| + \frac{|o(t)|}{t} < \infty.$$

В силу теоремы 2.8.7, несобственный интеграл Дини сходится. ■

Следствие 2.2. *(о сходимости РФ к значению функции в точке; $f \sim FS(f)$) Пусть 2π-периодическая функция $f \in L_R(-\pi,\pi)$. Пусть x точка гладкости или точка скачка производной. Тогда РФ функции f сходится в точке x к ее значению $f(x)$.*

Доказательство. В условиях следствия 2.2 выполнены все требования предыдущего следствия 2.1, поэтому, в силу непрерывности f в точке x, РФ сходится к $A = (f(x+0)+f(x-0))/2 = f(x)$. ■

Определение 2.3. Функцию f назовем **разрывно кусочно-гладкой** (РКГ) на $[a,b]$, если она кусочно непрерывная и кусочно гладкая, т.е. существует разбиение отрезка $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_I = b$, обладающее такими свойствами:

1. $f \in C^1(x_i, x_{i+1})$ для каждого $i = 0, ..., I-1$;
2. точки x_i являются для f или точками скачка призводной, или точками разрыва и скачка производной.

Функцию f назовем **кусочно-гладкой** (КГ) на $[a, b]$, если упомянутые точки x_i являются только точками скачка производной, т.е. функция всюду непрерывная.

Примеры. Функция $f(x) = sign(x)$ является разрывно кусочно-гладкой на $[-1, 1]$, а функция $f(x) = |x|$ – кусочно-гладкой на $[-1, 1]$.

Задача. Докажите, что график кусочно-гладкой функции является кусочно-гладкой кривой.

Из следствий 2.1 и 2.2 сразу получаем

Следствие 2.3. *(о поточечной сходимости РФ к полусумме односторонних пределов; $f \sim FS(f)$) Пусть 2π-периодическая функция f разрывно кусочно-гладкая на $[-\pi, \pi]$. Тогда РФ функции f сходится в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ к числу $A = (f(x+0) + f(x-0))/2$. В частности, в точках непрерывности разрывно кусочно-гладкой функции РФ сходится к соответствующим значениям функции. Если же 2π-периодическая функция f кусочно-гладкая, то ее РФ сходится к ней всюду.*

Замечание 1. Доказанное достаточное условие сходимости РФ к значению функции в точке является частным случаем "условия Липшица" (Рудольф Отто Липшиц, 1832-1903). Оказывается, непрерывность и **локальная монотонность** функции (условия Дирихле) также являются достаточными для сходимости РФ к $f(x)$. Причем, условия Дини-Липшица и условия Дирихле независимы!

Замечание 2. Оставить в теоремах о сходимости РФ только требование непрерывности функции нельзя. Обнаружены непрерывные периодические функции, РФ которых расходятся в некоторых точках.

Замечание 3. Ниже мы увидим, что к периодической кусочно-гладкой функции ее РФ сходится не только всюду поточечно, но и равномерно на всей оси.

2.3. РФ четных и нечетных функций, РФ функций произвольного периода, комплексная форма РФ.

Лемма 2.4. *($f \sim FS(f)$) Если функция $f \in L_R(-\pi, \pi)$ и четна, то ее КФ $b_k = 0$ ($k \in \mathbb{N}$). Если функция нечетна, то ее КФ $a_{k-1} = 0$ ($k \in \mathbb{N}$).*

Задача. Докажите лемму 2.4.

Из леммы 2.4 следует, что функцию, заданную на полупериоде $[0, \pi]$, можно раскладывать или только по косинусам, или только по синусам. Пусть $f \in L_R(0, \pi)$. Продолжим ее четным образом: $f(x) := f(-x)$, если $x \in (-\pi, 0)$. Затем продолжим ее на $\mathbb{R}$ с периодом 2π. Как определена функция в точке $x = 0$ не принципиально – на сходимость РФ одна точка не влияет. Полученная функция АИ на $(-\pi, \pi)$, поэтому ей отвечает (символьный) РФ по косинусам. Если же мы захотим продолжить функцию f нечетным образом, то сначала нам нужно переопределить ее в нуле: $f(0) := 0$. После чего полагаем

$f(x) := f(x)$ для $x \in (-\pi, 0)$ и продолжаем на всю ось с периодоим 2π. Полученной функции отвечает РФ по синусам. Сходимость описанных рядов можно выяснить с помощью утверждений п. 2.2

Пример. Пусть $f(x) = x^2 + 1$ на $[0, \pi]$. Продолжая функцию нечетным образом, мы получаем разрывно кусочно-гладкую функцию с двумя особыми точками $x_0 = -\pi$, $x_1 = 0$. В особых точках РФ по синусам сходится к нулю, во всех остальных точках – к $f(x)$. На рис. ??? изображен график $FS(f)$.

Рис. ???

Если функция задана на четверти периода $[0, \pi/2]$, то ее можно продолжить двумя симметричными способами на $(\pi/2, \pi)$, а затем каждое из продолжений продолжить двумя способами на $(-\pi, 0)$ – всего четыре способа. Все случаи проиллюстрированы (рис. ???) и описаны в таблице:

$x \in (0, \pi/2)$	$x \in (0, \pi)$	обнуление, $k \in \mathbb{N}$	система
$f(\pi - x) = f(x)$	$f(-x) = f(x)$	$a_{2k-1} = 0,\ b_k = 0$	$\{\cos 2(k-1)x\}$
$f(\pi - x) = f(x)$	$f(-x) = -f(x)$	$a_{k-1} = 0,\ b_{2k} = 0$	$\{\sin(2k-1)x\}$
$f(\pi - x) = -f(x)$	$f(-x) = f(x)$	$a_{2(k-1)} = 0,\ b_k = 0$	$\{\cos(2k-1)x\}$
$f(\pi - x) = -f(x)$	$f(-x) = -f(x)$	$a_{k-1} = 0,\ b_{2k-1} = 0$	$\{\sin 2kx\}$

Рис. ???

Задача. Докажите справедливость хотя бы одного из утверждений в столбце “обнуление”.

Если функция f $2l$-периодична ($l > 0$) и $f \in L_R(-l, l)$, то после замены $x \to \pi x/l$ из тригонометрической системы (1.4) получаем систему

$$1 \equiv \cos(0x),\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \dots\ \cos\frac{\pi k x}{l},\ \sin\frac{\pi k x}{l}, \dots,\ \text{где } k \in \mathbb{N},$$

а из формул (1.6) коэффициентов Фурье получаем формулы

$$a_0 := \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,\ a_k := \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi k x}{l}dx,\ b_k := \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx.$$

После чего все утверждения переносятся без изменений на случай $2l$-периодичности.

Используя формулы Эйлера, связывающие тригонометрические функции с комплексной экспонентой, мы получаем следующие выражение для частичной суммы ряда Фурье:

$$FS_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} + b_k\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right) =$$

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k - ib_k}{2}e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2}e^{-ikx}\right) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\ ,$$

где $c_0 = a_0$, $c_k = (a_k - ib_k)/2$, $b_k = (a_k + ib_k)/2$ ($k \in \mathbb{N}$). Теперь сам РФ и его коэффициенты, учитывая определение (1.6), приобретают вид:

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},\ \text{где } c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx. \tag{2.7}$$

§ 3. Почленные действия с рядом Фурье

В общей теории функциональных рядов мы выяснили, как равномерная сходимость влияет на возможность почленных действий с рядом: переход к пределу, интегрирование, дифференцирование (теоремы 2.10.9-2.10.11). Сейчас мы ответим на другой вопрос: будет ли ряд, полученный после почленных действий, рядом Фурье, а если ответ утвердительный, то для какой функции?

3.1. Почленное дифференцирование и интегрирование РФ. Сразу заметим, из теоремы 1.2 вытекает

Следствие 3.1. *($f \sim FS(f)$) Если 2π-периодическая функция $f \in L_R(-\pi,\pi)$ и ее РФ* ***сходится равномерно*** *на $[-\pi,\pi]$, то*

1. *он всюду сходится именно к f и функция f* ***непрерывна*** *на $\mathbb{R}$;*
2. *переход к пределу в любой т. $x_0 \in \mathbb{R}$ можно осуществлять почленно:*

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k \sin kx\right) =$$

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx_0 + b_k\sin kx_0.$$

Обсуждение. Утверждение следствия означает, что тип сходимости РФ позволяет уточнять свойства функции, которая РФ породила.

Теорема 3.1. *(о почленном дифференцировании РФ; $f \sim FS(f)$) Пусть функция f 2π-периодическая и кусочно-гладкая на $[-\pi,\pi]$. Пусть*

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx$$

ее разложение в РФ. Тогда ряд Фурье ее производной f' получается формальным дифференцированием:

$$f' \sim \sum_{k=1}^{\infty} -ka_k\sin kx + kb_k\cos kx.$$

Обсуждение. Ряд данной функции сходится к ней по крайней мере поточечно в силу следствия 2.3. Ряд, полученный формальным дифференцированием, является символическим РФ – мы не можем даже утверждать, что он сходится поточечно.

Доказательство. Поскольку производная f' кусочно-непрерывная функция, у нее существует символический РФ, т.е. у нее определены коэффициенты Фурье α_k, β_k. Найдем связь между КФ данной функции и ее производной. Обоснуем возможность интегрирования по частям в формулах (1.6). Поскольку функция f непрерывна, а f' – кусочно-непрерывна, отрезок инегрирования разбивается на конечное количество подотрезков точками разрыва производной f'. На каждом из подотрезков применяется формула интегрирования по частям, после чего полученные равенства складываются: лишние слагаемые взаимно уничтожаются в силу непрерывности и периодичности, а к интегралам на подотрезках применяется свойство аддитивности интеграла Римана (проверьте все выкладки на одной особой точке). Итак:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\ dx = -\frac{1}{\pi k} f(x)\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\ dx = \frac{1}{k}\alpha_k.$$

Аналогично для $k \in \mathbb{N}$ справедливо $a_k = -\beta_k/k$. Получаем:

$$\alpha_k = kb_k,\ \beta_k = -ka_k \text{ для всех } k \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Из условия периодичности $f(-\pi) = f(\pi)$ следует, что

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\ dx = \frac{1}{2\pi}(f(\pi) - f(-\pi)) = 0.$$

Поэтому РФ производной есть

$$f' \sim \sum_{k=1}^{\infty} k(b_k \cos kx - a_k \sin kx) = (a_0)' + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)'. \ \blacksquare$$

Теорема 3.2. *(о почленном интегрировании РФ; $f \sim FS(f)$) Пусть функция f кусочно-непрерывная на $[-\pi, \pi]$ и*

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

ее РФ. Тогда для любого $x \in [-\pi, \pi]$ справедлива формула почленного интегрирования РФ:

$$\int_0^x f(t)dt - \int_0^x a_0 dt = \int_0^x f(t)dt - a_0 x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x (a_k \cos kt + b_k \sin kt)\ dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}\sin kx + \frac{b_k}{k}(1 - \cos kx),$$

где ряд в правой части сходится по крайней мере поточечно.

Обсуждение. В теореме 3.2, в противоположность теореме 3.1, исходный РФ является символическим и в общем случае не является сходящимся. После интегрирования мы получаем, во-первых, некоторый сходящийся РФ, во-вторых, он сходится именно к той функции, которой порожден, а именно, к функции $F(x) = \int_0^x f(t)dt - a_0 x$.

Доказательство. Итак, рассмотрим функцию $F(x) := \int_0^x (f(t) - a_0)dt$. Она непрерывна и (см. определение коэффициента a_0) $F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt - 2\pi a_0 = 0$. Кроме того, ее можно дифференцировать всюду, кроме конечного количества точек разрыва функции f, и $F'(x) = f(x) - a_0$. Итак, к функции F применимо следствие 2.3 и теорема 3.1:

1. функция $F(x)$ равна сумме своего РФ:

$$F(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx,$$

где A_k, B_k – КФ функции $F(x)$;
2. коэффициенты Фурье функций F и $f(x) - a_0$ связаны соотношениями:

$$A_k = -\frac{b_k}{k}, \quad B_k = \frac{a_k}{k} \text{ для всех } k \in \mathbb{N}.$$

Чтобы найти A_0, положим $x = 0$, тогда $F(0) = 0$ и

$$0 = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \;\Rightarrow\; A_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}.$$

Остается подставить полученные выражения в формулу РФ функции F. ■

3.2. Порядок убывания коэффициентов РФ и равномерная сходимость РФ. До сих пор мы получали только условия, гарантирующие поточечную сходимость РФ. Общая теория функциональных рядов и теорема 1.2 показывают, насколько проще обращаться с РФ, если фон сходиться равномерно. Оценить “скорость” сходимости РФ можно в терминах убывания его коэффициентов, после чего получить достаточные условия равномерной сходимости.

Лемма 3.1. *(о порядке убывания КФ разрывно кусочно-гладкой функции) Пусть функция f РКГ на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда коэффициенты Фурье функции f убывают обратно-пропорционально их номеру, т.е.:*

$$|a_k| + |b_k| = O\left(\frac{1}{k}\right) \;\Leftrightarrow\; \exists C > 0 : \;\forall k \in \mathbb{N} \;\hookrightarrow\; |a_k| + |b_k| < \frac{C}{k}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Из кусочной непрерывности f и f' следует их ограниченность:

$$\exists C_0, C_1 > 0 : \;\forall x \in [-\pi, \pi] \;\hookrightarrow\; |f(x)| < C_0, \; |f'(x)| < C_1.$$

Если $-\pi = x_0 < x_1 < ... < x_I = \pi$ – точки разрывов функции f, то, как было показано выше, на каждом интервале непрерывности f можно применить интегрирование по частям

$$|b_k| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx \; dx\right| = \frac{1}{\pi k}\left|\sum_{i=1}^{I}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \; d\cos kx\right| =$$

$$\frac{1}{\pi k}\left|\sum_{i=1}^{I}\left(f(x)\cos kx\Big|_{x_{i-1}+0}^{x_i-0} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)\cos kx \; dx\right)\right| \leqslant$$

$$\frac{1}{\pi k}\left(2C_0 I + 2\pi C_1\right).$$

Значит, $b_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$. Оценка $a_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$ доказывается аналогично. ■

Теорема 3.3. *(о порядке убывания КФ и остатка РФ)*

1. *Пусть у 2π-периодической функции f производные порядков q и $q+1$ кусочно-непрерывны на $[-\pi, \pi]$ $(q = 0, 1, ...)$, а она сама и все ее предыдущие производные до порядка $q-1$ непрерывны на $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяют условию периодичности $f^{(i)}(-\pi) = f^{(i)}(\pi)$ $(i = 0, 1, ..., q-1)$. Тогда имеет место следующая оценка убывания КФ функции f с ростом номера:*
$$|a_k| + |b_k| = O\left(\frac{1}{k^{q+1}}\right) \Leftrightarrow \exists C > 0 : \ \forall k \in \mathbb{N} \ \hookrightarrow \ |a_k| + |b_k| < \frac{C}{k^{q+1}}. \quad (3.3)$$
2. *При тех же условиях справедлива следующая оценка убывания остатка РФ $r_n(x) := \sum_{n+1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$:*
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |r_n(x)| = O\left(\frac{1}{n^q}\right).$$

Доказательство п. 1. Заметим, что при $q = 0$ функция и ее первая производная кусочно непрерывны, т.е. функция разрывно кусочно-гладкая. Значит, мы находимся в условиях леммы 3.1 – утверждение леммы 3.1 есть п. 1 теоремы. Рассмотрим общий случай $q \in \mathbb{N}$. Вплоть до порядка дифференцирования $q-1$ к функции $g_p(x) = f^{(p)}(x)$ $(p = 0, 1, ..., q-1)$ можно применять теорему 3.1 о почленном дифференцировании. Обозначим через $a_k^{(p)}, b_k^{(p)}$ КФ функции $g_p(x)$, тогда (согласно (3.1))
$$|a_k| + |b_k| = \frac{1}{k}(|a_k^{(1)}| + |b_k^{(1)}|) = \frac{1}{k^2}(|a_k^{(2)}| + |b_k^{(2)}|) = ... = \frac{1}{k^q}(|a_k^{(q)}| + |b_k^{(q)}|). \quad (3.4)$$
С другой стороны, применяя к функции $g_q(x) = f^{(q)}(x)$ лемму 3.1, получаем (см. (3.2)) оценку $|a_k^{(q)}| + |b_k^{(q)}| = O(1/k)$. Что доказывает (3.3).

Из полученной оценки следует искомая оценка остатка РФ:
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |r_n(x)| \leqslant C \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{q+1}} \leqslant C \int_n^{\infty} \frac{dt}{t^{q+1}} = \frac{C}{q} \frac{1}{n^q} = O\left(\frac{1}{n^q}\right). \ \blacksquare$$

Из теоремы сразу получаем

Следствие 3.2. *(достаточные условия равномерной сходимости РФ) Если в условиях теоремы 3.3 $q \geqslant 1$, то РФ сходится к функции f равномерно на $\mathbb{R}$.*

Замечание. Сейчас мы получили равномерную сходимость РФ при условии существования кусочно-непрерывной второй производной. Позже мы усилим этот результат.

§ 4. Усреднение РФ методом Фейера

Мы приняли к сведению, что РФ непрерывной функции может расходиться в некоторых точках. Оказывается, существуют методы усреднения, которые улучшают сходимость последовательности. В частности, мы рассмотрим метод, который из РФ конструирует функциональную последовательность равномерно сходящуюся к данной непрерывной функции.

4.1. Предварительные утверждения. Рассмотрим две числовые последовательности: данную $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и последовательность средних арифметических $\sigma_n := (a_1 + ... + a_n)/n$ ее первых членов.

Лемма 4.1. *(Коши о сходимости средних арифметических) Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходящаяся, то к этому же пределу сходится последовательность средних арифметических:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \sigma_n = a.$$

Доказательство. По произвольному $\varepsilon > 0$ выберем номер n_0, для которого $|a_k - a| < \varepsilon/2$ для всех $k > n_0$. Оценим разность

$$|\sigma_n - a| = \left|\frac{a_1 + ... + a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_n}{n} - a\right| =$$

$$\left|\frac{a_1 + ... + a_{n_0} - n_0 a}{n} + \frac{(a_{n_0+1} - a) + ... + (a_n - a)}{n}\right| \leqslant$$

$$\frac{|a_1 + ... + a_{n_0} - n_0 a|}{n} + \frac{|(a_{n_0+1} - a) + ... + (a_n - a)|}{n}.$$

Поскольку номер n_0 зафиксирован, числитель первой дроби $|a_1 + ... + a_{n_0} - n_0 a| = const$. Значит, существует такой номер m_0, что для всех $n > m_0$ верно: $|a_1 + ... + a_{n_0} - n_0 a|/n < \varepsilon/2$. Оценим вторую дробь:

$$\frac{|(a_{n_0+1} - a) + ... + (a_n - a)|}{n} \leqslant \frac{|a_{n_0+1} - a| + ... + |a_n - a|}{n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{n - n_0}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, для всех $n > \max\{n_0, m_0\}$ имеет место оценка $|\sigma_n - a| < \varepsilon$. ■

В обратную сторону утверждение неверно!

Пример расходящейся последовательности, у которой последовательность средних арифметических сходится:

$$a_n = (-1)^n, \quad \sigma_1 = \frac{-1}{1},\ \sigma_2 = \frac{0}{2},\ \sigma_3 = \frac{-1}{3}, ... \to 0.$$

Применим метод усреднения к последовательности частичных сумм РФ и соответствующих ядер Дирихле:

Определение 4.1. Пусть $f \in L_R(-\pi, \pi)$.

1. **Суммами Фейера** (Липот Фейер, 1880 – 1959) $\Sigma_n(f, x)$ функции f называют средние арифметические сумм Фурье $FS_n(f, x)$ этой же функции:

$$\Sigma_n(f, x) := \frac{FS_0(f, x) + ... + FS_n(f, x)}{n + 1}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

2. **Ядрами Фейера** называют средние арифметические ядер Дирихле $D_n(x)$:
$$\Phi_n(t) := \frac{D_0(t) + ... + D_n(t)}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Для ядер Фейера и сумм Фейера имеют место аналоги лемм 2.1 и 2.2.

Лемма 4.2. *Ядро Фейера*

1. *для всех n удовлетворяет неизменному условию нормировки*
$$\int_0^\pi \Phi_n(t)dt = \frac{\pi}{2};$$
2. $$\Phi_n(t) = \frac{\sin^2 \frac{(n+1)t}{2}}{2(n+1)\sin^2 \frac{t}{2}} \text{ при } t \neq 2\pi m,$$
$$\Phi_n(t) = \frac{n+1}{2} \text{ при } t = 2\pi m \quad (m \in \mathbb{Z});$$
3. *является четной, неотрицательной, непрерывной, 2π-периодической функцией;*
4. $$\forall \delta \in (0, \pi] \ \hookrightarrow \ \max_{t \in [\delta, \pi]} \Phi_n(t) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Обсуждение. Сравнивая со свойствами ядер Дирихле, мы видим, что сохранились такие свойства: нормировка, четность, периодичность, непрерывность, выраженный максимум в точках $2\pi m$ того же первого порядка по n. Однако осциллируемость неубывающей амплитуды сменилась неотрицательной колеблемостью, амплитуда которой обратно пропорциональна номеру n ядра. (График ядра Фейера см. на рис. ???) Оказывается, измененные свойства ядра улучшают сходимость!

Рис. ???

Лемма 4.3. *(об интегральном представлении суммы Фейера) Пусть f – 2π-периодическая функция и $f \in L_R(-\pi, \pi)$. Тогда для ее сумм Фейера справедливо представление*
$$\Sigma_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t))\Phi_n(t)dt. \tag{4.1}$$

Обсуждение. Интегральное представление сумм Фейера имеет такой же вид, что и представление (2.4) сумм Дирихле.

Замечание. Суммы Фейера не являются (в общем случае) частичными суммами какого-либо ряда; они образуют функциональную последовательность.

Доказательство леммы 4.2. П. 1: усреднение константы есть константа (убедитесь самостоятельно!) П. 2 доказывается по определению тем же методом, что и формула ядра Дирихле. Пп. 3 и 4 сразу следуют из п. 2.

Доказательство леммы 4.3 следует из определения ядер Фейера, формулы Дирихле (2.4) и линейности интеграла.

4.2. Равномерная аппроксимация непрерывной периодической функции. Нам потребуется

Лемма 4.4. *(о равномерной непрерывности периодической функции) Непрерывная T-периодическая функция f равномерно непрерывна на всей оси.*

Доказательство. Из теоремы 2.3.8 Кантора о равномерной непрерывности на компакте следует, что на отрезке $[0,T]$ функция f равномерно непрерывна:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in (0,T):\ \forall x_1, x_2 \in [0,T]\ \wedge\ 0 < x_2 - x_1 < \delta\ \hookrightarrow\ |f(x_2) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $0 < x_2 - x_1 < \delta$. Возможны два случая. Первый: существует такое $n \in \mathbb{Z}$, что $nT \leqslant x_1 < x_2 \leqslant (n+1)T$ (см. рис. ???). Тогда $0 \leqslant x_1 - nT < x_2 - nT \leqslant T$ и, в силу периодичности,

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f(x_2 - nT) - f(x_1 - nT)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Рис. ???

Второй случай: существует такое $n \in \mathbb{Z}$, что $nT \leqslant x_1 < (n+1)T < x_2 \leqslant (n+2)T$, рис. ??? . Тогда, в силу периодичности,

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f(x_2 - (n+1)T) - f(x_1 - nT)| \leqslant$$

$$|f(x_2 - (n+1)T) - f(0)| + |f(T) - f(x_1 - nT)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \blacksquare$$

Теорема 4.1. *(Фейера об аппроксимации) Непрерывная 2π-периодическая функция f аппроксимируется своими суммами Фейера равномерно на всей оси:*

$$\Sigma_n(f,x)\ \rightrightarrows\ f(x)\ \text{на}\ \mathbb{R}\ \text{при}\ n \to \infty.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.2 Дини. Воспользуемся свойством нормировки, неотрицательностью ядра Фейера (пп. 1 и 3 леммы 4.2) и интегральным представлением (4.1) сумм Фейера, чтобы оценить разность суммы Фейера и значение функции:

$$\Delta_n(x) := |\Sigma_n(f,x) - f(x)| = \frac{1}{\pi}\Big|\int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t) - 2f(x))\Phi_n(t)\ dt\Big| \leqslant$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|\Phi_n(t)\ dt.$$

Пусть $\delta \in (0,\pi)$. Введем в рассмотрение интегралы

$$Int_{<\delta} := \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|\Phi_n(t)dt,$$

$$Int_{>\delta} := \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|\Phi_n(t)dt.$$

Тогда $\Delta_n = Int_{<\delta} + Int_{>\delta}$. Параметр δ имеет техническое назначение. Нам предстоит так подобрать номер n, чтобы получить оценку малости разности Δ_n не взирая на δ.

Обозначим супремум колебания функции на δ-отрезке через

$$\omega(\delta) := \sup_{|x_1 - x_2| \leqslant \delta} |f(x_2) - f(x_1)|, \text{ где } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

В силу леммы 4.4, $\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Оценим $Int_{<\delta}$, сравнив значение функции $f(x)$ с отклонениями $f(x \pm t)$:

$$Int_{<\delta} = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta |(f(x+t) - f(x)) + (f(x-t) - f(x))| \Phi_n(t) dt \leqslant$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\delta (|f(x+t) - f(x)| + |f(x-t) - f(x)|) \Phi_n(t) dt \leqslant$$

$$\frac{2\omega(\delta)}{\pi} \int_0^\delta \Phi_n(t)\ dt \leqslant \frac{2\omega(\delta)}{\pi} \int_0^\pi \Phi_n(t)\ dt \leqslant \omega(\delta) < \frac{\varepsilon}{2},$$

если $\delta = \delta(\varepsilon)$ достаточно мало. (Мы еще раз воспользовались неотрицательностью и свойством нормировки ядра Фейера.)

Чтобы оценить $Int_{>\delta}$, воспользуемся 2π-периодичностью и непрерывностью функции f и введем $M := \max_{\mathbb{R}} |f(x)| = \max_{[-\pi,\pi]} |f(x)|$. Тогда

$$Int_{>\delta} \leqslant \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \Phi_n(t) dt \leqslant$$

$$\frac{4M}{\pi} \cdot \max_{t \in [\delta, \pi]} \Phi_n(t) \cdot \pi \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

для уже выбранного δ, если $n = n(\delta(\varepsilon)) = n(\varepsilon)$ достаточно велико (в силу п. 4 леммы 4.2).

Мы показали, что $\Delta_n(x) < \varepsilon$ для всех достаточно больших n равномерно для всех $x \in \mathbb{R}$. ■

Обсуждение. Еще раз обращаем внимание, что доказательство теоремы Фейера опирается на специфические свойства ядра: неограниченно растущий максимум в окрестности нуля, "почти обнуление" вне малой окрестности нуля и неизменность нормировки при всех n. Именно эти свойства лежат в основе понятия δ-функции Дирака, которую мы рассмотрим позже.

4.3. Аппроксимация непрерывных функций многочленами. В качестве следствия теоремы Фейера мы докажем аппроксимационные теоремы Вейерштрасса.

Определение 4.2. Тригонометрическим многочленом (ТМ) степени n называют сумму

$$T_n(x) := A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx$$

при условии $A_n^2 + B_n^2 > 0$.

Теорема 4.2. *(Первая теорема Вейерштрасса об аппроксимации ТМ) Пусть функция $f \in C^0[-\pi,\pi]$ и удовлетворяет условию периодичности $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой ТМ $T_n(x)$, который равномерно на отрезке $[-\pi,\pi]$ аппроксимирует $f(x)$ с точностью до ε, т.е.*

$$\max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - T_n(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Благодаря условию периодичности функцию f можно непрерывно доопределить на всю числовую ось Теперь в качестве искомого многочлена можно взять сумму Фейера $\Sigma_n(f,x)$ функции f с достаточно большим n. В самом деле, сумма Фейера является линейной комбинацией сумм Фурье, значит это ТМ. А из теоремы 4.1 Фейера следует, что с помощью номера n можно добиться произвольной ε-аппроксимации. ■

Теорема 4.3. *(Вторая теорема Вейерштрасса об аппроксимации многочленами) Пусть функция $f \in C^0[a,b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, который равномерно на отрезке $[a,b]$ аппроксимирует $f(x)$ с точностью до ε, т.е.*

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Замена независимой переменной

$$x = a + \frac{b-a}{\pi}t, \quad t \in [0,\pi], \quad x \in [a,b]$$

преобразует данную функцию в функцию $\varphi(t) := f(x(t))$, которая определена и непрерывна на $[0,\pi]$. Продолжим функцию φ на $[-\pi,0]$ четным образом – получим функцию $\varphi(t)$ непрерывную на $[-\pi,\pi]$ и удовлетворяющую условию периодичности $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$. В силу первой теоремы Вейерштрасса, существует такой ТМ $T_m(t)$, что

$$\max_{t\in[-\pi,\pi]} |\varphi(t) - T_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ТМ $T_m(t)$ есть конечная линейная комбинация косинусов и синусов. Каждое из слагаемых ТМ раскладывается равномерно на $[-\pi,\pi]$ в ряд Маклорена (это следует из теоремы 2.12.4 и теоремы Абеля о равномерной сходимости степенного ряда). Поэтому весь ТМ $T_m(t)$ аппроксимируется равномерно на $[-\pi,\pi]$ частичными суммами $Q_n(t)$ указанного ряда Маклорена с любой точностью:

$$\max_{t\in[-\pi,\pi]} |Q_n(t) - T_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$\max_{t\in[-\pi,\pi]} |\varphi(t) - Q_n(t)| < \varepsilon.$$

Осуществляя обратную замену $t = \pi(x-a)/(b-a)$, получаем

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - Q_n\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a}\right)| < \varepsilon.$$

Но $P_n(x) := Q_n(\pi(x-a)/(b-a))$ – это многочлен той же степени n. Он дает нам искомую аппроксимацию. ■

§ 5. Метрические и нормированные пространства

Происхождение РФ мы позаимствовали из разложения вектора в конечномерном евклидовом пространстве. Ортогональную систему тригонометрических функций мы обнаружили в функциональном пространстве $L^2_R(-\pi,\pi)$. Разложение в РФ мы применяли к функциям, обладающим разными свойствами: АИ, непрерывным, кусочно-гладким, разрывно кусочно-гладким и др. Сейчас мы переходим к изучению РФ с точки зрения функциональных пространств. Т.е. мы применим к РФ методы функционального анализа (ФА). Лекция имеет обзорный характер. Доказательства лишь намечены, многие даны в виде задач. Ее цель – ознакомить с первоначальными многочисленными понятиями и утверждениями, лежащими в основе ФА.

5.1. Метрические пространства. Начнем с обсуждения одной из самых простых структур ФА.

Определение 5.1. **Метрическим пространством** (МП) называется множество M, на котором определена **метрика**, т.е. функция, сопоставляющая произвольной паре элементов $(x,y)\in M\times M$ неотрицательное число $\rho(x,y)\geqslant 0$ и удовлетворяющая для любых $x,y,z\in M$ аксиомам МП:

1. тождественности: $\rho(x,y)=0 \;\Leftrightarrow\; x=y$;
2. симметричности: $\rho(x,y)=\rho(y,x)$
3. неравенству треугольника: $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$.

Значение $\rho(x,y)$ называется **расстоянием** между элементами.

Обозначение. Если важно напомнить, в какой метрике рассматривается множество M, метрическое пространство обозначают (M,ρ).

Примеры (см. рис. ???):

1. числовая прямая $\mathbb{R}$ с $\rho(x,y)=|x-y|$;
2. множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел с $\rho(x,y)=|x-y|$;
3. комплексная прямая $\mathbb{C}$ с $\rho(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$;
4. евклидова плоскость, на которой расстояние между точками A и B равно длине соединяющего их отрезка: $\rho(A,B)=|AB|$;
5. окружность, на которой расстояние между точками равно длине соединяющего их отрезка (хорды): $\rho_1(A,B)=|AB|$;
6. окружность, на которой расстояние между точками равно длине меньшей дуги окружности, соединяющей точки: $\rho_2(A,B)=|\widetilde{AB}|$.

Поскольку в примерах 5 и 6 метрика определяется по-разному, это разные метрические пространства: $(S^1,\rho_1)\neq(S^1,\rho_2)$.

Рис. ???

Задача. Во всех примерах проверьте выполнение аксиом МП.

В МП вводятся понятия **шара и сферы**.

Задача. Самостоятельно дайте определения открытого (замкнутого) шара $Ball(x,R)$ ($\overline{Ball}(x,R)$) с центром в точке x радиуса R и сферы $S(x,R)$. Опишите и изобразите шар и сферу в приведенных примерах 1-6.

Открытый шар $Ball(x,R)$ называют **окрестностью** x, а $Ball(x,R)\setminus\{x\}$ – **проколотой окрестностью**.

Пусть $X \subset M$ – подмножество метрического пространства M. Как и в теории арифметических n-мерных пространств (п. 2.1.2) вводятся понятия дополнения $X^C \subset M$ к X и типов точек по отношению к X (внутренняя, прикосновения, предельная, изолированная, граничная). Затем определяются типы подмножеств (открытое, замкнутое, ограниченное, компактное) и подмножества, порожденные X (внутренность X^0, замыкание $\overline{X}$, граница ∂X).

Задача. Сформулируйте (или повторите) все названные определения.

Нам понадобится

Лемма 5.1. *(о метрическом подпространстве) Любое подмножество $M_1 \subset M$ метрического пространства является МП с* ***индуцированной*** *метрикой:*

$$\forall x, y \in M_1 \ \rho_1(x, y) := \rho(x, y).$$

Подмножество $(M', \rho) \subset (M, \rho)$ называют ***метрическим подпространством.***

Примеры 2 и 5 иллюстрируют это определение: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ – метрическое подпространство, окружность с метрикой $\rho_1(A, B) = |AB|$ является метрическим подпространством евклидовой плоскости. Окружность с метрикой из примера 6 не является метрическим подпространством плоскости.

Задача. Докажите лемму 5.1.

Определение 5.2. Метрические пространства (M_1, ρ_1), (M_2, ρ_2) называют **изометричными** (т.е. метрически эквивалентными), если между ними существует биекция F, сохраняющая расстояние (**изометрия**):

$$F : M_1 \ \leftrightarrow \ M_2, \ \forall x, y \in M_1 \ \hookrightarrow \ \rho_1(x, y) = \rho_2(F(x), F(y)).$$

Пример. Евклидова плоскость и комплексная прямая изометричны. (Докажите!)

Задача. Докажите, что любые две окружности с метриками 5 и 6 неизометричны (примените к каждой окружности аксиому 3 из определения 5.1)

Задача. Докажите, что изометрия является отношением эквивалентности. Откуда следует, что множество всех метрических пространств разбивается на непересекающиеся классы. Теория метрических пространств изучает именно классы, а не каждое пространство в отдельности.

Понятие предела и непрерывного отображения метрических пространств строится по той же схеме, что и для арифметических пространств (п. 2.1.3).

Определение 5.3. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in M$ точек метрического пространства называется **сходящейся** к точке $x \in M$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$. Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Задача. Докажите, что сходящаяся последовательность имеет **единственный** предел.

Определение 5.4. Пусть $F : X \to Y$ – отображение метрических пространств. Отображение имеет предел (по Коши) в точке $x_0 \in X$, если существует такая точка $y_0 \in Y$, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \ F(Ball(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \subset Ball(y_0, \varepsilon).$$

Заметим, что определение осталось неизменным.

Задача. Дайте определение предела в точке по Гейне. Дайте определения непрерывности отображения в точке и на всем X. Можно ли определить понятие производной отображения, пользуясь только метрической структурой?

Пример. Метрика ρ метрического пространства M является непрерывной функцией: если последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\} \subset M$ и $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$, то $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x_0, y_0)$.

Задача. Докажите сформулированное в примере утверждение. Переформулируйте его в терминах определения Коши.

Определение 5.5. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in M$ точек метрического пространства называется **фундаментальной**, если она удовлетворяет условию Коши: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) :\ \forall n, m > N\ \hookrightarrow\ \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Лемма 5.2. *(необходимое условие сходимости) Если последовательность сходящаяся, то она фундаментальна.*

Задача. Докажите лемму 5.2.

Определение 5.6. Метрическое пространство называется **полным**, если любая его фундаментальная последовательность является сходящейся.

Примеры. Кроме $\mathbb{Q}$, все приведенные примеры являются полными МП.

Задача. Докажите неполноту $\mathbb{Q}$ и полноту остальных примеров МП.

Обсуждение. Полнота пространства играет важнейшую роль в проблеме **существования** математического объекта. Такими объектами являются, например, решения функциональных (дифференциальных, интегральных и других) уравнений. Оказывается существует стандартная процедура, позволяющая от неполного пространства перейти к полному. Сейчас мы только наметим ее этапы.

Определение 5.7. Метрическое подпространство $(M', \rho) \subset (M, \rho)$ называется **плотным** в M, если в любой окрестности произвольной точки пространства M имеется точка, принадлежащая подпространству M':

$$\forall x \in M\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x' \in M' :\ \rho(x, x') < \varepsilon.$$

Пример. $\mathbb{Q}$ плотно в $\mathbb{R}$. (Докажите!)

Определение 5.8. **Полное** метрическое пространство (M, ρ) называется **пополнением** своего подпространства $(M', \rho) \subset (M, \rho)$, если (M', ρ) плотно в (M, ρ).

Пример. $\mathbb{R}$ есть пополнение $\mathbb{Q}$.

Задача. Докажите: если M – полное пространство, то M является пополнением M' тогда и т.т., когда M есть замыкание M' ($M = \overline{M}'$).

Теорема 5.1. *(о возможности пополнения) У всякого метрического пространства существует пополнение, причем единственное с точностью до изометрии.*

Обсуждение. Полное пространство совпадает со своим пополнением. В неполном пространстве M рассматривают множество M_{sec} всех фундаментальных последовательностей $\{x_n\}$ и разбивают M_{sec} на классы эквивалентности $\{x_n\}^*$ (“факторизуют”) по принципу “неограниченного сближения“:

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0.$$

(Докажите, что это отношение эквивалентности.) Оказывается, множество M^*_{sec} классов $\{x_n\}^*$ является метрическим пространством, если определить в нем метрику так:

$$\rho^*(\{x_n\}^*, \{y_n\}^*) = \lim_{n\to\infty} \rho(\{x'_n\}, \{y'_n\}),$$

где $\{x'_n\} \in \{x_n\}^*$, $\{y'_n\} \in \{y_n\}^*$ – **произвольные** представители взятых классов. Более того, во-первых, МП M^*_{sec} является полным. Во-вторых, метрическое подпространство $M^*_{insec} \subset M^*_{sec}$ тех классов последовательностей, представители которых сходятся к элементам из M, является плотным в M^*_{sec}. В-третьих, M^*_{insec} изометрично самому M. Наконец, любое пополнение M изометрично M^*_{sec}. (Конечно, эти утверждения надо доказать!)

Пример. Построенное нами в лекции 1.1 множество действительных чисел в виде бесконечных периодических и непериодических десятичных дробей изометрично пополнению метрического пространства $\mathbb{Q}$ по изложенной выше схеме.

Исключительным по важности и красоте является следующее утверждение, в котором использована **только метрическая** структура.

Теорема 5.2. *(о неподвижной точке, Стефан Банах, 1892-1945) Пусть M – **полное** метрическое пространство, отображение $F : M \to M$ **инъективно** и является **сжатием** с коэффициентом k, т.е.*

$$\exists k \in (0,1) : \;\forall x, y \in M \;\hookrightarrow\; \rho(F(x), F(y)) \leqslant k\rho(x, y).$$

Тогда:

1. ***существует причем единственная неподвижная точка** x^*, т.е. $F(x^*) = x^*$;*
2. *неподвижная точка является **пределом итерационного процесса**, который можно запустить **с любой точки** $x_0 \in M$:*

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ полагаем } x_n := F(x_{n-1}), \text{ тогда } x^* = \lim_{n\to\infty} x_n;$$

3. *погрешность на n-ом шаге оценивается сверху по первому шагу как **убывающая геометрическая прогрессия** с коэффициентом k:*

$$\rho(x_n, x^*) \leqslant \frac{k^n}{1-k}\, \rho(x_0, F(x_0)).$$

Обсуждение. Теорему иллюстрирует рис. ??? Доказательство теоремы содержится в п. 2: рассмотрите последовательность итераций $\{x_n\}$, примените к ней критерий Коши – и получите единственную неподвижную точку.

Рис. ???

5.2. Нормированные пространства. Сейчас исходным объектом изучения будет действительное линейное (=векторное) пространство L, т.е. множество, элементы которого можно складывать и умножать на действительные числа, оставаясь в L. Указанные операции обязаны удовлетворять неоднократно упоминавшимся аксиомам (назовите их!).

Примеры:

1. числовая прямая $\mathbb{R}$;
2. арифметическое вещественное пространство $\mathbb{R}^n$;
3. пространство n-мерных квадратных матриц $A = (a_{ij})$ с поэлементными операциями сложения и умножения на число;
4. пространство последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ с покоординатными операциями сложения и умножения на число;
5. функциональное пространство $C^0[a,b]$ всех непрерывных на $[a,b]$ функций с поточечными операциями сложения функций и умножения на число;
6. функциональное пространство $L_R(a,b)$ АИ на (a,b) функций.

Мы различаем линейные пространства L **конечномерные** (т.е. имеющие конечный **базис**) и **бесконечномерные** (т.е. такие, у которых для произвольного $n \in \mathbb{N}$ существует n линейно независимых векторов из L).

Определение 5.9. Линейное пространство L называется **нормированным** (НП), если на нем определена **норма**, т.е. неотрицательная функция $x \to ||x|| \geqslant 0$, удовлетворяющая для любых $x, y \in L$ аксиомам НП:

1. тождественности: $||x|| = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$;
2. однородности: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ верно $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$;
3. неравенству треугольника: $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$.

Если первая аксиома не выполняется, то указанная функция называется **полунормой**, а пространство – **полунормированным**.

Примеры НП:

1. числовая прямая $\mathbb{R}$ с нормой $||x|| := |x|$,
2. a) пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой $||x||_T := \sum_{i=1}^n |x^{(i)}|$ (“геометрия такси”),
   b) пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой $||x||_{\max} := \max\limits_{i=1,\dots,n} \{|x^{(i)}|\}$;
3. a) пространство n-мерных квадратных матриц $A = (a_{ij})$ с нормой “такси” $||A||_T := \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|$;
   b) пространство матриц с нормой $||A||_{\max} := \max\limits_{i,j=1,\dots,n} \{|a_{ij}|\}$;
   c) пространство матриц с нормой коэффициента растяжения $||A|| := \max_{||x||=1} ||Ax||$, где $||\cdot||$ – некоторая норма в $\mathbb{R}^n$;
4. a) пространство $l_{\sup}$ последовательностей $\{x_n\}$ с равномерно ограниченными координатами (т.е. для каждой последовательности существует постоянная $C > 0$, что $|x_n| < C$) и нормой $||x||_{\sup} := \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \{|x_n|\}$;
   b) пространство l_1 последовательностей $\{x_n\}$, у которых ограничена сумма модулей координат (т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < C$) и нормой $||x||_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$;
5. a) функциональное пространство $C^0[a,b]$ с **равномерной нормой** $||f||_C := \max_{[a,b]} |f(x)|$;

b) функциональное пространство $CL[a,b]$ непрерывных функций с интегральной нормой $||f||_{LR} := \int_a^b |f(x)|dx$;

c) функциональное пространство $PC[a,b]$ всех многочленов $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ $(n = 0, 1, ...)$ с равномерной нормой $||p||_C := \max_{[a,b]} |f(x)|$;

6. функциональное пространство $L_R(a,b)$ с интегральной нормой $||f||_{LR} := \int_a^b |f(x)|dx$.

Задача. Докажите, что в каждом примере (кроме последнего) предложенная функция удовлетворяет аксиомам 1 - 3. Докажите, что пространство $L_R(a,b)$ является полунормированным.

Обсуждение. Обращаем внимание, что на одном и том же линейном пространстве норму можно вводить по-разному. Во-первых, мы получаем, согласно определению 5.8, разные НП. Во-вторых, в бесконечномерных примерах 3-5 разные нормы приводят (как мы убедимся ниже) к разным топологическим свойствам НП.

Каждое НП является метрическим, если в нем положить по определению

$$\rho(x,y) = ||x - y||.$$

Задача. Докажите, что определенная выше функция ρ удовлетворяет аксиомам 1-3 из определения 5.1.

Теперь на НП переносятся без изменения многие понятия МП: шар, сфера, сходимость последовательности, ее фундаментальность, полнота пространства. Сходимость по норме $||\cdot||_C$ называется **равномерной**, а сходимость по норме $||\cdot||_{LR}$ называется **в среднем**.

Задача. Опишите и, по возможности, нарисуйте единичный шар в примерах 2a и 2b (при $n = 2$) и в примерах 5a и 5b.

Полные нормированные пространства играют настолько важную роль в функциональном анализе и его приложениях (теории дифференциальных уравнений и уравнений математической физики), что им присвоено имя основного их исследователя:

Определение 5.10. Полное НП называется **банаховым**

Таким образом, в НП присутствует две структуры: линейная и метрическая. Их согласованность выражается в следующем утверждении:

Лемма 5.3. *В НП линейные операции и функция нормы непрерывны: если $x_n \to x$ и $y_n \to y$ в НП L, а $\lambda_n \to \lambda$ в $\mathbb{R}$ при $n \to \infty$, то*

$$x_n + y_n \to x + y, \quad \lambda_n x_n \to \lambda x \text{ в } L, \quad ||x_n|| \to ||x|| \text{ в } \mathbb{R} \text{ при } n \to \infty.$$

Задача. Докажите лемму 5.3.

Однако некоторые введенные для МП понятия разумно скорректировать, учитывая линейную структуру НП.

Определение 5.11. **Нормированным подпространством** называют линейное подпространство, **полное** относительно индуцированной нормы:

$$(L_1, ||\cdot||) \subset (L, ||\cdot||) \;\wedge\; \overline{L}_1 = L_1.$$

Если же условие полноты не выполнено, то линейное подпространство с индуцированнной нормой будем называть **нормированным подмногообразием**.

Примеры: $\mathbb{R}$ является подпространством $\mathbb{R}^n$ как с нормой $||\cdot||_T$, так и с нормой $||\cdot||_{\max}$; подмножество $C^0_0[a,b] \subset C^0[a,b]$ всех непрерывных функций f, удовлетсоряющих **однородному краевому условию** $f(a) = f(b) = 0$, является подпространством (докажите!); $CP[a,b]$ является нормированным подмногообразием $C^0[a,b]$, а $CL[a,b]$ – подмногообразием $L_R(a,b)$ (доказательство этих утверждений см. ниже).

Ситуация, когда в одном линейном пространстве введено две и более норм, типична в функциональном анализе и его приложениях. Поэтому нужно уметь их сравнивать.

Определение 5.12. О двух нормах $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$, заданных на одном и том же линейном пространстве L, говорят $||\cdot||_2$ **не слабее** $||\cdot||_1$, если существует такая постоянная $M > 0$, что

$$\forall x \in L \ \hookrightarrow \ ||x||_1 \leqslant M||x||_2.$$

Примеры: для непрерывной на $[a,b]$ функции f норма $||f||_C := \max_{[a,b]} |f(x)|$ не слабее, чем $||f||_{LR} := \int_a^b |f(x)|dx$ с $M = b - a$ (докажите!).

Лемма 5.4. *(о сходимости в разных нормах) Пусть $||\cdot||_2$ не слабее $||\cdot||_1$. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится в норме $||\cdot||_2$ к x_0, то она тем более сходится в $||\cdot||_1$ к тому же элементу x_0.*

Доказательство сразу следует из оценки

$$||x_n - x_0||_1 \leqslant M||x_n - x_0||_2 \to 0 \text{ при } n \to \infty. \blacksquare$$

.

Следствие 5.1. *Если последовательность f_n непрерывных на $[a,b]$ функций сходится равномерно к (автоматически непрерывной) функции f, то она же сходится к f в среднем.*

Определение 5.13. Две нормы $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$, заданные на одном и том же линейном пространстве L, называются **эквивалентными**, если существуют такие постоянные $M > m > 0$, что

$$\forall x \in L \ \hookrightarrow \ m||x||_2 \leqslant ||x||_1 \leqslant M||x||_2.$$

Задача. Докажите, что введенное отношение в самом деле является эквивалентностью (т.е. рефлексивно, симметрично и транзитивно). Откуда следует, что множество всех норм разбивается на классы.

Задача. Докажите геометрический критерий равносильности норм: две нормы $||\cdot||_1$ и $||\cdot||_2$ в одном и том же линейном пространстве эквивалентны тогда и т. т., когда $\exists\ R > r > 0$:

$$Ball_2(r) = \{x \in L : \ ||x||_2 \leqslant r\} \subset Ball_1(1) = \{x \in L : \ ||x||_1 \leqslant 1\} \subset$$

$$Ball_2(R) = \{x \in L : \ ||x||_2 = R\},$$

причем можно взять $R = 1/m$, $r = 1/M$. Т.е. единичному шару по первой норме принадлежит шар по второй норме достаточно малого радиуса r, и наоборот – единичный шар по первой норме вложен в шар по второй норме достаточно большого радиуса R. Проиллюстрируйте это утверждение на примере норм 2a и 2b при $n = 2$.

Задача. Докажите, что на пространстве непрерывных на $[a, b]$ функций нормы $||f||_C := \max_{[a,b]} |f(x)|$ и $||f||_{LR} := \int_a^b |f(x)|dx$ не эквивалентны. Указание: учитывая, что норма $||f||_C$ не слабее, чем норма $||f||_{LR}$, достаточно предъявить последовательность непрерывных функций, у которых интегральная норма $||f_n||_{LR} = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, а норма $||f_n||_C \to \infty$ при $n \to \infty$.

Примем к сведению, что

Лемма 5.5. *В конечномерном пространстве любые две нормы эквивалентны.*

Задача. Докажите лемму. (В одномерном случае утверждение тривиально. В n-мерном случае нужно применить разложение по базису и воспользоваться компактностью сферы $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.)

Следствие 5.2. *Любое конечномерное нормированное пространство полное.*

Замечание. Из приведенных выше утверждений следует, что понятие полноты интересно только в теории бесконечномерных нормированных пространств.

Обсудим понятие плотности для НП.

Определение 5.14. Нормированное подмногообразие $(L_1, || \cdot ||) \subset (L, || \cdot ||)$ называется **плотным** в $(L, || \cdot ||)$, если оно является таковым как метрическое подпространство.

В конечномерном случае это понятие тривиально – плотным является только само пространство. В бесконечномерном случае понятие плотности нетривиально!

Пример. В пространстве $C^0[a, b]$ плотно подпространство $PC[a, b]$ всех многочленов. Из теоремы 4.3 (второй Вейерштрасса) следует, что в любой ε-окрестности $Ball_\varepsilon(f, C)$ непрерывной функции f по равномерной норме $||\cdot||_C$ имеется многочлен p.

Теперь логично дать

Определение 5.15. Банахово пространство $(L, || \cdot ||)$ называется **пополнением** своего **подмногообразия** $(L_1, || \cdot ||) \subset (L, || \cdot ||)$, если $(L_1, || \cdot ||)$ плотно в $(L, || \cdot ||)$.

Пример. Пространство $C^0[a, b]$ является пополнением $PC[a, b]$ (доказательство ниже).

Для банаховых пространств справедлива теорема, аналогичная теореме 5.1:

Теорема 5.3. *Всякое нормированное пространство L_1 плотно в некотором банаховом пространстве L, т.е. неполное НП всегда можно пополнить. Пополнение единственно с точностью до метрической эквивалентности.*

Обсуждение теоремы 5.3. Пространство L как метрическое получается из теоремы 5.1. Остается доказать, что в нем корректно (т.е. единственным образом и с сохранением преемственности) доопределяются векторные операции и норма. Доказательство опирается на лемму 5.3.

5.3. Пространства $C^0[a,b]$, $PC[a,b]$, $CL[a,b]$ и $L_R(a,b)$. На примере названных пространств обсудим введенные выше понятия. Докажем, что

Теорема 5.4. *НП $C^0[a,b]$ полное.*

Доказательство. Фактически это переформулировка уже известных нам свойств **равномерной сходимости** – критерия Коши (теорема 2.10.1 п. 3) и теоремы о сохранении непрерывности при равномерной сходимости (теорема 2.10.3). Итак: последовательность $\{f_n\} \subset C^0[a,b]$ фундаментальна $\Leftrightarrow$ верен критерий Коши равномерной сходимости $\Leftrightarrow$ $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$ $\Rightarrow$ $f \in C^0[a,b]$. ■

Обсуждение. Теорема 5.4 демонстрирует возможности методов функционального анализа: понятие **равномерной сходимости последовательности функций** заменяется равносильным понятием **сходимости точек в функциональном пространстве** со специально выбранной нормой.

Из теоремы 5.4 и второй теоремы Вейерштрасса об аппроксимации получаем

Следствие 5.3. *Банахово пространство $C^0[a,b]$ является пополнением нормированного подмногообразия $PC[a,b]$.*

Теперь еще раз рассмотрим линейное пространство непрерывных функций, но с интегральной нормой, т.е. $CL[a,b]$. Докажем, что

Лемма 5.6. *Формула $||f||_{LR} = \int_a^b |f(x)|dx$ задает в линейном пространстве непрерывных функций норму.*

Доказательство пп. 2 и 3 следует из свойств модуля числа и свойств несобственного интеграла Римана. Докажем п. 1. Пусть $\int_a^b |f(x)|dx = 0$, но – от противного – найдется точка $x_0 \in [a,b]$, в которой $f(x_0) > 0$. В силу непрерывности, существует δ-окрестность точки x_0 (полуокрестность, если точка – край отрезка), в которой $f(x) > f(x_0)/2$. Поэтому $\int_a^b |f(x)|dx > f(x_0)\delta/2 > 0$. ■

В отличие от $C^0[a,b]$

Лемма 5.7. *НП $CL[a,b]$ не является полным.*

Доказательство. Достаточно предоставить фундаментальную в $CL[a,b]$, но не сходящуюся последовательность. Пусть, что не принципиально, $a = -1, b = 1$. Положим: $f_n(x) := \pm 1$ для $\pm x \in [1/n, 1]$ и $f_n(x) = nx$ для $|x| \leqslant 1/n$ (см. рис. ???). Найдем расстояние между точками последовательности с большими номерами $n > m$. Из геометрического смысла интеграла ясно, что

$$||f_n - f_m||_{LR} = 2 \cdot \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) < \frac{2}{m} \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Значит, последовательность фундаментальная. Но она сходится к функции $f_0(x) = sign(x) \in CL[-1,1]$, которая имеет в нуле скачок. ■

Рис. ???

Поскольку функция $sign \in L_R(-1,1)$ возникает подозрение, что пополнением нормированного подмногообразия $CL[a,b]$ является пространство $L_R(a,b)$. С одной стороны, справедлива

Теорема 5.5. *Нормированное подмногообразие $CL[a,b]$ плотно в $L_R(a,b)$.*

(Ее доказательство мы обсудим позже.)

Тем не менее, $L_R(a,b)$ не является пополнением $CL[a,b]$ по двум причинам. Во-первых, пространство $L_R(a,b)$ только полунормированное. В самом деле, пусть точка $\xi \in (a,b)$. Пусть $\theta_\xi \in L_R(a,b)$ – "характеристическая функция" точки ξ: $\theta_\xi(x) \equiv 0$, если $x \neq \xi$ и $\theta_\xi(\xi) = 1$. Тогда $\theta_\xi \neq 0$ в $L_R(a,b)$, но $||\theta_\xi||_L = 0$ Этот "недостаток" преодолим. Чтобы получить НП, поступим как при доказательстве теоремы 5.1 о пополнении. Введем отношение эквивалентности между функциями из $L_R(a,b)$ **факторизуем**:

$$f \sim g \ \Leftrightarrow \ \int_a^b |f(x) - g(x)|dx = 0.$$

Рефлексивность и симметричность отношения очевидны. Транзитивность следует из оценки:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|dx = 0 \ \wedge \ \int_a^b |g(x) - h(x)|dx = 0 \ \Rightarrow$$

$$0 \leqslant \int_a^b |f(x) - h(x)|dx \leqslant \int_a^b |f(x) - g(x)|dx + \int_a^b |g(x) - h(x)|dx = 0.$$

Объявим элементами нового пространства (оставив старое обозначение $L_R(a,b)$) классы эквивалентности $\{f\}$. Проверим, что векторные операции и интегральная норма (а не полунорма!) корректно определены. Чтобы сложить два класса, выбираем по одному произвольному представителю из каждого класса, затем представители складываем, а по результату определяем окончательный класс. Убедимся, что ответ не зависит от выбора представителей:

$$f_1, f_2 \in \{f\}, \ g_1, g_2 \in \{g\} \ \Rightarrow \ \int_a^b |(f_1 + g_1) - (f_2 + g_2)|dx \leqslant$$

$$\int_a^b |f_1 - f_2|dx + \int_a^b |g_1 - g_2|dx = 0 + 0 = 0.$$

Вторая, неустранимая, причина – пространство $L_R(a,b)$ не является полным. Это утверждение мы примем без доказательства (т.е. пример фундаментальной, но не сходящейся в $L_R(a,b)$ последовательности, не приводим).

Пополнение пространства $L_R(a,b)$ (и автоматически $CL[a,b]$ – докажите!) столь важно в функциональном анализе и его приложениях, что ему присвоено имя создателя:

Определение 5.16. Пополнение пространства $L_R(a,b)$ называется **пространством Лебега** (Анри Леон Лебег, 1875-1941) и обозначается $L(a,b)$.

Обсуждение. Удобнее вводить пространство $L(a,b)$ иначе – как это сделал Лебег: 1) ввести "интегрирование по Лебегу", 2) определить $L(a,b)$ как пространство всех функций, которые интегрируемы на (a,b) по Лебегу, 3) определить норму $||f||_L := \int_a^b |f(x)|dx$, где интеграл понимается как лебеговый. Сходимость в пространстве $L(a,b)$, как и в $L_R(a,b)$, называют сходимостью в среднем.

5.4. Полные системы в линейных нормированных пространствах. Понятие полной системы является "ослабленным" аналогом понятия базиса в конечномерном пространстве. К полноте пространства понятие полноты системы не имеет отношения; однако оно связано с понятием плотности подпространства.

Определение 5.17. Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ векторов бесконечномерного НП L **полна** в нем, если для любого вектора $f \in L$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует конечная линейная комбинация $\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$ $(\alpha_i \in \mathbb{R})$, которая аппроксимирует вектор f по норме пространства L с точностью до ε: $||\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n - f|| < \varepsilon$.

Обсуждение. Полная система, как и базис, содержит фиксированные векторы. Однако, во-первых, линейная комбинация только аппроксимирует вектор, но не совпадает с ним. Во-вторых, с уменьшением погрешности коэффициенты при векторах системы в общем случае меняются, т.е. они не аналогичны координатам.

Лемма 5.8. *(о полноте системы и плотности) Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна в L тогда и т.т., когда нормированное подмногообразие E, образованное всевозможными конечными линейными комбинациями вида $\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$, плотно в L.*

Задача. Докажите, что указанные комбинации образуют нормированное подмногообразие. После чего докажите, что если система полна, то подмногообразие E плотно в L и наоборот.

Обозначим через $C^0_{per}[-\pi,\pi] \subset C^0[-\pi,\pi]$ подпространство непрерывных функций f, удовлетворяющих периодическому краевому условию $f(-\pi) = f(\pi)$.

Задача. Докажите, что подмножество $C^0_{per}[-\pi,\pi] \subset C^0[-\pi,\pi]$ – подпространство $C^0[-\pi,\pi]$

Теорема 5.6. ***Примеры*** *некоторых полных и неполных систем:*

1. *Тригонометрическая система (1.4) полна в $C^0_{per}[-\pi,\pi]$ и неполна в $C^0[-\pi,\pi]$*
2. *Система степенных одночленов $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ полна в $C[a,b]$.*
3. *Тригонометрическая система (1.4) полна в НП $L_R(-\pi,\pi)$.*

Доказательство. Полнота ТС в $C^0_{per}[-\pi,\pi]$ сразу следует из теоремы 4.2 (Первой теоремы Вейерштрасса об аппроксимации).

Покажем, что непрерывную функцию $f(x) := x$ невозможно аппроксимировать ТС по равномерной норме (тем самым мы докажем неполноту ТС в $C^0[-\pi,\pi]$). В силу периодичности, для любого тригонометрического многочлена $T_n(x)$ справедливо равенство $T_n(-\pi) = T_n(\pi)$. Поэтому тригонометрический многочлен не может приблизиться одновременно к значениям функции $f(x)$ на обоих концах отрезка (см. рис. ???):

$$||f - T_n(x)||_C = \max_{[\pi,\pi]} |f(x) - T_n(x)| \geqslant \max\{|f(-\pi) - T_n(-\pi)|, |f(\pi) - T_n(\pi)|\} \geqslant$$

$$\frac{1}{2}\left(|f(-\pi) - T_n(-\pi)| + |f(\pi) - T_n(\pi)|\right) = \frac{1}{2}\left(|f(-\pi) - T_n(\pi)| + |f(\pi) - T_n(\pi)|\right) \geqslant$$

$$\frac{1}{2}\left(|f(-\pi) - f(\pi)|\right) = \pi.$$

Рис. ???

Полнота системы степенных одночленов в $C^0[-\pi, \pi]$ сразу следует из теоремы 4.3 (Второй теоремы Вейерштрасса об аппроксимации).

Ниже мы докажем полноту тригонометрической системы в пространстве $L^2_R(-\pi, \pi)$.

§ 6. Ряд Фурье в бесконечномерном евклидовом пространстве

Здесь мы обсудим РФ с точки зрения функционального анализа (ФА) как разложение вектора (функции) евклидового бесконечномерного (функционального!) пространства по счетному ортогональному базису. В результате мы придем к бесконечномерному аналогу теоремы Пифагора.

6.1. Бесконечномерное евклидово пространство. Напомним, что линейное пространство L называется **евклидовым**, если на нем определено скалярное произведение (x, y). Евклидово пространство автоматически является нормированным с нормой $||x|| := (x, x)^{1/2}$ и метрическим с метрикой $\rho(x, y) = (x - y, x - y)^{1/2}$. Ценность евклидового пространства по сравнению с нормированным в том, что в нем можно измерять углы ($\cos \widehat{x, y} := \frac{(x,y)}{||x||\ ||y||}$), т.е. в нем определены все понятия классической геометрии. (Обоснование этих утверждений см. в п. 2.1.1)

Примеры евклидовых пространств:

1. числовая прямая $\mathbb{R}$ с $(x, y) := xy$,
2. пространство $\mathbb{R}^n$ с $(x, y) := \sum_{i=1}^n x^{(i)} y^{(i)}$,
3. n^2-мерное пространство n-мерных квадратных матриц $A = (a_{ij})$ с $(A, B) := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij} = Sp(AB)$;
4. пространство l_2 последовательностей $\{x_n\}$, у которых ограничена сумма квадратов координат (т.е. $\sum_{n=1}^\infty x_n^2 < C$) с $(x, y) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$;
5. функциональное пространство $CL^2[a, b]$ непрерывных функций с $(f, g) := \int_a^b f(x) g(x) dx$;

Примеры 1-3 – конечномерные, 4,5 – бесконечномерные.

Задача. Докажите, что в каждом примере выполнены аксиомы скалярного произведения. Чему равны нормы векторов в каждом примере?

Задача. Докажите по образцу доказательства леммы 5.7, что пространство $CL^2[a, b]$ неполное.

Пространство $L^2_R(a, b)$, введенное в п. 1.2, не является евклидовым, поскольку, как было отмечено, "неопределенное скалярное произведение" $(f, g) = \int_a^b f g dx$ не удовлетворяет аксиоме строгой положительности. Чтобы ликвидировать этот "недостаток" отождествим функции, которые не отличаются по введенной полунорме (сравните с факторизацией пространства $L_R(a, b)$):

$$f \sim g \ \Leftrightarrow \ \int_a^b (f(x) - g(x)^2 dx = 0 \ \Leftrightarrow \ ||f - g|| = 0.$$

Рефлексивность и симметричность отношения очевидны. Транзитивность следует из неравенства треугольника

$$||f - h|| = ||(f - g) + (g - h)|| \leqslant ||f - g|| + ||g - h||,$$

которое остается справедливым и для неопределенного скалярного произведения. Объявим элементами нового пространства (оставив старое обозначение $L^2_R(a, b)$) **классы эквивалентности** $\{f\}$.

Лемма 6.1. *Векторные операции и (интегральное) скалярное произведение* ***корректно*** *определены на произвольных представителях классов, т.е.*

$$\forall f_1, f_2 \in \{f\},\ \forall g_1, g_2 \in \{g\},\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \hookrightarrow$$

$$\{f_1 + g_1\} = \{f_2 + g_2\},\ \{\lambda f_1\} = \{\lambda f_2\},\ (f_1, g_1) = (f_2, g_2).$$

Докажем последнее равенство (остальные самостоятельно).

$$(f_1, g_1) = \int_a^b f_1(x) g_1(x)\ dx = \int_a^b ((f_1 - f_2) + f_2)((g_1 - g_2) + g_2)\ dx =$$

$$\int_a^b (f_1 - f_2)(g_1 - g_2) dx + \int_a^b (f_1 - f_2) g_2 dx + \int_a^b f_2 (g_1 - g_2) dx + \int_a^b f_2 g_2 dx.$$

Убедимся, что все слагаемые, кроме последнего, равны нулю. Из условия следует, что

$$\int_a^b (f_1 - f_2)^2 dx = \int_a^b (g_1 - g_2)^2 dx = 0.$$

Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского $|(f,g)| \leqslant ||f|| \cdot ||g||$, записанным для интегрального скалярного произведения. (Специально доказывать последнее не нужно, поскольку оно выполнено для любого, в том числе и неопределенного, скалярного произведения.) Получаем:

$$\Big| \int_a^b (f_1 - f_2)(g_1 - g_2)\ dx \Big| \leqslant \int_a^b |(f_1 - f_2)(g_1 - g_2)|\ dx \leqslant$$

$$\left(\int_a^b (f_1 - f_2)^2\ dx \int_a^b (g_1 - g_2)^2\ dx \right)^{1/2} = 0,$$

$$\Big| \int_a^b |(f_1 - f_2) g_2\ dx \Big| \leqslant \int_a^b |(f_1 - f_2) g_2| dx \leqslant \left(\int_a^b (f_1 - f_2)^2\ dx \int_a^b g_2^2\ dx \right)^{1/2} = 0,$$

$$\Big| \int_a^b f_2 (g_1 - g_2)\ dx \Big| \leqslant \int_a^b |f_2 (g_1 - g_2)| dx \leqslant \left(\int_a^b f_2^2\ dx \int_a^b (g_1 - g_2)^2\ dx \right)^{1/2} = 0. \ \blacksquare$$

Сходимость в пространствах $L^2_R(a,b)$ и $CL^2[a,b]$ называют **сходимостью в среднем квадратичном**.

Имеют место вложения пространств $C^0[a,b] \subset L^2_R(a,b) \subset L_R(a,b)$ (докажите), поэтому можно сравнивать нормы этих пространств:

Лемма 6.2. *(о сравнении норм)*

1. *Если* $f \in C^0[a,b]$, *то* $f \in L^2_R(a,b)$ *и* $||f||_2 \leqslant \sqrt{b-a}\ ||f||_C$.
2. *Если* $f \in L^2_R(a,b)$, *то* $f \in L_R(a,b)$ *и* $||f||_1 \leqslant \sqrt{b-a}\ ||f||_2$.
3. *На* $C^0[a,b]$ *нормы* $||f||_2$ *и* $||f||_C$ *не эквивалентны; на* $L^2_R(a,b)$ *нормы* $||f||_1$ *и* $||f||_2$ *не эквивалентны.*

Т.е. из равномерной сходимости следует сходимость в среднем квадратичном, а из нее – сходимость в среднем. Но не наоборот.

Доказательство первого утверждения:

$$||f||_2 = \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2} \leqslant \max_{[a,b]} |f(x)| \left(\int_a^b dx\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{b-a}\ ||f||_C.$$

Доказательство второго утверждения основано на неравенстве Коши-Буняковского

$$||f||_1 = \int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b |f(x)| \cdot 1dx = |(|f|,1)| \leqslant ||f||_2 \cdot ||1||_2 = \sqrt{b-a}\ ||f||_2.$$

Для доказательство третьего утверждения достаточно построить две последовательности непрерывных функций: 1) у которых интегральная норма $||f_n||_2 = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, а норма $||f_n||_C \to \infty$ при $n \to \infty$, 2) у которых норма $||f_n||_1 = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, а норма $||f_n||_2 \to \infty$ при $n \to \infty$. (Постройте такие последовательности!) ■

6.2. Ортогональные системы. Наличие понятия угла (в частности, прямого) в бесконечномерном евклидовом пространстве позволяет среди всех систем выбрать "наилучшие". Мы будем активно применять геометрическую интерпретацию, которая делает наглядной многие понятия, связанные с РФ.

Определение 6.1. Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ векторов бесконечномерного евклидового пространства L называется **ортогональной**, если она не содержит нулевого вектора, и все векторы попарно ортогональны:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n \ \hookrightarrow \ (e_m, e_n) = 0.$$

Обозначим через $L_n = Span\{e_1, ..., e_n\} \subset L$ линейную оболочку указанных векторов. Последняя автоматически является n-мерным евклидовым подпространством, с базисом $\{e_1, ..., e_n\}$. Множество $L_n^{\perp} := \{h \in L : \ (h, e_k) = 0, \ k = 1, ..., n\}$ всех векторов, ортогональных L_n, образует линейное евклидово подмногообразие (докажите!) и называется **ортогональным дополнением**.

Лемма 6.3. *(об ортогональном разложении) Произвольный вектор $f \in L$ единственным образом представим в виде $f = g_n + h_n$, где $g_n \in L_n$, а $h_n \in L_n^{\perp}$ (см. рис. ???). Векторы g_n и h_n называют* ***ортогональными проекциями*** *f на L_n и $L_n^{\perp}$ соответственно.*

Рис. ???

Доказательство. Поскольку $g_n \in L_n$, то $g_n = \xi^{(1)}e_1 + ... + \xi^{(n)}e_n$, где коэффициенты $\xi^{(k)}$ (они же – координаты вектора g_n в базисе $\{e_1, ..., e_n\}$) предстоит найти. Умножим скалярно равенство $f = \xi^{(1)}e_1 + ... + \xi^{(n)}e_n + h_n$ на e_k ($k = 1, ..., n$). Учитывая ортогональность системы и ортогональность $(h_n, e_k) = 0$, получим $\xi^{(k)} = (f, e_k)/(e_k, e_k)$. Вывод: если ортогональное разложение существует, то координаты $\xi^{(k)}$ и, заодно, вектор g_n определяются единственным образом. Теперь положим $h_n := f - g_n$. Тогда $(h_n, e_k) = (f, e_k) - \xi^{(k)}(e_k, e_k) = 0$ для произвольного $k = 1, ..., n$. Значит, $h_n \in L_n^{\perp}$. Единственность h_n следует из единственности g_n и самого определения разложения вектора. ■

Ориентируясь на формулы п. 1.2, назовем:

1. числа $\xi^{(k)} := (f, e_k)/(e_k, e_k)$ – **коэффициентами Фурье** вектора f,
2. формальный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi^{(k)} e_k$ – **рядом Фурье** вектора f по данной ортогональной системе,
3. конечную сумму $FS_n(f) := \sum_{k=1}^{n} \xi^{(k)} e_k$ – **частичной суммой ряда Фурье** вектора f.

Из введенных определений сразу вытекает

Следствие 6.1. *(геометрическая интерпретация частичных сумм РФ) Частичная сумма ряда Фурье $FS_n(f)$ есть **ортогональная** проекция f на подпространство, образованное первыми n векторами ортогональной системы.*

Кроме того справедлива

Теорема 6.1. *Пифагора Самосского (570—490 гг. до н. э.):*

$$||f||^2 = ||FS_n(f)||^2 + ||f - FS_n(f)||^2. \tag{6.1}$$

Доказательство. Поскольку $g_n := FS_n(f) \in L_n$, а $h_n := f - FS_n(f) \in L_n^{\perp}$, то

$$||f||^2 = (f, f) = ((f - g_n) + g_n, (f - g_n) + g_n) =$$
$$h_n^2 + 2(h_n, g_n) + g_n^2 = ||FS_n(f)||^2 + ||f - FS_n(f)||^2. \quad \blacksquare$$

Из теоремы Пифагора мы получаем **неравенство Бесселя**, которое является первой попыткой перехода от конечномерных аппроксимаций вектора f к бесконечномерным:

Следствие 6.2. *(Бессел Фридрих Вильгельм, 1784 — 1846) Для любой ортогональной системы векторов $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ и для любого вектора $f \in L$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\xi^{(k)})^2 ||e_k||_2^2 \leqslant ||f||_2^2,$$

где $\xi^{(k)}$ – коэффициенты Фурье вектора f по данной системе.

Доказательство. Из формулы (6.1), ортогональности системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, и определения коэффициентов Фурье следует, что для произвольного $n \in \mathbb{N}$

$$||f||^2 \geqslant ||FS_n(f)||^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \xi^{(k)} e_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} (\xi^{(k)})^2 ||e_k||^2$$

(мы возводим в квадрат конечную сумму, что позволительно!). Отсюда следует, что **неотрицательный числовой ряд** $\sum_{k=1}^{\infty} (\xi^{(k)})^2 ||e_k||^2$ **сходится** и при переходе к пределу нестрогая оценка сохраняется. $\blacksquare$

Если мы хотим конечномерной проекцией $g \in L_n$ **приблизиться** к вектору f, то нашей целью является **минимизация остатка** $h = f - g$. Следующая теорема объясняет почему ортогональная проекция $g_n := FS_n(f)$ “наилучшая”.

Теорема 6.2. *(о минимальном свойстве коэффициентов Фурье) Справедливы и равносильны утверждения:*

1.
$$||f - FS_n(f)|| = \min_{g \in L_n} ||f - g||;$$

2. *Длина перпендикуляра $h_n := f - FS_n(f)$, опущенного из точки f на подпространство L_n, является кратчайшим расстоянием от данной точки до всевозможных точек $g \in L_n$ (рис. ???).*

Доказательство. Пусть $g \in L_n$ – произвольный вектор. Обозначим разность $d := FS_n(f) - g \in L_n$. В силу следствия 6.1, $h_n := (f - FS_n(f)) \perp L_n$. Значит, $d \perp h_n$. Поэтому к векторам h_n и d применима теорема Пифагора:

$$||f - g||^2 = ||(f - FS_n(f)) + d||^2 = ||h_n + d||^2 = ||h_n||^2 + ||d||^2 \geqslant ||h_n||^2.$$

Второе утверждение есть в точности первое, прочтенное в геометрических терминах. ■

6.3. Ортогональный базис. В п. 5.4 мы обсудили понятие полной счетной системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ векторов бесконечномерного нормированного пространства. Сейчас мы перейдем к понятию счетного базиса в нормированном пространстве.

Определение 6.2. Говорят, что **вектор** $f \in L$ нормированного пространства L **раскладывается по системе** $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L$, если существует такая числовая последовательность $\{\xi^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, что **векторный ряд** $\sum_{k=1}^{\infty} \xi^{(k)} e_k$ сходится к f по норме L, т.е.

$$\lim_{n \to \infty} ||f - \sum_{k=1}^{n} \xi^{(k)} e_k|| = 0.$$

Обозначение: $\sum_{k=1}^{\infty} \xi^{(k)} e_k = f$.

Определение 6.3. Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ векторов нормированного пространства L называется **базисом** пространства L, если любой вектор $f \in L$ **раскладывается** по этой системе **единственным образом**.

Обсуждение. Очевидно, что базис всегда полная система векторов. В обратную сторону утверждение в общем случае неверное. Полная система векторов аппроксимирует произвольный вектор с любой наперед выбранной погрешностью $\varepsilon > 0$, т.е. $||f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k|| < \varepsilon$. Однако с уменьшением погрешности не происходит стабилизации коэффициентов, т.е. от ε зависит не только количество слагаемых в аппроксимации, но и $\alpha_k = \alpha_k(\varepsilon)$.

Оказывается, в евклидовом пространстве для **ортогональной** системы понятия полноты и базисности тождественны. Прежде всего, справедлива

Теорема 6.3. *(о единственности разложения по ортогональной системе) Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система евклидового пространства L. Пусть вектор $f \in L$ раскладывается по этой системе, т.е. $f = \sum_{k=1}^{\infty} \xi^{(k)} e_k$. Тогда:*

1. *разложение единственно, а его коэффициенты являются коэффициентами Фурье: $\xi^{(k)} = (f, e_k)/(e_k, e_k)$;*
2. *$\forall n \in \mathbb{N}$ остаток $r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi^{(k)} e_k \in L_n^{\perp}$.*

Доказательство. Достаточно доказать вторую часть утверждения, поскольку коэффициенты Фурье определяются единственным образом. Выберем и зафиксируем $m \in \mathbb{N}$. Нас интересует коэффициент $\xi^{(m)}$. Поскольку ряд сходится, то для произвольного $n \in \mathbb{N}$ его остаток $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi^{(k)} e_k$ тоже сходиться и для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n \in \mathbb{N}$, что $n > m$ и $||r_n|| < \varepsilon / ||e_m||$. Поэтому, учитывая ортогональность системы, получаем:

$$(f, e_m) = (\sum_{k=1}^{n} \xi^{(k)} e_k + r_n, e_m) = \xi^{(m)}(e_m, e_m) + (r_n, e_m) \ \Rightarrow$$

$$|(f, e_m) - \xi^{(m)}(e_m, e_m)| = |(r_n, e_m)| \leqslant ||r_n|| \cdot ||e_m|| < \varepsilon.$$

Т.е. неотрицательная константа $|(f, e_m) - \xi^{(m)}(e_m, e_m)|$ меньше сколь угодно малого положительного числа. Значит

$$(f, e_m) - \xi^{(m)}(e_m, e_m) = 0 \ \Leftrightarrow \ \xi^{(m)} = \frac{(f, e_m)}{(e_m, e_m)}.$$

Из следствия 6.1 следует, что при ортогональном проектировании вектора f на L_n и $L_n^{\perp}$ проекция на L_n есть частичная сумма ряда Фурье. Из п. 1 теоремы следует, что разложение f является рядом Фурье. В силу единственности ортогонального разложения (лемма 6.3), получаем принадлежность $r_n \in L_n^{\perp}$. ■

Замечание. Возникает желание "сразу доказать" теорему 6.3 почленным умножением равенства $f = \sum_{k=1}^{\infty} \xi^{(k)} e_k$ на e_m. Но ряд справа содержит бесконечное количество слагаемых! Поэтому почленное умножение нуждается в обосновании, которое будет не короче, чем предложенный метод доказательства.

Теперь мы обоснуем совпадение понятий полноты ортогональной системы и базиса.

Теорема 6.4. *(об ортогональной системе) Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система в евклидовом пространстве L. Следующие утверждения равносильны:*

1. *система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – базис в L;*
2. *система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна в L;*
3. *для каждого вектора $f \in L$ его ряд Фурье по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к нему по норме $||\cdot||$ пространства L:*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \xi^{(k)} e_k; \tag{6.2}$$

4. *для каждого вектора $f \in L$ выполняется* ***равенство Парсеваля*** *(Марк-Антуан Парсеваль, 1755 — 1836):*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\xi^{(k)})^2 ||e_k||^2 = ||f||^2, \tag{6.3}$$

где $\xi^{(k)}$ – коэффициенты Фурье вектора f по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Обсуждение П. 2: полнота системы гарантирует существование сколь угодно близкой аппроксимации произвольного вектора пространства конечными линейными комбинациями векторов системы; но не гарантирует **фиксацию** упорядоченных слагаемых в этих суммах. П. 4: в ортонормированном базисе (т.е. $||e_k|| = 1$) равенство Парсеваля приобретает совсем простой вид:

$$||f||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\xi^{(k)})^2,$$

т.е. это бесконечномерный аналог теоремы Пифагора. Замечательно, что числовое равенство (6.3) равносильно бесконечномерному векторному равенству (6.2).

Пример. В пространстве l_2 (пример 4 в п. 6.1) ортонормированная система $\{e_k := (0, ..., 0, 1, 0...)\}$ (где единица стоит на k-м месте) является базисом, а коэффициенты Фурье вектора $\{x_n\} \in l_2$ – сами элементы последовательности $\{x_n\}$.

Доказательство. П. 1 $\Rightarrow$ п. 2. Из определений 6.2 и 6.3 следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \xi^{(k)} \in \mathbb{R} \ (k = 1, ..., n): \ ||f - \sum_{k=1}^{n} \xi^{(k)} e_k|| < \varepsilon.$$

Таким образом, определение 5.17 полноты системы выполнено.

П.2 $\Rightarrow$ п. 3. Пусть ортогональная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна в L. Значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \alpha_k \in \mathbb{R} \ (k = 1, ..., n): \ ||f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k|| < \varepsilon.$$

В силу минимального свойства коэффициентов Фурье $\xi^{(k)}$ $(k = 1, ..., n)$ (см. теорему 6.2 п. 1), тем более

$$||f - \sum_{k=1}^{n} \xi^{(k)} e_k|| \leqslant ||f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k|| < \varepsilon.$$

Значит, $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ n \in \mathbb{N}$, что $||f - \sum_{k=1}^{n} \xi^{(k)} e_k|| < \varepsilon$. Последнее означает сходимость **ряда** Фурье к вектору f.

П. 3 $\Rightarrow$ п. 1 следует из теоремы 6.3 о единственности разложения и определения 6.3 базиса.

П. 3 $\Leftrightarrow$ п. 4. В силу ортогональности системы

$$||\sum_{k=1}^{n} \xi^{(k)} e_k||^2 = (\sum_{k=1}^{n} \xi^{(k)} e_k, \sum_{k=1}^{n} \xi^{(k)} e_k) = \sum_{k=1}^{n} (\xi^{(k)})^2 (e_k, e_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (\xi^{(k)})^2 ||e_k||^2.$$

По этой причине, а также в силу п. 2 теоремы 6.3 и теоремы 6.1 (Пифагора), имеет место последовательность равносильностей:

$$\text{п. } 3 \ \Leftrightarrow \ \lim_{n\to\infty} ||f - \sum_{k=1}^{n} \xi^{(k)} e_k||^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ \lim_{n\to\infty} (||f||^2 - ||\sum_{k=1}^{n} \xi^{(k)} e_k||^2) = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$||f||^2 - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\xi^{(k)})^2 ||e_k||^2 = 0 \Leftrightarrow \text{ п. } 4. \ \blacksquare$$

6.4. Гильбертовы пространства. Полнота бесконечномерного евклидового пространства столь важна, что такому пространству присвоено имя автора:

Определение 6.4. Полное евклидово пространство называется **гильбертовым** (Давид Гильберт, 1862-1943)

Нас интересуют только гильбертовы пространства, обладающие ортогональным **счетным** базисом.

Пример. Пространство l_2 является гильбертовым. Доказательство этого факта не приводим.

Пространства $CL^2[a,b]$ и $L^2_R(a,b)$ не являются полными. Доказательство неполноты $CL^2[a,b]$ осуществляется так же, как в лемме 5.7 о неполноте $CL[a,b]$. Доказательство неполноты $L^2_R(a,b)$ опускаем.

Для евклидовых пространств без изменений определяются понятие плотности евклидового подмногообразия и понятие пополнения (см. определения 5.14 и 5.15). Для гильбертовых пространств справедлива теорема, аналогичная теореме 5.3:

Теорема 6.5. *Всякое евклидово пространство L_1 плотно в некотором гильбертовом пространстве L, т.е. неполное евклидово пространство всегда можно пополнить. Пополнение единственно с точностью до метрической эквивалентности.*

В частности

Определение 6.5. Пополнение пространства $L^2_R(a,b)$ называется **пространством функций квадратично интегрируемых по Лебегу** и обозначается $L^2(a,b)$. Сходимость в $L^2(a,b)$ называют **сходимостью в среднем квадратичном**.

Гильбертовость пространства L делает корректным следующий вопрос: является ли заданная числовая последовательность $\{\xi^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ коэффициентами Фурье некоторого вектора f? Полный ответ на него дает

Теорема 6.6. *(о коэффициентах Фурье, Фридьеш Рисс (1880-1956) – Эрнст Фишер (1875-1954)) Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система в гильбертовом пространстве L. Следующие утверждения о числовой последовательности $\{\xi^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ равносильны:*

1. *Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\xi^{(k)}e_k$ сходится к некоторому вектору $f\in L$ по норме пространства L.*
2. *Числовая последовательность $\{\xi^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ является коэффициентами Фурье некоторого вектора $f\in L$, т.е. $\xi^{(k)}=(f,e_k)/(e_k,e_k)$.*
3. *Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(\xi^{(k)})^2||e_k||^2$ сходится.*

Обсуждение. В пп. 3 и 4 теоремы 6.4 дан вектор, который порождает последовательность коэффициентов Фурье. А в теореме 6.6, наоборот, числовая последовательность порождает вектор.

Доказательство. П. 1 $\Rightarrow$ п. 2. Это теорема 6.3 о единственности разложения по ортогональной системе. Более того, вектор f в п. 2 тот же, что и в п. 1.

П. 2 $\Rightarrow$ п. 3 следует из неравенства Бесселя (следствие 6.2).

П. 3 $\Rightarrow$ п. 1. Именно здесь потребуется полнота пространства L. Рассмотрим последовательность $S_n := \sum_{k=1}^{n} \xi^{(k)} e_k$, которая порождена данной ортогональной системой и данной числовой последовательностью. Воспользовавшись определением фундаментальности по Коши, докажем, что S_n сходится к некоторому вектору $f \in L$. Для этого рассмотрим разность $S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} \xi^{(k)} e_k$. В силу ортогональности системы, получаем

$$||S_{n+p} - S_n||^2 = (S_{n+p} - S_n, S_{n+p} - S_n) = \sum_{k=n+1}^{n+p} (\xi^{(k)})^2 ||e_k||^2.$$

Но, в силу критерия Коши сходимости числового ряда, из условия п. 3 следует, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}:\ \forall p \in \mathbb{N}\ \hookrightarrow\ \sum_{k=n+1}^{n+p} (\xi^{(k)})^2 ||e_k||^2 < \varepsilon.$$

Значит, последовательность S_n фундаментальна и в полном пространстве L сходится к некоторому вектору f. ■

Следствие 6.3. *Все гильбертовы пространства со счетным ортогональным базисом изоморфны, в частности они изоморфны пространству l_2. Т.е. между любыми двумя такими пространствами существует биекция $F : L_1 \leftrightarrow L_2$, сохраняющая скалярное произведение: $(x_1, x_2)_1 = (Fx_1, Fx_2)_2$.*

Доказательство. Ортогональные базисы всегда можно пронормировать, поэтому считаем, что базисы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L_1$ и $\{e'_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L_2$ ортонормированны. Искомая биекция F (отнюдь не единственная!) может быть определена так: $F(x) = y$ тогда и т.т., когда векторы x и y имеют совпадающие коэффициенты Фурье в указанных базисах соответственно. ■

Задача. Завершите доказательство.

6.5. Замкнутость системы. Для счетной системы векторов $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ мы ввели характеристики полноты (определение 5.17), ортогональности (определение 6.1) и базисности (определение 6.3) и выяснили их взаимосвязи. Сейчас мы введем еще одну характеристику:

Определение 6.6. Система векторов $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ евклидового пространства L называется **замкнутой**, если не существует ненулевого вектора $f \in L$, ортогонального одновременно всем векторам e_k системы. Иначе, система **незамкнута**, если

$$\exists f \neq 0 : \forall k \in \mathbb{N}:\ (f, e_k) = 0.$$

К замкнутости подмножества понятие замкнутости системы отношения не имеет! Связи между всеми введенными понятиями описывает следующая

Теорема 6.7. *Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система в евклидовом пространстве L. Следующие утверждения равносильны:*

1. *система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – базис в L;*
2. *система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна в L;*

3. *для каждого вектора $f \in L$ его ряд Фурье по системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к нему по норме $||\cdot||$ пространства L – равенство (6.2);*
4. *для каждого вектора $f \in L$ выполняется равенство Парсеваля (6.3).*

Каждое из перечисленных условий 1-4 влечет условие

5. система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута в L.

Если же пространство L гильбертово, то для ортогональной системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ условия 1-5 равносильны.

Доказательство. Равносильность утверждений 1-4 есть теорема 6.4.

Докажем, что п. 3 $\Rightarrow$ п. 5. Пусть вектор $f \in L$ такой, что для любого $k \in \mathbb{N}$ скалярное произведение $(f, e_k) = 0$. Для доказательства замкнутости требуется убедиться, что $f = 0$. Но равенства $(f, e_k) = 0$ для произвольного $k \in \mathbb{N}$ означают, что все коэффициенты Фурье вектора f равны нулю. Значит ряд Фурье сходится, причем к нулевому вектору. Из п. 3 следует, что ряд Фурье вектора f сходится именно к f. Получается, что $f = 0$. Поскольку утверждения 1-4 равносильны, каждое из них влечет п. 5.

Пусть теперь L – гильбертово пространство. Покажем, что п. 5 $\Rightarrow$ п. 3. Для этого нам придется привлечь все предыдущие утверждения. Пусть f – произвольный фиксированный вектор. Вычислим его все коэффициенты Фурье $\xi^{(k)} := (f, e_k)/(e_k, e_k)$ ($k \in \mathbb{N}$). В силу неравенства Бесселя (следствие 6.2), числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(\xi^{(k)})^2||e_k||^2$ сходится.

Поэтому, согласно теореме 6.6 (Рисса-Фишера) векторный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\xi^{(k)}e_k$ сходится в L к некоторому вектору $\hat{f}$.

По теореме 6.3 о единственности разложения вектора числа $\xi^{(k)}$ ($k \in \mathbb{N}$) являются коэффициентами Фурье вектора $\hat{f}$. Т.е.

$$\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow \frac{(f, e_k)}{(e_k, e_k)} = \frac{(\hat{f}, e_k)}{(e_k, e_k)} \Rightarrow (f - \hat{f}, e_k) = 0.$$

В силу замкнутости системы, $f - \hat{f} = 0$. Значит, $f = \hat{f} = \sum_{k=1}^{\infty}\xi^{(k)}e_k$. Мы получили утверждение п. 3. ∎

§ 7. Тригонометрические ряды Фурье для функций абсолютно интегрируемых с квадратом

Мы возвращаемся к РФ в пространстве $L^2_R(-\pi,\pi)$, вооруженные теоремой 6.4 об ортогональной системе в евклидовом пространстве. Чтобы ее применить, нужно доказать, что тригонометрическая система полна в $L^2_R(-\pi,\pi)$. Мы не вправе применить теорему 6.6 (Рисса-Фишера) об ортогональной системе в гильбертовом пространстве, поскольку пространство $L^2_R(-\pi,\pi)$ (в отличие от $L^2(-\pi,\pi)$) не является полным (этот факт указывает, что ряды Фурье целесообразно исследовать именно в пространстве $L^2(-\pi,\pi)$).

7.1. Полнота тригонометрической системы в $L^2_R(-\pi,\pi)$. Нам потребуются две вспомогательные леммы.

Лемма 7.1. *(об аппроксимации функций из $L^2_R(a,b)$ кусочно-постоянными) Множество $L^2_{pc}(a,b)$ кусочно-постоянных на (a,b) функций (piecewise constant function, см. определение 1.2) является плотным подмножеством пространства $L^2_R(a,b)$, т.е.*

$$\forall f\in L^2_R(a,b)\ \forall\varepsilon>0\ \exists\ c_\varepsilon(x)\in L^2_{pc}(a,b):\ ||f-c_\varepsilon||_2<\varepsilon.$$

Доказательство. Во-первых, если функция $c(x)$ кусочно-постоянная, то $c\in L^2_R(a,b)$ и при любом доопределении $c(a)$ и $c(b)$ функция $c^2(x)$ интегрируема на $[a,b]$ по Риману. Во-вторых, подмножество $L^2_{pc}(a,b)\subset L^2_R(a,b)$ образует нормированное подмногообразие в нормированном пространстве $L^2_R(a,b)$ (докажите!), однако для доказательства леммы нам этот факт не потребуется. Само доказательство аналогично доказательству теоремы 1.3 (Римана об осцилляции). Осуществим его в три этапа.

1) Пусть f интегрируема по Риману на $[a,b]$. Тогда f ограничена на $[a,b]$: $C=\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|\in\mathbb{R}$. В силу критерия интегрируемости, для любого $\varepsilon>0$ существует разбиение $\{x_i\}_{i=0}^I\subset[a,b]$ $(x_0=a,\ x_I=b)$, для которого

$$\sum_{i=1}^I(M_i-m_i)\Delta x_i<\frac{\varepsilon^2}{2C},\ \text{где } M_i=\sup_{[x_i,x_{i-1}]}f(x),\ m_i=\inf_{[x_i,x_{i-1}]}f(x).$$

Определим кусочно-постоянную функцию $c_\varepsilon(x):=m_i$ при $x\in(x_i,x_{i-1})$ (i=1,...,I) и произвольно в точках разбиения. Тогда

$$||f-c_\varepsilon||_2^2=\int\limits_a^b(f-c_\varepsilon)^2dx\leqslant\sum_{i=1}^I(M_i-m_i)^2\Delta x_i<2C\sum_{i=1}^I(M_i-m_i)\Delta x_i<\varepsilon^2.$$

2) Пусть функция f^2 абсолютно интегрируема на $[a,b]$ и имеет одну особенность в конце отрезка; допустим, в точке b. Тогда, в силу определения абсолютной интегрируемости и п. 1), получаем

$$\forall\varepsilon>0\ \exists b'\in[a,b)\ \wedge\ \exists c_\varepsilon\in PC(a,b'):\ \int_{b'}^b f^2(x)dx<\frac{\varepsilon^2}{2}\ \wedge\ \int_a^{b'}(f-c_\varepsilon)^2dx<\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Доопределим функцию $c_\varepsilon(x) := 0$ при $x \in (b', b]$. Тогда на $[a, b]$ справедливо:

$$||f - c_\varepsilon||_2^2 = \int_a^{b'} (f - c_\varepsilon)^2 dx + \int_{b'}^b f^2(x) dx < \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2.$$

3) Рассмотрим общий случай – функция f имеет конечное количество особенностей x_i $(i = 0, ..., N)$, в число которых (для единообразия) мы включили $a = x_0$ и $b = x_N$. В этом случае весь отрезок можно разбить на $2N$ подотрезков

$$[a_{j-1}, a_j] \;\; (j = 1, ..., 2N), \text{ где } a_{2i} = x_i \text{ и } a_{2(i-1)} < a_{2i-1} < a_{2i} \; (i = 0, ..., N).$$

На каждом подотрезке особенность одна – в одном из его концов. Согласно п. 2, на каждом подотрезке найдется кусочно-постоянная функция $c_\varepsilon^{(j)}$, для которой

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} (f - c_\varepsilon^{(j)})^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{2N}, \; j = 1, ..., 2N.$$

Положим $c_\varepsilon(x) := c_\varepsilon^{(j)}$ при $x \in (a_{j-1}, a_j)$, а $c_\varepsilon(a_j)$ определим произвольно. В результате на $[a, b]$ получаем:

$$||f - c_\varepsilon||_2^2 = \sum_{j=1}^{2N} \int_{a_{j-1}}^{a_j} (f - c_\varepsilon^{(j)})^2 dx < 2N \cdot \frac{\varepsilon^2}{2N} = \varepsilon^2. \;\; \blacksquare$$

Обозначим через $CL_0^2[a, b] \subset L_R^2(a, b)$ нормированное подмногообразие непрерывных функций g, удовлетворяющих **однородному краевому условию** $g(a) = g(b) = 0$.

Задача. Докажите, что подмножество $CL_0^2[a, b] \subset L_R^2(a, b)$ именно нормированное подмногообразие.

Лемма 7.2. *(об аппроксимации кусочно-постоянных функций функциями из* $CL_0^2[a, b]$*) Справедливо утверждение:*

$$\forall c \in L_{pc}^2(a, b) \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \; g_\varepsilon(x) \in CL_0^2[a, b] : \; ||c - g_\varepsilon||_2 < \varepsilon.$$

Замечание. Пространство $CL_0^2[a, b]$ как множество не принадлежит пространству $L_{pc}^2(a, b)$, поэтому мы не можем обсуждать его плотность в $L_{pc}^2(a, b)$. Однако оба пространства являются нормированными подмногообразиями пространства $L_R^2(a, b)$. Именно это обстоятельство позволяет исследовать указанную аппроксимацию.

Доказательство. Пусть $\{x_i\}_{i=0}^I \subset [a, b]$ – точки скачков кусочно-постоянной функции $y = c(x)$, причем $x_0 = a$, $x_I = b$. Рассмотрим δ-окрестности $(x_i - \delta, x_i + \delta)$ точек x_i (для концов отрезка это будут полуокрестности). Пусть $C = \max_{[a,b]}\{c(x)\}$. Возьмем $\delta < \varepsilon^2/(8C^2 I)$ (число δ заведомо меньше, чем мелкость разбиения $\{x_i\}$, если ε достаточно мало). На координатной плоскости (x, y) рассмотрим ломаную G с вершинами (см. рис. ???)

$$A_0(a, 0), A_0^+(x_0 + \delta, c(x_1 + \delta)), A_1^-(x_1 - \delta, c(x_1 - \delta)), A_1^+(x_1 + \delta, c(x_1 + \delta)), ...,$$

$$A_i^-(x_i - \delta, c(x_i - \delta)), A_i^-(x_i - \delta, c(x_i + \delta)), ..., A_I^-(x_I - \delta, c(x_I - \delta)), A_I(b, 0).$$

Рис. ???

Ломаная является графиком функции $g_\varepsilon \in C_0^0[a,b]$, которая отличается от кусочно-постоянной функции только в δ-окрестностях точек x_i. Тогда

$$||c - g_\varepsilon||_2^2 = \int_a^{a+\delta} (c-g_\varepsilon)^2 dx + \sum_{i=1}^{I-1} \int_{x_i-\delta}^{x_i+\delta} (c-g_\varepsilon)^2 dx + \int_{b-\delta}^{b} (c-g_\varepsilon)^2 dx \leqslant$$

$$(2C)^2 2I\delta < \varepsilon^2. \blacksquare$$

Теперь мы докажем основное утверждение

Теорема 7.1. *Тригонометрическая система полна в пространстве* $L_R^2(-\pi,\pi)$.

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $f \in L_R^2(-\pi,\pi)$ и произвольное $\varepsilon > 0$. В силу леммы 7.1, существует такая кусочно-постоянная функция $c_{\varepsilon/3} \in L_{pc}^2(-\pi,\pi)$, что $||f - c_{\varepsilon/3}||_2 < \varepsilon/3$. В силу леммы 7.2, существует такая непрерывная функция $g_{\varepsilon/3} \in CL_0^2[-\pi,\pi]$, удовлетворяющая однородному краевому условию, что $||c_{\varepsilon/3} - g_{\varepsilon/3}||_2 < \varepsilon/3$. Наконец, из п. 1 теоремы 5.6 следует, что существует такой тригонометрический многочлен $T_n(x)$, что $||g_{\varepsilon/3} - T_n||_C < \varepsilon/(3\sqrt{2\pi})$. Применяя неравенство треугольника и п. 1 леммы 6.2, получаем

$$||f - T_n||_2 \leqslant ||f - c_{\varepsilon/3}||_2 + ||c_{\varepsilon/3} - g_{\varepsilon/3}||_2 + ||g_{\varepsilon/3} - T_n||_2 <$$

$$\frac{2\varepsilon}{3} + \sqrt{2\pi}||g_{\varepsilon/3} - T_n||_C < \varepsilon. \blacksquare$$

Попутно мы установили, что

Следствие 7.1. *Нормированное подмногообразие* $CL^2[a,b]$ *плотно в* $L_R^2(a,b)$.

Доказательство Из доказательства теоремы 7.1 следует, что пространство $CL_0^2[a,b]$ является плотным нормированным подмногообразием $L_R^2(a,b)$. Но $CL_0^2[a,b] \subset CL^2[a,b] \subset L_R^2(a,b)$, что уже доказывает следствие. Более того, оказалось, что аппроксимировать функции из $L_R^2(a,b)$ можно, используя только такие непрерывные функции, которые удовлетворяют однородному краевому условию. (Этот факт, конечно, является следствием **интегральной** нормировки в пространстве $L_R^2(a,b)$.) $\blacksquare$

Замечание. Аналогично теореме 7.1 доказывается п. 3 теоремы 5.6 о полноте тригонометрической системы в пространстве $L_R(a,b)$. Аналогично следствию 7.1 доказывается теорема 5.5 о плотности $CL[a,b]$ в $L_R(a,b)$.

Задача. Докажите п. 3 теоремы 5.6 и теорему 5.5.

7.2. Тригонометрическая система как ортогональный базис в $L_R^2(-\pi,\pi)$. Из теоремы 1.1 (об ортогональности тригонометрической системы), теоремы 7.1 о ее полноте и теоремы 6.4 (об ортогональной системе) сразу вытекает

Теорема 7.2. *(об ортогональном тригонометрическом базисе) Справедливы следующие утверждения:*

1. *тригонометрическая система – ортогональный базис в* $L_R^2(-\pi,\pi)$;

2. *для произвольной функции* $f \in L^2_R(-\pi,\pi)$ *ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится к ней по норме* $||\cdot||_2$ *пространства* $L^2_R(-\pi,\pi)$:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \text{ в } L^2_R(-\pi,\pi) \;\Leftrightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f - a_0 - \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right)^2 dx = 0,$$

где a_{k-1}, b_k $(k \in \mathbb{N})$ *– коэффициенты Фурье функции* f *по тригонометрической системе;*

3. *для произвольной функции* $f \in L^2_R(-\pi,\pi)$ *выполняется равенство Парсеваля*

$$\pi \left(2a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \right) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx. \tag{7.1}$$

Формула (7.1) дает нам усиленное

Теорема 7.3. *(достаточное условие равномерной сходимости РФ) Пусть функция* f *кусочно-гладкая на* $[-\pi,\pi]$ *и удовлетворяет условию периодичности* $f(-\pi) = f(\pi)$. *Тогда ее ряд Фурье сходится к ней равномерно на* $[-\pi,\pi]$.

Замечание. В следствии 2.3 при тех же предположениях мы доказали только поточечную сходимость РФ, а в следствии 3.2 равномерная сходимость РФ доказана при дополнительном условии кусочной непрерывности второй производной. Значит, методами функционального анализа можно усиливать результаты классического.

Доказательство. Пусть a_k, b_k $(k \in \mathbb{N})$ – коэффициенты Фурье функции f. К функции f применима теорема 3.1 о почленном дифференцировании. Поэтому коэффициенты Фурье α_k и β_k функции $f'(x)$ удовлетворяют равенствам $|\alpha_k| = k|b_k|$, $|\beta_k| = k|a_k|$ (см. (3.1)). Поскольку функция f' кусочно-непрерывна, то тем более $f' \in L^2_R(-\pi,\pi)$, и ее коэффициенты Фурье удовлетворяют равенству Парсеваля (7.1). Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2+b_k^2)$ сходится. Применяя неравенство $2|pq| \leqslant (p^2+q^2)$ к парам $p = k|a_k|$, $q = 1/k$ и $p = k|a_k|$, $q = 1/k$, получаем оценку функционального ряда сходящимся числовым:

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k \cos kx + b_k \sin kx| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k|a_k|\frac{1}{k} + k|b_k|\frac{1}{k}) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(k^2a_k^2 + \frac{1}{k^2} + k^2b_k^2 + \frac{1}{k^2}) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty.$$

В силу признака Вейерштрасса, функциональный ряд

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

сходится равномерно. ■

7.3. Сводка сведений о функциональных пространствах и системах функций. Для метода функционального анализа характерно одновременное использование нескольких пространств и подпространств, между которыми имеются многочисленные связи. Ниже в таблице собраны некоторые уже установленные нами связи. Знак $\cup$ обозначает подпространство или подмногообразие. Стрелки $\to$ или $\uparrow$ обозначают полную систему функций, стрелки $\leftrightarrows$ обозначают базис, стрелка $\upharpoonleft$ означает аппроксимацию функций одного пространства функциями другого.

$(b-a)\|\|f\|\|_C \ \geqslant$		$\sqrt{b-a}\ \|\|f\|\|_2 \ \geqslant$		$\|\|f\|\|_1$
$\{x^k\}_{k=0}^{\infty} \to$	$C^0[a,b]$ банахово	$\{TC\} \leftrightarrows$	$L^2_R(-\pi,\pi)$ евклидово неполное	$L_R(a,b)$ нормиров. неполное
$\cup$ $PC[a,b]$ мн-зие мног-в	$\cup$ $C^0_{per}[-\pi,\pi]$ пр. пер. ф-й $\{TC\}\uparrow$	$\cup$ $L^2_{pc}(-\pi,\pi)$ мн-зие кус.-пост. $\upharpoonleft$	$\cup$ $CL^2[-\pi,\pi]$ мн. непр. $\cup$ $CL^2_0[-\pi,\pi]$ одн. кр. усл.	$\cup$ $CL[a,b]$ мн. непр.

7.4. Многочлены Лежандра. Согласно теореме 6.4, любая полная ортогональная система является базисом. Одна только полнота системы не гарантирует базисности системы.

Лемма 7.3. *(о системе одночленов) Система одночленов $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ полна в пространстве $L^2_R(-1,1)$, но не является в нем базисом.*

Доказательство. Из плотности вложения подмногообразия $CL^2[-1,1]$ в $L^2_R(-1,1)$ (следствие 7.1) следует, что

$$\forall f \in L^2_R(-1,1)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\ g \in CL^2[-1,1] : ||f-g||_2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из полноты системы $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ в $C^0[-1,1]$ (теорема 5.6 п. 2) следует, что существуют такие числа $\{\alpha_0(\varepsilon), ..., \alpha_n(\varepsilon)\}$, что

$$||g - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k||_C < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}.$$

Для любой функции $h \in CL^2[-1,1]$ справедлива оценка $||h||_2 \leqslant \sqrt{2}||h||_C$ (лемма 6.2). Следовательно,

$$||f - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k||_2 \leqslant ||f-g||_2 + ||g - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k||_2 \leqslant$$

$$||f-g||_2+\sqrt{2}||g-\sum_{k=0}^{n}\alpha_k x^k||_C<\varepsilon.$$

Полнота системы доказана.

Если же допустить, что система одночленов есть базис в $L^2_R(-1,1)$, то для произвольной функции $f(x)\in L^2_R(-1,1)$ существует такая последовательность $S_n(x)=\sum_{k=0}^n a_k x^k$ частичных сумм степенного ряда, что $||S_n(x)-f(x)||_2\to 0$ при $n\to\infty$. Рассмотрим степенной ряд $\sum_{k=0}^\infty\int_0^x a_k t^k dt$, полученный формальным интегрированием исходного степенного ряда. Покажем, что он сходится при $x=1$ к числу $\int_0^1 f(x)dx$:

$$\Big|\int_0^1(S_n(x)-f(x))dx\Big|\leqslant\int_0^1|S_n(x)-f(x)|dx\leqslant\int_{-1}^1|S_n(x)-f(x)|dx\leqslant$$

$$\sqrt{2}\left(\int_{-1}^1(S_n(x)-f(x))^2dx\right)^{1/2}=\sqrt{2}||S_n(x)-f(x)||_2\to 0\text{ при }n\to\infty.$$

Следовательно, радиус сходимости степенного ряда, полученного формальным интегрированием исходного ряда, не меньше единицы. Из теорем 2.11.8 и 2.12.1 следует, что на любом отрезке $[-1+\varepsilon,1-\varepsilon]$ $(0<\varepsilon<1)$ исходный степенной ряд $\sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ сходится равномерно, причем к бесконечно дифференцируемой функции. Если же мы возьмем в качестве исходной функции, например, $f(x)=|x|\in L^2_R(-1,1)$, то получим противоречие. В самом деле, равенство двух **непрерывных** функций в пространстве $L^2_R(-1,1)$ означает их поточечное совпадение (см. доказательство леммы 5.6). Если же допустить, что $|x|\equiv\sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ на $(-1,1)$, то получим, что функция $|x|$ бесконечно дифференцируема. ■

Однако, как будет доказано ниже, **ортогонализация системы одночленов** превращает ее в базис в пространстве $L^2_R(-1,1)$. Так возникают многочлены Лежандра (Адриен Мари Лежандр, 1752 — 1833). Найдем, кроме исходного $l_0(x):=1$, еще два следующих многочлена:

$$l_1(x)=x+\alpha\cdot 1\ \Rightarrow\ \int_{-1}^1 1\cdot(\alpha+x)dx=0\ \Rightarrow\ \alpha=0\ \Rightarrow\ l_1(x)=x;$$

$$l_2(x)=x^2+\alpha x+\beta\cdot 1\ \Rightarrow\ \begin{cases}\int\limits_{-1}^{1}1\cdot(x^2+\alpha x+\beta)dx=0,\\ \int\limits_{-1}^{1}x\cdot(x^2+\alpha x+\beta)dx=0\end{cases}\Rightarrow l_2(x)=x^2-\frac{1}{3}.$$

Оказывается, результат ортогонализации можно записать (с точностью до коэффициентов) в виде формулы Родрига (Бенжамен Олинд Родриг, 1795 — 1851), которую мы примем как определение:

Лемма 7.4. ***Многочлены Лежандра***

$$L_0(x)=1,\ L_n(x):=\frac{1}{n!2^n}\ \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,\ n\in\mathbb{N}\tag{7.2}$$

1. *имеют степень, совпадающую с номером n и ту же четность, что и четность n;*
2. $L_n(1) = 1$, $L_n(-1) = (-1)^n$, $|L_n(x)| < 1$ *при* $x \in (1, 1)$, $|L_{2n}(0)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$*;*
3. *многочлен с номером n имеет на интервале $(-1, 1)$ в точности n нулей;*
4. *образуют ортогональную систему в* $L^2_R(1, 1)$.

Графики первых пяти многочленов см. на рис. ???

Рис. ???

Задача. Проверьте, что многочлены l_2 и L_2 отличаются коэффициентом.

Доказательство п. 1. Многочлен $(x^2 - 1)^n$ имеет степень $2n$ и является четным. После n дифференцирований его степень равна n. Каждое дифференцирование меняет его четность на противоположную.

Доказательство п. 4. Требуется доказать, что для произвольных $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n > m$ выполняется

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n \cdot \frac{d^m}{dx^m}(x^2 - 1)^m \, dx = 0.$$

Поскольку $(x^2 - 1)^n = (x - 1)^n (x + 1)^n$, то k-я производная при $k = 1, ..., n - 1$ имеет вид $((x - 1)^n (x + 1)^n)^{(k)} = (x - 1)^{n-k} g_k(x)$, где $g_k(x)$ – некоторый многочлен. Значит, $((x - 1)^n (x + 1)^n)^{(k)}|_{x=1} = 0$. Аналогично рассуждая, получаем что $((x - 1)^n (x + 1)^n)^{(k)}|_{x=-1} = 0$. Применим к интегралу I интегрирование по частям n раз. В силу доказанных краевых свойств, внеинтегральные слагаемые обнуляются и мы получаем

$$I = (-1)^n \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^n \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2 - 1)^m \, dx.$$

Но многочлен $(x^2 - 1)^m$ имеет степень $2m$, а $m + n > 2m$. Следовательно, $((x^2 - 1)^m)^{(m+n)} \equiv 0$. ■

Приступим к доказательству полноты системы многочленов Лежандра. Поскольку процесс ортогонализации на каждом шаге обратим, то справедлива

Лемма 7.5. *Любой алгебраический многочлен можно представить на отрезке $[-1, 1]$ в виде конечной линейной комбинации многочленов Лежандра.*

Замечание. Утверждение леммы справедливо на произвольном промежутке (в том числе и на всей числовой оси), но доказательство требует дополнительных рассуждений.

Доказательство. Пусть $P_n[-1, 1]$ – линейное пространство многочленов $p_n(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ степени не выше n, т.е. линейная оболочка одночленов $\{1, x, ...x^n\}$. Следовательно, размерность $dim P_n[-1, 1] \leqslant n + 1$. С другой стороны, поскольку многочлены Лежандра попарно ортогональны на $[-1, 1]$, то набор функций $\{L_0, ..., L_n\}$ линейно независим на отрезке $[-1, 1]$. Но, в силу п. 1 леммы 7.4, каждый многочлен $L_k \in P_n[-1, 1]$ $(k = 0, ..., n)$. Значит размерность $dim P_n[-1, 1] \geqslant n + 1$. Последнее означает, что $dim P_n[-1, 1] = n + 1$, а набор $\{L_0, ..., L_n\}$ является в пространстве $P_n[-1, 1]$ базисом. Следовательно, любой многочлен из $P_n[-1, 1]$ представим, причем единственным образом, в виде линейной комбинации многочленов Лежандра степеней не выше n. ■

Переходим к основному утверждению:

Теорема 7.4. *(о полноте и базисности системы Лежандра) Система многочленов Лежандра полна в пространствах $C^0[-1,1]$ и $L^2_R(-1,1)$ и является базисом пространства $L^2_R(-1,1)$. Ряд Фурье произвольной функции $f \in L^2_R(-1,1)$ по системе многочленов Лежандра сходится к ней в смысле среднего квадратичного.*

Доказательство. Поскольку система $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ полна в $C^0[-1,1]$ (теорема 5.6 п. 2), а любой многочлен на отрезке $[-1,1]$ представим как конечная комбинация многочленов Лежандра (лемма 7.5), то система многочленов Лежандра полна в $C^0[-1,1]$. Аналогично, поскольку система $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ полна в $L^2_R(-1,1)$ (лемма 7.3), то из леммы 7.5 следует полнота многочленов Лежандра в $L^2_R(-1,1)$.

Но полнота системы полиномов Лежандра и их ортогональность гарантируют (теорема 6.4, пп. 1, 2 и 3) базисность системы и разложение по ней в ряд Фурье произвольной функции $f \in L^2_R(-1,1)$. ■

§ 8. Интегралы, зависящие от параметра

Мы изучим зависимость интегралов $I(t) := \int_a^b f(x,t)dx$ (собственных и несобственных) от параметра t. Такие интегралы возникают в теории дифференциальных уравнений, уравнениях математической физики, теории вероятностей. Их можно понимать как эффективный "способ конструирования" функций, обладающих определенными свойствами, которые не выражаются через элементарные функции. Например, Эйлеровы интегралы, интеграл Фурье, преобразование Фурье, интеграл вероятности и др. Наша цель показать, как "хорошие"свойства подынтегральной функции $f(x,t)$ от **двух** переменных порождают аналогичные свойства функции I, зависящей от одной переменной.

8.1. Собственные интегралы с параметром.

Теорема 8.1. *(о непрерывности интеграла по параметру) Пусть функция $f(x,t)$ непрерывна на прямоугольнике $\Pi = [a,b] \times [c,d]$ как функция двух переменных. Тогда функция $I(t) = \int_a^b f(x,t)dx$ непрерывна на $[c,d]$; причем предельный переход по переменной t можно осуществлять под знаком интеграла:*

$$\forall t_0 \in [c,d] \;\hookrightarrow\; \lim_{t\to t_0} \int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b \lim_{t\to t_0} f(x,t)dx = \int_a^b f(x,t_0)dx.$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что для каждого фиксированного $t \in [c,d]$ интеграл $\int_a^b f(x,t)dx$ существует. Значит, функция $I(t)$ определена. Далее, непрерывная на компакте Π функция равномерно непрерывна, поэтому

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) :\ \forall (x_1,t_1),(x_2,t_2) \in \Pi\ \&\ (x_2-x_1)^2 + (t_2-t_1)^2 < \delta^2 \;\hookrightarrow$$
$$|f(x_2,t_2) - f(x_1,t_1)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) :\ \forall t \in [c,d]\ \&\ |t-t_0| < \delta \;\hookrightarrow$$
$$|I(t) - I(t_0)| = \Big|\int_a^b (f(x,t) - f(x,t_0))dx\Big| \leqslant$$
$$\int_a^b |f(x,t) - f(x,t_0)|dx < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon. \blacksquare$$

Из теоремы 3.3.9 о повторном интеграле, (см. также Замечание 3 и Пример в конце п. 3.3.5) сразу следует

Лемма 8.1. *(об интегрировании интеграла по параметру) Пусть существует кратный интеграл $\int_\Pi f(x,t)dxdt$. Пусть для каждого $t \in [c,d]$ существует собственный интеграл $\int_a^b f(x,t)dx$, а для каждого $x \in [a,b]$ существует собственный интеграл $\int_c^d f(x,t)dt$. Тогда*

$$\int_c^d dt \int_a^b f(x,t)dx = \int_\Pi f(x,t)dxdt = \int_a^b dx \int_c^d f(x,t)dt. \tag{8.1}$$

В частности, если функция $f(x,t)$ непрерывна на прямоугольнике Π как функция двух переменных, то равенства (8.1) истинны.

Теорема 8.2. *(о дифференцировании интеграла по параметру) Пусть функция* $f(x,t)$ *и ее частная производная* $f'_t(x,t)$ *непрерывны на прямоугольнике* $\Pi = [a,b]\times[c,d]$ *как функция двух переменных. Тогда функция* $I(t) = \int_a^b f(x,t)dx$ *дифференцируема на* $[c,d]$*, причем дифференцирование можно внести под знак интеграла:*

$$\forall t_0 \in [c,d] \ \hookrightarrow \ I'(t_0) = \int_a^b f'_t(x,t_0)dx.$$

Доказательство. При любом фиксированном $x \in [a,b]$ функция $f'_t(x,t)$ непрерывна по переменной t. Поэтому по переменной t применима формула Ньютона-Лейбница и

$$f(x,t) = f(x,t_0) + \int_{t_0}^t f'_s(x,s)ds.$$

Применяя равенство (8.1), получаем

$$I(t) := \int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b \left(f(x,t_0) + \int_{t_0}^t f'_s(x,s)ds\right)dx =$$

$$\int_a^b f(x,t_0)dx + \int_{t_0}^t \left(\int_a^b f'_s(x,s)dx\right)ds.$$

Дифференцируя по t полученное тождество и воспользовавшись теоремой 8.1 для функции $J(t) := \int_a^b f'_t(x,t)$ в точке t_0, получаем требуемое равенство. ■

Следствие 8.1. *(формула дифференцирования интеграла по параметру) Пусть функции* $\varphi,\ \psi \in C^1[c,d]$ *и* $\forall t \in [c,d]$ *верно* $a \leqslant \varphi(t) \leqslant \psi(t) \leqslant b$*. Пусть функция* $f(x,t)$ *и ее частная производная* $f'_t(x,t)$ *непрерывны как функции двух переменных на таком открытом прямоугольнике* $(A,B)\times(C,D)$*, что* $[a,b]\times[c,d] \subset (A,B)\times(C,D)$*. Тогда функция* $I(t) := \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(x,t)dx$ *дифференцируема на* $[c,d]$ *и*

$$I'(t) = f(\psi(t),t)\psi'(t) - f(\varphi(t),t)\varphi'(t) + \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f'_t(x,t)dx. \tag{8.2}$$

Доказательство. Определим функцию трех переменных

$$J : \mathbb{R}^3 \supset U := (A,B)\times(A,B)\times(C,D) \to \mathbb{R}, \quad J(\varphi,\psi,t) := \int_\varphi^\psi f(x,t)dx.$$

В силу формулы Ньютона-Лейбница и теоремы 8.2, в каждой точке открытого параллелепипеда U существуют и непрерывны частные производные

$$J'_\varphi = -f(\varphi,t),\ J'_\psi = f(\psi,t), \quad J'_t = \int_\varphi^\psi f'_t(x,t)dx.$$

Значит, функция $J \in C^1(U)$. Функция одной переменной $I(t) = J(\varphi(t),\psi(t),t)$ является сложной функцией. В силу теоремы 2.4.4 (о дифференцировании суперпозиции отображений), функция $I(t)$ непрерывно дифференцируема и ее производная вычисляется как раз по формуле (8.2). ■

8.2. Равномерная сходимость несобственных интегралов с параметром. Рассмотрим несобственный интеграл (НИ) $I(t) = \int_a^{\to b} f(x,t)dx$ с единственной особой точкой $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Параметр принадлежит промежутку $t \in \langle c, d\rangle$ с конечными или бесконечными концами. Функция $I(t)$ поддается исследованию, если сходимость интеграла обладает таким свойством:

Определение 8.1. Пусть для любого $t \in \langle c, d\rangle$ интеграл $\int_a^{\to b} f(x,t)dx$ сходится. НИ $\int_a^{\to b} f(x,t)dx$ называется **сходящимся равномерно на** $\langle c, d\rangle$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists b' \in (a,b): \ \forall \xi \in (b',b) \ \& \ \forall t \in \langle c,d\rangle \ \hookrightarrow \ \Big|\int_\xi^{\to b} f(x,t)dx\Big| < \varepsilon.$$

Обсуждение. Равномерная сходимость НИ аналогична равномерной сходимости функционального ряда (определения 2.10.2 и 2.10.3). При этом несобственный интеграл $\int_a^{\to b} f(x,t)dx$ – аналог функционального ряда $\sum_{k=1}^\infty a_k(x)$, собственный интеграл $\int_a^{\xi} f(x,t)dx$ – аналог частичной суммы $\sum_{k=1}^n a_k(x)$, несобственный интеграл $\int_\xi^{\to b} f(x,t)dx$ – остатка ряда $\sum_{k=n+1}^\infty a_k(x)$, а параметр t – аналог аргумента x.

Теорема 8.3. *(критерий Коши равномерной сходимости НИ) Пусть для любого $t \in \langle c,d\rangle$ и любого $b' \in (a,b)$ существует собственный интеграл $\int_a^{b'} f(x,t)dx$. НИ $\int_a^{\to b} f(x,t)dx$ сходится равномерно на $\langle c,d\rangle$ тогда и т.т., когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists b' \in (a,b): \ \forall \xi, \xi' \in (b',b) \ \& \ \forall t \in \langle c,d\rangle \ \hookrightarrow \ \Big|\int_\xi^{\xi'} f(x,t)dx\Big| < \varepsilon. \quad (8.3)$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Из определения 8.1 следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists b' \in (a,b): \ \forall \xi \in (b',b) \ \& \ \forall t \in \langle c,d\rangle \ \hookrightarrow \ \Big|\int_\xi^{\to b} f(x,t)dx\Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому $\forall \xi, \xi' \in (b',b)$ и $\forall t \in \langle c,d\rangle$

$$\Big|\int_\xi^{\xi'} f(x,t)dx\Big| = \Big|\int_\xi^{\to b} f(x,t)dx - \int_{\xi'}^{\to b} f(x,t)dx\Big| \leqslant$$

$$\Big|\int_\xi^{\to b} f(x,t)dx\Big| + \Big|\int_{\xi'}^{\to b} f(x,t)dx\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Из условия (8.3) следует, что для каждого фиксированного $t \in \langle c,d\rangle$ для НИ $\int_a^{b\leftarrow} f(x,t)dx$ выполнено условие Коши. Значит, (теорема 2.8.6) НИ $\int_a^{b\leftarrow} f(x,t)dx$ сходится. Поэтому в условии (8.3) можно перейти к пределу при $\xi' \to b$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists b' \in (a,b): \ \forall \xi \in (b',b) \ \& \ \forall t \in \langle c,d\rangle \ \hookrightarrow \ \Big|\int_\xi^{\to b} f(x,t)dx\Big| \leqslant \varepsilon.$$

Что совпадает с определением РС. ■

Замечание. Критерием Коши удобно пользоваться для доказательства отсутствия равномерной сходимости НИ. Запишем отрицание условия Коши:

$$\exists\varepsilon_0 > 0 : \ \forall b' \in (a,b) : \ \exists \xi, \xi' \in (b', b) \ \& \ \exists t \in \langle c,d\rangle : \ \Big| \int_{\xi}^{\xi'} f(x,t)dx \Big| \geqslant \varepsilon_0.$$

Для доказательства равномерной сходимости НИ удобно применять достаточные признаки.

Теорема 8.4. *(признак Вейерштрасса) Пусть функции*

$$f : [a,b) \times \langle c,d\rangle \to \mathbb{R}, \quad g : [a,b) \to \mathbb{R}$$

такие, что

1. $\forall \xi \in (a,b)\ \forall t \in \langle c,d\rangle$ *существует интеграл Римана* $\int_a^{\xi} f(x,t)dx$;
2. $\forall (x,t) \in [a,b) \times \langle c,d\rangle \ \hookrightarrow \ |f(x,t)| \leqslant g(x)$;
3. *интеграл* $\int_a^{\to b} g(x)dx$ *сходится.*

Тогда интеграл $\int_a^{\to b} f(x,t)dx$ *сходится равномерно на* $\langle c,d\rangle$.

Доказательство. Из признака сравнения (теорема 2.8.8) для НИ (без параметра!) при каждом $t \in \langle c,d\rangle$ интеграл $\int_a^{\to b} f(x,t)dx$ сходится абсолютно. Поэтому и в силу неравенства $|f(x,t)| \leqslant g(x)$,

$$\Big| \int_{\xi}^{\to b} f(x,t)dx \Big| \leqslant \int_{\xi}^{\to b} |f(x,t)|dx \leqslant \int_{\xi}^{\to b} g(x)dx.$$

Из сходимости интеграла $\int_a^{\to b} g(x)dx$ следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists b' \in (a,b) : \ \forall \xi \in (b', b) \ \hookrightarrow \ \int_{\xi}^{\to b} g(x)dx < \varepsilon.$$

Поскольку в последнем условии **отсутствует параметр** t, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists b' \in (a,b) : \ \forall \xi \in (b', b) \ \& \ \forall t \in \langle c,d\rangle \ \hookrightarrow \ \Big| \int_{\xi}^{\to b} f(x,t)dx \Big| < \varepsilon. \ \blacksquare$$

Теорема 8.5. *(признак Дирихле) Пусть функции*

$$f, \ g : [a,b) \times \langle c,d\rangle \to \mathbb{R}$$

удовлетворяют условиям:

1. $\forall t \in \langle c,d\rangle$ *функция* f *непрерывна по* x *на* $[a,b)$;
2. $\forall t \in \langle c,d\rangle$ *функция* g *непрерывно дифференцируема по* x *на* $[a,b)$;
3. *первообразная* $F(x,t) := \int_a^x f(s,t)ds$ ***равномерно ограничена*** *на* $[a,b) \times \langle c,d\rangle$:
$$\exists C > 0 : \ \forall (x,t) \in [a,b) \times \langle c,d\rangle \ \hookrightarrow \ |F(x,t)| < C;$$
4. *на* $[a,b) \times \langle c,d\rangle$ *производная* $g'_x(x,t) \leqslant 0$ *(т.е. для каждого* $t \in \langle c,d\rangle$ *функция* $g(x,t)$ *убывает по переменной* x *на* $[a,b)$*);*

5. *функция $g(x,t)$ стремится к нулю при $x \to b$* ***равномерно*** *по $t \in \langle c,d\rangle$: $g(x,t) \underset{\langle c,d\rangle}{\rightrightarrows} 0$ при $x \to b$.*

Тогда интеграл $\int_a^{\to b} f(x,t)g(x,t)dx$ сходится равномерно на $\langle c,d\rangle$.

Доказательство. В силу теоремы 2.8.10 (признак Дирихле для НИ без параметра), для каждого $t \in \langle c,d\rangle$ интеграл $\int_a^{\to b} f(x,t)g(x,t)dx$ сходится. Поэтому к нему можно применить формулу интегрирования по частям (теорема 2.8.4): для произвольных $\xi \in (a,b)$ и $t \in \langle c,d\rangle$

$$\int_\xi^{\to b} f(x,t)g(x,t)dx = F(x,t)g(x,t)\Big|_{x=\xi}^{x\to b} - \int_\xi^{\to b} F(x,t)g'_x(x,t)dx.$$

Из условий 3 и 5 следует, что $\lim_{x\to b} F(x,t)g(x,t) = 0$. Из условий 4 и 5 следует, что функция $g(x,t) \geqslant 0$ на $[a,b) \times \langle c,d\rangle$. Поэтому

$$\Big|\int_\xi^{\to b} f(x,t)g(x,t)dx\Big| \leqslant Cg(\xi,t) - C\int_\xi^{\to b} g'_x(x,t)dx = 2Cg(\xi,t) \overset{\xi\to b-0}{\underset{\langle c,d\rangle}{\rightrightarrows}} 0. \blacksquare$$

8.3. Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Теорема 8.6. *(о непрерывности НИ по параметру) Пусть функция $f : [a,b) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ непрерывна как функция от двух переменных. Пусть интеграл $\int_a^{\to b} f(x,t)dx$ сходится равномерно на отрезке $[c,d]$. Тогда функция $I(t) = \int_a^{\to b} f(x,t)dx$ непрерывна на $[c,d]$.*

Доказательство. Пусть $t_0 \in [c,d]$ – произвольная точка. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Из равномерной сходимости интеграла $\int_a^{\to b} f(x,t)dx$ следует, что

$$\exists b'(\varepsilon) \in (a,b) : \ \forall t \in [c,d] \ \hookrightarrow \ \Big|\int_{b'}^{\to b} f(x,t)dx\Big| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

В силу непрерывности **собственного** интеграла $\int_a^{b'} f(x,t)dx$ по параметру (теорема 8.1)

$$\exists \delta = \delta(b'(\varepsilon)) = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall t \in [c,d] : \ |t-t_0| < \delta \ \hookrightarrow$$

$$\Big|\int_a^{b'} f(x,t)dx - \int_a^{b'} f(x,t_0)dx\Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому для любого ε и любого $t \in [c,d]$ & $|t-t_0| < \delta$ справедливо

$$|I(t) - I(t_0)| = \Big|\int_a^{\to b} f(x,t)dx - \int_a^{\to b} f(x,t_0)dx\Big| \leqslant$$

$$\Big|\int_a^{b'} f(x,t)dx - \int_a^{b'} f(x,t_0)dx\Big| + \Big|\int_{b'}^{\to b} f(x,t)dx\Big| + \Big|\int_{b'}^{\to b} f(x,t_0)dx\Big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Если точка $b \in \mathbb{R}$, то предыдущая оценка означает, что на плоскости (x,t) отрезок, соединяющий точки (b,t) и (b,t_0) мы заменили трехзвенной ломаной $(b,t) \to (b',t) \to (b',t_0) \to (b,t_0)$ (см. рис. ???)

Рис. ??? $\blacksquare$

Теорема 8.7. *(об интегрировании НИ по параметру) Пусть функция $f : [a, b) \times [c, d] \to \mathbb{R}$ непрерывна как функция от двух переменных. Пусть интеграл $\int_a^{\to b} f(x,t)dx$ сходится равномерно на отрезке $[c, d]$. Тогда*

$$\int_c^d \left(\int_a^{\to b} f(x,t)dx \right) dt = \int_a^{\to b} \left(\int_c^d f(x,t)dt \right) dx.$$

Замечание. Утверждение теоремы можно понимать как перестановку собственного и несобственного интегралов.

Доказательство. Сразу отметим, что интеграл в левой части равенства существует, поскольку функция $I(t) := \int_a^{\to b} f(x,t)dx$ непрерывна на $[c, d]$ (теорема 8.6). Более того, для произвольного $\xi \in (a, b)$ существует интеграл

$$\int_c^d \left(\int_\xi^{\to b} f(x,t)dx \right) dt = \int_c^d \left(\int_a^{\to b} f(x,t)dx \right) dt - \int_c^d \left(\int_a^{\xi} f(x,t)dx \right) dt,$$

поскольку функция $I(t;\xi) := \int_a^\xi f(x,t)dx$ непрерывна по t в силу теоремы 8.1.

Для произвольного $b' \in (a, b)$, в силу леммы 8.1, совпадают повторные собственные интегралы

$$\int_c^d \left(\int_a^{b'} f(x,t)dx \right) dt = \int_a^{b'} \left(\int_c^d f(x,t)dt \right) dx. \tag{8.4}$$

Покажем, что в интеграле слева можно перейти к пределу при $b' \to b$. Сравним значения функции $\varphi(b') := \int_c^d \left(\int_a^{b'} f(x,t)dx \right) dt$ с числом $\int_c^d \left(\int_a^{\to b} f(x,t)dx \right) dt$: по $\varepsilon > 0$ возьмем такое $b'(\varepsilon)$, чтобы в определении 8.1 равномерной сходимости НИ выполнялась оценка $| \int_\xi^{\to b} f(x,t)dx| < \varepsilon/(c-d)$ как только $\xi \in (b', b)$. Тогда

$$\left| \int_c^d \left(\int_a^{\to b} f(x,t)dx \right) dt - \int_c^d \left(\int_a^{\xi} f(x,t)dx \right) dt \right| =$$

$$\left| \int_c^d \left(\int_\xi^{\to b} f(x,t)dx \right) dt \right| < \frac{\varepsilon}{c-d}(c-d) = \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{b' \to b} \int_c^d \left(\int_a^{b'} f(x,t)dx \right) dt = \int_c^d \left(\int_a^{\to b} f(x,t)dx \right) dt.$$

Но если в **тождестве** (8.4) существует предел в левой части при $b' \to b$, то существует предел в правой и они совпадают. Остается заметить, что предел в правой части (8.4) при $b' \to b$ есть, по определению, несобственный интеграл:

$$\lim_{b' \to b-0} \int_a^{b'} \left(\int_c^d f(x,t)dt \right) dx = \int_a^{\to b} \left(\int_c^d f(x,t)dt \right) dx. \quad \blacksquare$$

Теорема 8.8. *(о дифференцировании НИ по параметру) Пусть функции $f,\ f'_t : [a,b) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ непрерывны как функции от двух переменных. Пусть интеграл $\int_a^{\to b} f'_t(x,t)dx$ сходится равномерно на отрезке $[c,d]$ и при некотором $t_0 \in [c,d]$ сходится интеграл $\int_a^{\to b} f(x,t_0)dx$. Тогда функция $I(t) = \int_a^{\to b} f(x,t)dx$ дифференцируема на $[c,d]$, причем дифференцирование можно внести под знак интеграла:*

$$\forall t \in [c,d] \ \hookrightarrow \ I'(t) = \int_a^{\to b} f'_t(x,t)dx.$$

Доказательство. При любом фиксированном $x \in [a,b)$ функция $f'_t(x,t)$ непрерывна по переменной t. Поэтому по переменной t применима формула Ньютона-Лейбница и

$$f(x,t) = f(x,t_0) + \int_{t_0}^{t} f'_s(x,s)ds.$$

Применяя теорему 8.7 к функции $f'_t(x,t)$, получаем

$$I(t) := \int_a^{\to b} f(x,t)dx = \int_a^{\to b} \left(f(x,t_0) + \int_{t_0}^{t} f'_s(x,s)ds \right) dx =$$

$$\int_a^{\to b} f(x,t_0)dx + \int_a^{\to b} \left(\int_{t_0}^{t} f'_s(x,s)dx \right) ds =$$

$$\int_a^{\to b} f(x,t_0)dx + \int_{t_0}^{t} \left(\int_a^{\to b} f'_s(x,s)dx \right) ds.$$

Воспользовавшись теоремой 8.6 для функции $J(t) := \int_a^{\to b} f'_t(x,t)dx$, продифференцируем по t полученное выражение функции $I(t)$ – получаем требуемое равенство. ■

8.4. Замечательные несобственные интегралы. Исследование НИ предполагает прежде всего доказательство его сходимости. Исследование НИ с параметром состоит в том, чтобы установить, как именно зависит НИ от параметра – непрерывно, дифференцируемо, допускает ли НИ перестановку порядка интегрирования. Вычисление НИ возможно в исключительно редких случаях. Основным методом вычисления НИ является метод дифференцирования по параметру: после дифференцирования по параметру (под знаком НИ!), возможно, получается интеграл, берущийся в элементарных функциях. На втором этапе эту функцию интегрируют уже по параметру. В результате возникает постоянная интегрирования, которую находят с помощью специально подобранного значения параметра. Обоснование этого метода всегда нетривиально и опирается на теоремы 8.6-8.8. Если же НИ вычислен, то заменой или (и) переменной интегрирования, или (и) параметра из него получают формально новые НИ, допускающие вычисления. Ниже в таблице приведены некоторые НИ. Как правило, интеграл с параметром после преобразований сводится к одному из табличных интегралов.

Наименование	Интеграл	Применение
Вспомогательный	$\int_0^\infty e^{-\beta x}\cos\alpha x\ dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$	–
Вспомогательный	$\int_0^\infty e^{-\beta x}\sin\alpha x\ dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$	–
Вспомогательный	$\int_0^\infty e^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}\ dx = arctg\frac{\alpha}{\beta}$	–
Дирихле	$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\ dx = sign(\alpha)\frac{\pi}{2}$	интеграл Фурье
Лапласа	$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\ dx = e^{-\lvert\alpha\rvert}\frac{\pi}{2}$	–
Лапласа	$\int_0^\infty \frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}\ dx = sign(\alpha)\ e^{-\lvert\alpha\rvert}\frac{\pi}{2}$	–
Лапласа	$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\alpha x\ dx = e^{-\alpha^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	–
Эйлер-Пуассон	$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$	статистика
Френель	$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	оптика
Френель	$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	оптика

Пьер-Симон, маркиз де Лаплас (1749 — 1827), Симеон Дени Пуассон (1781 – 1840), Огюстен Жан Френель (1788 — 1827).

8.5. Эйлеровы интегралы. Речь идет о специальных функциях, имеющих представление в виде НИ с параметрами, аргументами функций являются параметры. Полное исследование Эйлеровых интегралов осуществляется в комплексных переменных. Пока ограничимся вещественными. Гамма-функция применяется в статистических исследованиях, бета-функция нашла применение в теоретической физике.

Определение 8.2. Несобственный интеграл

$$\Gamma(p) = \int_{0\leftarrow}^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx, \quad p>0 \tag{8.5}$$

называется **гамма-функцией Эйлера**. Несобственный интеграл

$$B(p,q) = \int_{0\leftarrow}^{\to 1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \quad p>0,\ q>0 \tag{8.6}$$

называется **бета-функцией Эйлера**.

Лемма 8.2. *Определения (8.5) и (8.6) корректны.*

Доказательство. Оба интеграла от знакопостоянных функций. В особой точке $+0$ интеграл (8.5) сходится при $p>0$ в силу эквивалентности $x^{p-1}e^{-x} \sim x^{p-1}$. Для всех достаточно больших p справедлива оценка $x^{p-1}e^{-x} < e^{-x/2}$. Интеграл $\int_1^\infty e^{-x/2}dx$ сходится при любых p. Следовательно интеграл (8.5) сходится при $p>0$.

При $x \to +0$ справедлива эквивалентность $x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim x^{p-1}$, а при $x \to 1-0$ – эквивалентность $x^{p-1}(x-1)^{q-1} \sim (1-x)^{q-1}$. Что доказывает сходимость интеграла (8.6) при $p,q>0$. ■

Теорема 8.9. *(свойства гамма и бета функций)*

1. *формула понижения* $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p), \ \ p>0$*;*
2. *вычисление факториала:* $\Gamma(n) = (n-1)!$ *для* $n \in \mathbb{N}$*;*
3. *формула дополнения*
$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)};$$
4. *симметричность бета-функции* $B(p,q) = B(q,p)$*;*
5. *выражение бета-функции через гамма-функцию*
$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)};$$
6. *вычисление биномиальных коэффициентов:*
$$C_n^k = \frac{1}{(n+1)B(n-k+1,k+1)}.$$

Обсуждение. Нетрудно доказать, что существует бесконечное множество гладких (и даже бесконечно дифференцируемых) функций $f(p)$ $(p>0)$, для которых при $p=n\in\mathbb{N}$ верно равенство $f(n)=n!$. Ценность и уникальность гамма-функции, в частности, в том, что она **аналитическая**, т.е. допускающая представление в виде степенного ряда. График гамма-функции см. на рис. ???

Рис. ???

Доказательство свойств 1 и 2. При $p>0$ имеем

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^p e^{-x}dx = -\int_0^\infty x^p de^{-x} =$$

$$-x^p e^{-x}\Big|_{x=0}^{x\to\infty} + int_0^\infty p x^{p-1}e^{-x}dx = p\,\Gamma(p).$$

Поскольку $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$, то из формулы понижения сразу получаем свойство 2. ■

Задача. Докажите симметричность бета-функции (свойство 4).

§ 9. Интеграл Фурье и преобразование Фурье

Непериодическую функцию, определенную на всей оси, невозможно представить в виде тригонометрического ряда Фурье. Оказывается, такую функцию (при дополнительных условиях) можно представить в виде несобственного интеграла с параметром – интеграла Фурье. Интеграл Фурье является непрерывным аналогом тригонометрического ряда Фурье. С интегралом Фурье связано преобразование Фурье – непрерывный аналог последовательности коэффициентов Фурье.

9.1. Интеграл Фурье. Предварительное обсуждение и определение. Напомним, что функция f называется **абсолютно интегрируемой на** $\mathbb{R}$, если интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ имеет конечное количество особенностей и сходится абсолютно.

Пусть f АИ на $\mathbb{R}$ функция. Для любого $n \in \mathbb{N}$ на $[-\sqrt{\pi}n, \sqrt{\pi}n]$ определены ее коэффициенты Фурье

$$a_0 := \frac{1}{2\sqrt{\pi}n} \int\limits_{-\sqrt{\pi}n}^{\sqrt{\pi}n} f(t)dt, \ a_k := \frac{1}{\sqrt{\pi}n} \int\limits_{-\sqrt{\pi}n}^{\sqrt{\pi}n} f(t) \cos \frac{k\sqrt{\pi}t}{n} dt,$$

$$b_k := \frac{1}{\sqrt{\pi}n} \int\limits_{-\sqrt{\pi}n}^{\sqrt{\pi}n} f(t) \sin \frac{k\sqrt{\pi}t}{n} dt$$

и частичные суммы ряда Фурье (мы намеренно берем количество слагаемых n^2):

$$FS_{n^2}(f) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}n} \int\limits_{-\sqrt{\pi}n}^{\sqrt{\pi}n} f(t)dt \ +$$

$$\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}n} \int\limits_{-\sqrt{\pi}n}^{\sqrt{\pi}n} f(t) \cos \frac{k\sqrt{\pi}t}{n} dt \cdot \cos \frac{k\sqrt{\pi}x}{n} + \frac{1}{\sqrt{\pi}n} \int\limits_{-\sqrt{\pi}n}^{\sqrt{\pi}n} f(t) \sin \frac{k\sqrt{\pi}t}{n} dt \cdot \sin \frac{k\sqrt{\pi}x}{n} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}n} \int\limits_{-\sqrt{\pi}n}^{\sqrt{\pi}n} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\sqrt{\pi}n}^{\sqrt{\pi}n} f(t) \cos \frac{k\sqrt{\pi}}{n}(t-x)dt \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{n}.$$

Замечание. Осуществленное преобразование частичной суммы отличается от вывода интеграла Дирихле (2.3): в формуле Дирихле сначала идет суммирование, потом интегрирование, сейчас – наоборот.

После замены $\omega := k\sqrt{\pi}/n$ при фиксированном x и фиксированном n сумму в полученном выражении можно интерпретировать как **интегральную сумму** на отрезке $[0, \sqrt{\pi}n]$ функции

$$\varphi(\omega; n, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{\pi}n}^{\sqrt{\pi}n} f(t) \cos \omega(t-x) dt,$$

с разбиением отрезка интегрирования на равные подотрезки длины $\Delta\omega = \sqrt{\pi}/n$ и выборкой $\xi_k = \sqrt{\pi}k/n$ в концах разбиения. Пусть $n \to +\infty$. Тогда первое слагаемое, в силу АИ функции f на всей оси, устремится к нулю. А сумма "превратиться" в несобственный интеграл на полуоси. Мы считаем, что это

Определение 9.1. **Интегралом Фурье** абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции называется повторный несобственный интеграл

$$FI(f,x) := \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(t-x)dt\right)d\omega. \tag{9.1}$$

Обсуждение. Аналогично ряду Фурье, определение 9.1 является **символьной** записью. Оно определяет **число** (при фиксированном $x \in \mathbb{R}$) только в том случае, если существует НИ (9.1). Замена $\omega := k\sqrt{\pi}/n$ при $n \to +\infty$ превращает **дискретные частоты** $k \in \mathbb{N}$ в **непрерывно** меняющиеся частоты от нуля до $+\infty$, а функциональный ряд по индексу суммирования k превращается в несобственный интеграл по переменной ω. По аналогии с рядом Фурье нас интересует, как интеграл Фурье связан с породившей его функцией f. В частности, возможность выразить **значение** функции f в точке x через ее интеграл Фурье $FI(f,x)$, т.е. справедливость числового равенства $f(x) = FI(f,x)$.

9.2. Подготовительная лемма.

Лемма 9.1. *(о перестановке повторных интегралов) Пусть функция $f(t)$ абсолютно интегрируема на интервале (a,b), где $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, а функция $g(t,\omega)$ непрерывна и ограничена на "полосе" $(a,b)\times[c,d]$, где $c,d \in \mathbb{R}$. Тогда существуют и совпадают повторные интегралы*

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(t)g(t,\omega)dt\right)d\omega = \int_a^b\left(\int_c^d f(t)g(t,\omega)d\omega\right)dt. \tag{9.2}$$

Доказательство осуществляется в четыре этапа и аналогично доказательству теоремы 8.7.

1) Поскольку несобственный интеграл $\int_a^b f(t)dt$ имеет конечное количество особенностей, достаточно рассмотреть случай, когда точка $a \in \mathbb{R}$ и **единственной особенностью** является точка b (конечная или $+\infty$).

2) Переход к собственному интегрированию: пусть $b' \in (a,b)$ – произвольная точка. Рассмотрим функцию $\hat{f}(t,\omega) := f(t)$ как функцию от двух переменных на прямоугольнике $\Pi' := [a,b']\times[c,d]$. Поскольку f интегрируема в собственном смысле на $[a,b']$, то она же интегрируема в собственном смысле на Π' и $\int_{\Pi'}\hat{f}(t,\omega)dtd\omega = (d-c)\int_a^{b'} f(t)dt$. Но функция $g(t,\omega)$, будучи непрерывной, также интегрируема на Π'. Следовательно (теорема 3.3.5 п. 3) произведение функций $f(t)g(t,\omega)$ интегрируемо в собственном смысле на Π'. При каждом фиксированном $\omega_0 \in [c,d]$ функция $\varphi(t) := f(t)g(t,\omega_0)$ интегрируема на $[a,b']$ как произведение интегрируемой на непрерывную. При каждом фиксированном $t_0 \in [a,b']$ функция $\psi(\omega) := f(t_0)g(t_0,\omega)$ интегрируема на $[c,d]$ как непрерывная. Из теоремы 3.3.8 следует **существование и совпадение трех**

интегралов – двукратного и двух повторных:

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^{b'} f(t)g(t,\omega)dt \right) d\omega = \iint\limits_{\Pi'} f(t)g(t,\omega)dtd\omega = \int\limits_a^{b'} \left(\int\limits_c^d f(t)g(t,\omega)d\omega \right) dt. \quad (9.3)$$

3) Покажем, что **в интеграле слева можно перейти к пределу при** $b' \to b$. Во-первых, для каждого $\omega_0 \in [c,d]$ НИ $\int_a^{\to b} f(t)g(t,\omega_0)dt$ сходится, поскольку произведение абсолютно сходящейся функции $f(t)$ на непрерывную ограниченную функцию $g(t,\omega_0)$ является абсолютно интегрируемой функцией. Во-вторых, сходимость НИ $\int_a^{\to b} f(t)g(t,\omega)dt$ равномерна относительно параметра $\omega \in [c,d]$. Согласно условию, на $\Pi := [a,b) \times [c,d]$ верна оценка $|g(t,\omega)| < C = const$. Из абсолютной интегрируемости функции $f(t)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $b' \in (a,b)$, что для всех $\xi \in (b',b)$ верна оценка $\int_\xi^{\to b} |f(t)|dt < \varepsilon/C$. Тогда для всех $\xi \in (b',b)$

$$\Big| \int_\xi^{\to b} f(t)g(t,\omega)dt \Big| < C \int_\xi^{\to b} |f(t)|dt < \varepsilon.$$

Теперь, рассуждая по отношению к функции $f(t)g(t,\omega)$ как при доказательстве теоремы 8.7, мы можем перейти к пределу:

$$\lim_{b'\to b} \int_c^d \left(\int_a^{b'} f(t)g(t,\omega)dt \right) d\omega = \int_c^d \left(\int_a^{\to b} f(t)g(t,\omega)dt \right) d\omega.$$

4) Но если в тождестве (9.3) существует предел в левой части при $b' \to b$, то **существует предел в правой части**, они совпадают и предел в правой части есть, по определению, НИ $\int\limits_a^{\to b} \left(\int\limits_c^d f(t)g(t,\omega)d\omega \right) dt$. ■

9.3. Сходимость интеграла Фурье в точке. Полным аналогом следствия 2.1 о сходимости ряда Фурье является

Теорема 9.1. *(о сходимости интеграла Фурье к полусумме односторонних пределов) Пусть функция f АИ на $\mathbb{R}$. Пусть x – точка разрыва и скачка производной. Тогда интеграл Фурье функции f сходится в точке x к числу $A = (f(x+0) + f(x-0))/2$.*

Из теоремы 1 сразу получаем

Следствие 9.1. *(о сходимости интеграла Фурье к значению функции в точке) Пусть функция f АИ на $\mathbb{R}$. Пусть x – точка гладкости функции или скачка производной. Тогда интеграл Фурье функции f сходится в точке x к ее значению: $f(x) = FI(f,x)$.*

Обсуждение. Полная аналогия теоремы 1 и следствия 1 со следствиями 2.1 и 2.2 соответственно обосновывает целесообразность формулы (9.1).

Доказательство осуществляется в шесть этапов.

1) В силу леммы 9.1, для произвольных фиксированных $x \in \mathbb{R}$ и $\lambda > 0$ существует **собственный интеграл**

$$FI(f;\lambda,x) := \frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(t-x)dt\right)d\omega. \tag{9.4}$$

Значит, нам нужно доказать, что в условиях теоремы

$$\lim_{\lambda\to+\infty} FI(f;\lambda,x) = \frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)).$$

2) После **замены** $u = t - x$ получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(t-x)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+u)\cos(\omega u)du =$$

$$\int_{-\infty}^{0} f(x+u)\cos(\omega u)du + \int_{0}^{+\infty} f(x+u)\cos(\omega u)du =$$

$$\int_0^{+\infty}(f(x+u)+f(x-u))\cos(\omega u)du.$$

3) Подставляя полученное выражение в формулу (9.4) и **меняя порядок интегрирования** (см. лемму 9.1), получаем:

$$FI(f;\lambda,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{\lambda}\cos(\omega u)d\omega\right)(f(x+u)+f(x-u))du =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}(f(x+u)+f(x-u))\frac{\sin\lambda u}{u}du$$

(см. Замечание в п. 9.1 и сравните полученное выражение **собственного** интеграла (9.4) с **частичной** суммой ряда Фурье в виде интеграла Дирихле (2.4)).

4) Поскольку несобственный интеграл Дирихле $\int_0^{+\infty}(\sin\lambda u/u)du = \pi/2$ (см. таблицу в п. 8.4), то **разность**

$$FI(f;\lambda,x) - \frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)) =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\Big(\big(f(x+u)+f(x-u)\big)-\big(f(x+0)+f(x-0)\big)\Big)\frac{\sin\lambda u}{u}du =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\big(f(x+u)-f(x+0)\big)\frac{\sin\lambda u}{u}du + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\big(f(x-u)-f(x-0)\big)\frac{\sin\lambda u}{u}du.$$

Остается показать, что каждый из полученных интегралов стремится к нулю при $\lambda \to +\infty$.

5) Рассмотрим только первый (второй исследуется аналогично); представим его в виде **суммы трех интегралов**:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\big(f(x+u)-f(x+0)\big)\frac{\sin\lambda u}{u}du =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}\sin\lambda u\ du+$$
$$\frac{1}{\pi}\int_1^{+\infty} \frac{f(x+u)}{u}\sin\lambda u\ du - f(x+0)\frac{1}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{\sin\lambda u}{u}du.$$

6 а) Поскольку x – точка скачка производной, существует конечный предел

$$\lim_{u\to+0}\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u} = f'_+(x).$$

Поэтому функция $(f(x+u)-f(x+0))/u$ не имеет по переменной u особенности в точке $+0$ и абсолютно интегрируема на отрезке $[0,1]$. В силу теоремы 1.3 (Римана об осцилляции)

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}\sin\lambda u\ du \to 0 \text{ при } \lambda\to+\infty.$$

6 б) Поскольку при условии $u\in[1,+\infty)$ справедлива оценка $|f(x+u)|/u \leqslant |f(x+u)|$, то функция $f(x+u)/u$ абсолютно интегрируема по u на $[1,+\infty)$. Опять же, в силу теоремы 1.3 (Римана об осцилляции), получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{f(x+u)}{u}\sin\lambda u\ du \to 0 \text{ при } \lambda\to+\infty.$$

6 в) Из сходимости несобственного интеграла Дирихле следует, что

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\lambda u}{u}du \overset{v=\lambda u}{=} \int_\lambda^{+\infty}\frac{\sin v}{v}dv \to 0 \text{ при } \lambda\to+\infty. \quad \blacksquare$$

При исследовании интеграла Фурье полезна

Лемма 9.2. *(о разложении на четную и нечетную составляющие) Для АИ на $\mathbb{R}$ функции f справедливы утверждения:*

1. *ее интеграл Фурье равен*

$$FI(f) = \int_0^{+\infty}(a(\omega)\cos(\omega x)) + b(\omega)\sin(\omega x))d\omega,$$

где

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)dt;$$

2. *если функция f четная, то*

$$FI(f) = \int_0^{+\infty} a(\omega)\cos(\omega x)dt, \text{ где } a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt;$$

3. *если функция f нечетная, то*

$$FI(f) = \int_0^{+\infty} b(\omega)\sin(\omega x)dt, \text{ где } b(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)dt.$$

Задача. Докажите лемму 9.2. Сформулируйте теорему 9.1 и следствие 9.1 в случае четной и нечетной функции f.

9.4. Преобразование Фурье. Предварительное обсуждение и определение. Ряд Фурье сопоставляет периодической функции f последовательность **пар** ее коэффициентов Фурье: $f \sim \{(a_k, b_k)\}_{k=0}^{\infty}$ (считаем, что $b_0 = 0$). Каждая пара коэффициентов вполне характеризуется **амплитудой** $A_k := \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ и **фазой** $\varphi_k \in S^1$, где $a_k = A_k \cos \varphi_k$, $b_k = A_k \sin \varphi_k$. Последовательность пар $\{(A_k, \varphi_k)\}_{k=0}^{\infty}$ – это **спектральная характеристика** периодической функции в зависимости от **дискретной частоты** $k = 0, 1, 2, ...$ Комплексная форма ряда Фурье сопоставляет периодической функции "двустороннюю" последовательность коэффициентов $\{c_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ (в комплексной форме частоты k принимают все целые значения). Из формул (2.7) следует, что $A_k = 2|c_k|$, а $\varphi_k = -\arg c_k$ $(k \in \mathbb{N})$. Значит, один коэффициент c_k содержит всю спектральную информацию о частоте k. Ряд Фурье функции f можно интерпретировать как функцию, зависящую от **целочисленного** аргумента k, т.е. $FS(f) : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $FS(f)(k) := c_k$. Сейчас мы запишем для непериодической функции ее интеграл Фурье в комплексной форме и выделим в нем **непрерывный** аналог функции $FS(f)$.

Предварительно введем

Определение 9.2. Пусть функция φ определена на $\mathbb{R}$ и абсолютно интегрируема на любом отрезке $[a, b]$. **Интегралом в смысле главного значения** называется предел

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx := \lim_{l \to +\infty} \int_{-l}^{l} \varphi(x)dx.$$

Сокращение v.p. означает "Valeur principale" – главное значение (фр.). Если существует НИ $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx$, то интеграл в смысле главного значения тоже существует и совпадает I. В обратную сторону утверждение неверно.

Нас интересует случай, когда функция φ абсолютно интегрируема на любом отрезке и **нечетна**. Тогда для любого $l > 0$ верно $\int_{-l}^{l} \varphi(x)dx = 0$. Поэтому $v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 0$

Лемма 9.3. *(комплексная форма интеграла Фурье) Пусть функция $f \in L_R(\mathbb{R})$. Тогда ее интеграл Фурье имеет представления в виде повторных интегралов:*

$$FI(f, x) = v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) d\omega = \tag{9.5}$$

$$= v.p. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \right) d\omega. \tag{9.6}$$

Обсуждение. Формулы (9.5) и (9.6) имеют символьный характер (см. обсуждение определения 9.1 интеграла Фурье). Если же интеграл Фурье при некотором $x \in \mathbb{R}$ существует, то обе формулы определяют его. Причем, в этих формулах внешний несобственный интеграл понимается в смысле главного значения.

Доказательство. Чтобы перейти в формуле (9.1) в комплексной форме, предварительно симметризуем ее по частотам: наряду с положительными введем отрицательные частоты ω. В силу четности функции косинус,

$$FI(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(x-t)dt\right)d\omega. \tag{9.7}$$

При фиксированном x, в силу леммы 1.1, существует НИ с параметром ω:

$$J(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega(x-t)dt$$

Из леммы 9.1 следует, что функция $J(\omega)$ АИ на любом отрезке. В силу нечетности функции синус, получаем

$$v.p.\ \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega(x-t)dt\right)d\omega = 0. \tag{9.8}$$

Сложим формулы (9.7) и (9.8) – получаем формулу

$$FI(f,x) = v.p.\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega(x-t)}dt\right)d\omega. \tag{9.9}$$

Поскольку $e^{i\omega(x-t)} = e^{i\omega x}\cdot e^{-i\omega t}$, из формулы (9.9) следует формула (9.5).

В равенстве (9.7), в силу четности функции косинус, аргумент $(x-t)$ можно заменить на $(t-x)$. В равенстве (9.8), в силу нечетности функции синус, аргумент $(x-t)$ также можно заменить на $(t-x)$, поскольку в правой части стоит ноль. В результате мы получаем формулу, которая аналогична (9.9), с единственным отличием: вместо аргумента $(x-t)$ стоит $(t-x)$. Откуда вытекает формула (9.6). ∎

Сравнивая формулу (9.5) с рядом Фурье в комплексной форме, мы видим, что аналогом коэффициентов c_k является внутренний интеграл. Применение комплексной формы подсказывает перейти от вещественнозначной функции к **комплекснозначной** $f(x) = f_r(x) + if_{im}(x)$. При этом все доказанные выше утверждения остаются справедливыми, поскольку все преобразования с функцией f линейны и могут быть осуществлены отдельно для вещественной части f_r, отдельно для мнимой f_{im}. Теперь мы дадим основное

Определение 9.3. Пусть f – комплекснозначная функция, абсолютно интегрируемая на любом отрезке. Ее **преобразованием Фурье** называется комплекснозначная функция действительной переменной

$$F[f](\omega) = v.p.\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx, \quad \text{где } \omega\in\mathbb{R}. \tag{9.10}$$

Обратным преобразованием Фурье называется комплекснозначная функция действительной переменной

$$F^{-1}[f](x) = v.p.\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)e^{i\omega x}d\omega, \quad \text{где } x\in\mathbb{R}. \tag{9.11}$$

Обсуждение Пусть f – физический сигнал, зависящий от времени. Интерпретируем его как **суперпозицию** (= сумму = наложение друг на друга) гармонических колебаний $e^{i\omega x}$, частота ω которых меняется непрерывно на $(-\infty, +\infty)$. Математически это означает интегрирование по переменной ω. Преобразование Фурье интерпретируется как спектральная характеристика сигнала в зависимости от **непрерывной частоты** ω. Именно: амплитуда гармонического колебания частоты ω равна абсолютной величине комплексной функции $F[f](\omega)$, а фазовый сдвиг колебания – это аргумент $(F[f](\omega))$: $A(\omega) = |F[f](\omega)|$, $\varphi(\omega) = \arg F[f](\omega)$. Естественно ожидать, что обратное преобразование Фурье восстанавливает сигнал по его спектру – при определенных условиях это так. Преобразование Фурье, очевидно, линейно по f и "алгебраически" реагирует на дифференцирование и сдвиг аргумента (см. ниже). Поэтому исследовать спектр порой проще, чем сам сигнал. Преобразование Фурье – мощнейший метод в уравнениях математической физики и в статистических исследованиях.

9.5. Существование преобразования Фурье. Формулы (9.10) и (9.11), аналогично определениям ряда Фурье и интеграла Фурье, являются символьной записью. Абсолютная интегрируемость функции f на **любом отрезке** еще не гарантирует существования несобственных интегралов в смысле главного значения. Но для функции абсолютно интегрируемой на всей оси существование прямого и обратного преобразований гарантировано:

Теорема 9.2. *Пусть функция f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$. Тогда:*

1. *ее Фурье-образ $F[f](x)$ и обратный Фурье-образ $F^{-1}[f](x)$ существуют в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ как несобственные интегралы (9.10) и (9.11), а не только в смысле главных значений;*
2. *в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ верно: $F^{-1}[f](x) = F[f](-x)$;*
3. *функции $F[f]$ и $F^{-1}[f]$ равномерно непрерывны на $\mathbb{R}$;*
4. $\lim_{x\to\pm\infty} F[f](x) = \lim_{x\to\pm\infty} F^{-1}[f](x) = 0$.
5. *Справедливо равенство Парсеваля: если $f \in L^1_R(\mathbb{R}) \cap L^2_R(\mathbb{R})$, то прямое и обратное преобразования Фурье сохраняют L^2-норму:*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F[f](w)|^2 d\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F^{-1}[f](x)|^2 dx.$$

Обсуждение. Из теоремы 9.2 следует, во-первых, равноправие прямого и обратного преобразований Фурье для **абсолютно интегрируемой** на $\mathbb{R}$ функции f: ее можно интерпретировать и как исходный сигнал, и как спектральную характеристику сигнала $g = F^{-1}[f]$. Во-вторых, образ $F[f]$ (обратный образ $F^{-1}[f]$) АИ функции не имеет ни разрывов, ни "всплесков" в окрестностях $\pm\infty$ (что не исключено у исходной АИ функции f). Непрерывность Фурье-образа уже гарантирует его абсолютную интегрируемость на любом отрезке. Однако это не означает, что Фурье-образ (обратный образ) является абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ функцией, т.е. преобразования Фурье (прямое и обратное) не действуют в $L_R(\mathbb{R})$. Грубо говоря, преобразования Фурье улучшают локальные характеристики АИ функций, но могут ухудшить глобальную характеристику

– абсолютную интегрируемость на $\mathbb{R}$. Поскольку интерес представляет суперпозиция прямого и обратного преобразований Фурье (см. ниже), то в определении 9.3 от функции f требуется только интегрируемость на любом отрезке, а несобственный интеграл понимается в главном значении. Наконец, опираясь на п. 5 теоремы, можно доказать, что преобразование Фурье действует в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R})$ и сохраняет его норму.

Доказательство. Утверждение п. 1 следует из равенства $|f(t)e^{\pm i\omega t}| = |f(t)|$ для всех $\omega, t \in \mathbb{R}$ и абсолютной интегрируемости функции f на $\mathbb{R}$. Пункт два следует из определения 9.3.

Для доказательства п. 3, во-первых, заметим, что

$$F[f](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt - i\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\omega t)dt\right). \tag{9.12}$$

Поэтому достаточно доказать равномерную непрерывность каждого слагаемого. Докажем равномерную непрерывность функции $a(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\omega t)dt$. Для произвольных $\omega_1,\ \omega_2 \in \mathbb{R}$ верно

$$|a(\omega_2) - a(\omega_1)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos(\omega_2 t) - \cos(\omega_1 t))dt\right| \leqslant$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\left|2\sin\frac{t(\omega_2-\omega_1)}{2}\sin\frac{t(\omega_2+\omega_1)}{2}\right|dt \leqslant$$

$$\int_{-\infty}^{-A} |f(t)|dt + \int_{-A}^{+A} |tf(t)||\omega_2-\omega_1|dt + \int_{A}^{+\infty} |f(t)|dt,$$

где $A > 0$ – произвольное число. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Поскольку функция f абсолютно интегрируема на всей оси, существует такое $A = A(\varepsilon)$, для которого

$$\int_{-\infty}^{A} |f(t)|dt < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \int_{A}^{+\infty} |f(t)|dt < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Определим $M(\varepsilon) = M(A(\varepsilon)) := 1 + \int_{-A}^{+A} |tf(t)|dt \geqslant 1$. Возьмем $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/(3M)$. Тогда для произвольных ω_1, ω_2, для которых $|\omega_2 - \omega_1| < \delta$, выполняется: $|a(\omega_2) - a(\omega_1)| < 2\varepsilon/3 + M(\varepsilon)\delta(\varepsilon) \leqslant \varepsilon$. Для функции $b(\omega)$ доказательство такое же.

Утверждение п. 4 сразу вытекает из теоремы 1.3 (Римана об осцилляции).

Утверждение п. 5 примем без доказательства. ■

Симметрии функции f упрощают ее преобразование Фурье (сравните с леммой 9.2).

Лемма 9.4. *(о Фурье-образе четных и нечетных функций) Пусть функция АИ на $\mathbb{R}$. Тогда:*

1. *если функция четная, то*

$$F[f](\omega) = F^{-1}[f](\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos(x\omega)dx;$$

2. *если функция нечетная, то*

$$F[f](\omega) = -F^{-1}[f](\omega) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\sin(x\omega)dx.$$

Задача. Опираясь на представление (9.12) преобразования Фурье, докажите лемму 9.4.

Теорема 9.3. ***(формулы обращения)*** *Пусть функция f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$. Тогда:*

1. *для тех $x \in \mathbb{R}$, для которых существует интеграл Фурье, суперпозиция прямого и обратного преобразований Фурье (в любом порядке) совпадает с интегралом Фурье:*

$$F^{-1}[F[f]](x) = F[F^{-1}[f]](x) = FI(f,x);$$

2. *Если x – точка разрыва и скачка производной функции f, тогда*

$$F^{-1}[F[f]](x) = F[F^{-1}[f]](x) = \frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0));$$

3. *Если x – точка гладкости или скачка производной функции f, тогда*

$$F^{-1}[F[f]](x) = F[F^{-1}[f]](x) = f(x). \tag{9.13}$$

Обсуждение. Формулы обращения (9.13) показывают, что при определенных дополнительных условиях прямое и обратное преобразования Фурье в самом деле являются взаимно обратными. Мы использовали условия Дини-Липшица. (См. замечание 1 к следствию 2.3.)

Доказательство. П. 1 следует из леммы 9.3. П. 2 следует из леммы 9.3 и теоремы 9.1, а п. 3 – из леммы 9.3 и следствия 9.1.

Следствие 9.2. *(о квадрате преобразования Фурье) Пусть функция f и ее Фурье-образ $F[f]$ АИ на $\mathbb{R}$. Пусть функция f кусочно-гладкая на $\mathbb{R}$. Тогда $\forall x \in \mathbb{R}$ верно $F^2[f(x)] = f(-x)$.*

Доказательство. Из первого условия и п. 2 теоремы 9.2 следует, что $F[F[f]](x) = F^{-1}[F[f]](-x)$ на $\mathbb{R}$. Из второго условия и п. 3 теоремы 9.3 следует, что $F^{-1}[F[f]](-x) = f(-x)$ на $\mathbb{R}$. ■

9.6. Примеры преобразований Фурье. 1. Найдем преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-\gamma|x|}$ $(\gamma > 0)$, где $\gamma > 0$. В силу четности функции, получаем

$$F[f](\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\gamma x}\cos(\omega x)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\gamma}{\omega^2+\gamma^2}.$$

Функции f, $F[f] \in L_R(\mathbb{R})$. См. рис. ???

???

2. Пусть $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$ $(a > 0)$. Из примера 1 и следствия 9.2 получаем:

$$F[\frac{1}{x^2+a^2}] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{a}\cdot F[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{x^2+a^2}] = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}F^2[e^{-a|x|}] = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}e^{-a|-x|} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}e^{-a|x|}.$$

3. Рассмотрим “прямоугольный импульс” в δ-окрестности нуля с амплитудой A: $f(x) := A$ при $|x| \leqslant \delta$ и $f(x) \equiv 0$ при $|x| > \delta$. Тогда

$$F[f](\omega) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-i\omega x} dx = A\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\omega\delta)}{\omega}.$$

Функция $F[f]$ не является абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ (рис. ???).

Рис. ???

4. Рассмотрим функцию “нормального распределения” $f(x) := e^{-ax^2}$ $(a > 0)$. Тогда

$$F[f](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 - i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\omega^2/4a}$$

(интеграл сводится заменой к интегралу Эйлера-Пуассона, см. п. 8.4). При $a = 1/2$ Фурье-образ $F[e^{-x^2/2}] = e^{-\omega^2/2}$ совпадает с прообразом. Т.е. “стандартное нормальное распределение” есть неподвижная точка преобразования Фурье.

9.7. Алгебраические операции и дифференцирование.

Теорема 9.4. *(алгебраические операции и преобразование Фурье) Пусть функции f и g абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Тогда имеют место свойства:*

1. ***линейности:*** *для любых комплексных α и β*

$$F[\alpha f + \beta g] = \alpha F[f] + \beta F[g], \quad F^{-1}[\alpha f + \beta g] = \alpha F^{-1}[f] + \beta F^{-1}[g];$$

2. ***растяжения аргумента:*** $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0$

$$F[f(\alpha x)] = \frac{1}{|\alpha|} F[f]\left(\frac{\omega}{\alpha}\right), \quad F^{-1}[f(\alpha x)] = \frac{1}{|\alpha|} F^{-1}[f]\left(\frac{\omega}{\alpha}\right);$$

3. ***сдвига аргумента:***

$$F[f(x - x_0)] = e^{-i\omega x_0} F[f](\omega), \quad F^{-1}[f(x - x_0)] = e^{i\omega x_0} F^{-1}[f](\omega).$$

Доказательство. Первый и третий пункты очевидны из определения 9.3. П. 2 следует из определения 9.3 после подстановки $t = \alpha x$. Пусть $\alpha > 0$:

$$F[f(\alpha x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\frac{\omega}{\alpha}t} d\left(\frac{t}{\alpha}\right) = \frac{1}{|\alpha|} F[f]\left(\frac{\omega}{\alpha}\right).$$

Задача. Докажите п. 2 при $\alpha < 0$ и п. 3 теоремы 9.4.

Оказывается, операция дифференцирования функции и ее преобразование Фурье связаны через умножение на аргумент. Приведем все формулировки и обсудим их.

Теорема 9.5. *(преобразование Фурье производной) Пусть функция f кусочно-гладкая на любом конечном отрезке; пусть сама функция и ее производная $f'(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Тогда*

$$F[f'](\omega) = i\omega F[f](\omega),\ F^{-1}[f'](\omega) = -i\omega F^{-1}[f](\omega).$$

Следствие 9.3. *Пусть функция f такая, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ ее производная $f^{(n-1)}$ кусочно-гладкая на любом конечном отрезке; пусть сама функция f и ее производные $f', ..., f^{(n)}$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Тогда:*

1.

$$F[f^{(k)}](\omega) = (i\omega)^k F[f](\omega), \ \ F^{-1}[f^{(k)}](\omega) = (-i\omega)^k F^{-1}[f](\omega), \quad k = 0, ..., n;$$

2.

$$F[f](\omega) = o\left(\frac{1}{\omega^n}\right), \quad F^{-1}[f](\omega) = o\left(\frac{1}{\omega^n}\right) \ \text{при } \omega \to \pm\infty.$$

Теорема 9.6. *(производная преобразования Фурье) Пусть функции $f(x)$ и $xf(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Тогда преобразования Фурье функции f являются непрерывно дифференцируемыми на $\mathbb{R}$ функциями и*

$$\frac{d}{d\omega} F[f](\omega) = -iF[xf(x)](\omega), \quad \frac{d}{d\omega} F^{-1}[f](\omega) = iF^{-1}[xf(x)](\omega).$$

Следствие 9.4. *Пусть функции $f(x)$, $xf(x)$, ... , $x^n f(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Тогда преобразования Фурье функции f являются n раз непрерывно дифференцируемыми на $\mathbb{R}$ функциями и для $k = 0, ..., n$ верно*

$$\frac{d^k}{d\omega^k} F[f](\omega) = (-i)^k F[x^k f(x)](\omega), \quad \frac{d^k}{d\omega^k} F^{-1}[f](\omega) = i^k F^{-1}[x^k f(x)](\omega).$$

Обсуждение. Теорема 9.5 и следствие 9.3 не только предлагают метод нахождения Фурье-образа производной, но и оценивают убывание на бесконечности Фурье-образа самой функции в зависимости от ее гладкости: чем глаже функция, тем быстрее убывает на бесконечности ее Фурье-образ (сравните с теоремой 3.3 об убывании коэффициентов Фурье). Теорема 9.6 и следствие 9.4 означают, что справедливо и двойственное утверждение: чем быстрее убывает функция, тем глаже ее Фурье-образ.

Доказательство теоремы 9.5. Покажем, что в условиях теоремы функция f обладает предельным свойством $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Свойства функции f достаточны, чтобы представить ее в виде $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$. Из абсолютной интегрируемости следует существование конечного предела

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left(f(0) + \int_0^x f'(t)dt \right) = f(0) + \int_0^\infty f'(t)dt = A \in \mathbb{R}.$$

Если допустить, что $A \neq 0$, то существует такое число x_0, что $|f(x)| > |A|/2$ для всех $x > x_0$. Что противоречит абсолютной сходимости. Аналогично рассматривается случай $x \to -\infty$.

Теперь, опираясь на п. 1 теоремы 9.2, применим преобразование Фурье к производной:

$$F[f'](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-ix\omega} dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(f(x) e^{-ix\omega} \Big|_{x \to -\infty}^{x \to +\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\omega} (-i\omega) dx \right) = i\omega F[f](\omega). \ \blacksquare$$

Доказательство п. 2 следствия 9.3. Из п. 1 следует, что $|F[f](\omega)| = |F[f^{(n)}](\omega)|/|\omega|^n$. Поскольку функция $f^{(n)}$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, для нее (в силу п. 4 теоремы 9.2) $\lim_{\omega\to\pm\infty} F[f^{(n)}](\omega) = 0$. ■

Доказательство теоремы 9.6. Применим лемму 9.1 к функциям $xf(x)$ и $g(x,\omega) = -ie^{-ix\omega}$ на полосе $(-\infty,+\infty)\times[0,t]$, где t – любое число. Получаем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_0^t f(x)(-ix)e^{-ix\omega}d\omega\right)dx = \int_0^t\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-ix)e^{-ix\omega}dx\right)d\omega. \quad (9.14)$$

В интеграле слева сомножитель $f(x)$ выносится из внутреннего интеграла, и

$$\int_0^t (-ix)e^{-ix\omega}d\omega = \int_0^t \left(e^{-ix\omega}\right)'_\omega d\omega = e^{-ixt} - 1.$$

Внутренний интеграл справа есть Фурье-образ функции $(-ix)f(x)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-ix)e^{-ix\omega}dx = F[-ixf(x)](\omega).$$

Тождество (9.14) (по переменной t) приобрело вид:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(e^{-ixt} - 1)dx = \int_0^t F[-ixf(x)](\omega)d\omega.$$

Но интеграл слева есть Фурье-образ функции f в точках t и $t_0 = 0$. Поэтому

$$F[f](t) - F[f](0) = \int_0^t F[-ixf(x)](\omega)d\omega.$$

По условию функция $(-ix)f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, поэтому (теорема 9.2 п. 3) ее Фурье-образ непрерывен. Значит, функция справа непрерывно дифференцируема по t. Следовательно, функция слева – тоже непрерывно дифференцируема. Дифференцируя тождество в точке $t = \omega$, получаем утверждение теоремы. ■

§ 10. Обобщенные функции

Понятие обобщенной функции (ОИ) появилось в первой четверти 20 века. В исследованиях по квантовой механике Поль Дирак (1902-1984) ввел "некорректное" понятие дельта-функции – это был первый (и, как оказалось, важнейший) пример обобщенной функции. Сергей Львович Соболев (1908-1989), анализируя понятие решения уравнения в частных производных, создал систематическую теорию, в которой ввел ключевое понятие обобщенной производной. Позже Лоран Шварц (1915-2002) разработал универсальный формализм, которому мы будем следовать.

10.1. Предварительное обсуждение. В классическом понимании функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – это правило (=закон), которое каждому числу ставит в соответствие какое-то единственное число. Если интерпретировать функцию как сигнал, зависящий от времени, то восстановить его можно только по результатам измерений с помощью физического прибора. Математически исследуемая функция "измеряется" пробными функциями с помощью некоторой **линейной** операции. Линейность означает выполнение физического "принципа суперпозиции". Пробные функции должны быть, во-первых, "идеальными" (= бесконечно дифференцируемыми), чтобы с ними было удобно работать. Во-вторых, их должно быть достаточно много, чтобы различать разные сигналы f, но не было лишних, чтобы не повторять бесполезные измерения.

Реализация этой идеи такова.

1. "Измерение" классической функции f с помощью пробной функции:
   (a) пробные функции φ бесконечно-дифференцируемы и удовлетворяют некоторым дополнительным условиям на $\pm\infty$;
   (b) результат измерения данной функции пробной – интегральное скалярное произведение $(f, \varphi) := \int_{\mathbb{R}} f\varphi \, dx$.

   Пространство D всех пробных функций должно быть настолько широким, чтобы для любых разных классических функций $f_1 \neq f_2$ нашлась пробная, которая позволит их различить: $(f_1, \varphi) \neq (f_2, \varphi)$.
2. Следующий – принципиальный – шаг состоит в том, чтобы трактовать классическую функцию f как линейный функционал f_d на D, т.е.

$$f_d : D \to \mathbb{R}, \quad f_d(\varphi) := (f, \varphi)$$

   ($d = \mathit{distribution}$ = **распределение** – распространенное название обобщенной функции).
3. Последний шаг: рассматривать не только те линейные функционалы, которые порождены интегральным скалярным произведением, а **всевозможные линейные непрерывные функционалы на** D – это и есть пространство D' обобщенных функций.

Пример. **Дельта-функция Дирака** – это линейный непрерывный функционал $\delta(\varphi) := \varphi(0)$, который не представим в виде интегрального скалярного произведения (доказательство ниже).

10.2. Пространство D основных (пробных) функций.

Определение 10.1. **Носителем** функции $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется замыкание множества, на котором функция отлична от нуля:

$$supp\ \varphi := \overline{\{x \in \mathbb{R} :\ \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Определение 10.2. Функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется **финитной**, если ее носитель ограниченное множество.

Определение 10.3. **Пространством основных функций** называется линейное функциональное пространство D, элементами которого являются бесконечно дифференцируемые финитные функции.

Обсуждение. Линейные операции в пространстве D осуществляются, как и в ранее введенных функциональных пространствах, поточечно:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(x) := \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \quad (\lambda \cdot \varphi)(x) := \lambda \cdot \varphi(x);$$

при этом они не выводят из пространства D.

Задача. Положим $\forall \varphi \in D$ и $\forall \alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ по определению: $(\varphi \cdot \alpha)(x) := \varphi(x) \cdot \alpha(x)$. Докажите, что $\varphi \cdot \alpha \in D$.

Пример. Элементом пространства D является функция “шапочка” ширины a (см. рис. ???)

$$\eta(x;a) := \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}, & |x| < a, \\ 0, & |x| \geqslant a, \end{cases} \tag{10.1}$$

которая удобна для конструирования функций с нужными свойствами.

Задача. Докажите, что функция η бесконечно дифференцируема (трудность представляют точки “стыковки” $x = \pm a$).

Рис. ???

В отличие от других ранее рассмотренных нами функциональных пространств, в D мы не вводим норму (чему есть серьезные причины), но даем

Определение 10.4. Последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset D$ называется **сходящейся** к φ, если

1. $\exists [a,b] \subset \mathbb{R} :\ \forall k \in \mathbb{N} \ \hookrightarrow\ supp\ \varphi_k \subset [a,b]$;
2. $\forall n \in \{0\} \cup \mathbb{N} \ \hookrightarrow\ \varphi_k^{(n)}(x) \underset{x\in\mathbb{R}}{\rightrightarrows} \varphi^{(n)}(x)$ при $k \to \infty$.

Лемма 10.1. *(о согласованности операций и сходимости) Если последовательности $\varphi_k \to \varphi$ и $\psi_k \to \psi$ в D при $k \to \infty$, и $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$, то*

$$\forall a,b \in \mathbb{R} \ \hookrightarrow\ a\varphi_k + b\psi_k \to a\varphi + b\psi, \quad \alpha \cdot \varphi_k \to \alpha \cdot \varphi \text{ при } k \to \infty.$$

Задача. Докажите лемму 10.1.

Примем к сведению основной **принцип рассуждений** в теории обобщенных функций: *все рассуждения осуществляются или* ***поэлементно*** *на D (т.е. проверяются для произвольного фиксированного $\varphi \in D$) или через произвольную сходящуюся последовательности в D.*

10.3. Пространство D' обобщенных функций. Напомним, что отображение $f : D \to \mathbb{R}$ называется **линейным функционалом**, если оно сохраняет линейные операции:

$$\forall \varphi, \psi \in D \ \&\ \forall a, b \in \mathbb{R} \ \hookrightarrow\ f(a\varphi + b\psi) = af(\varphi) + bf(\psi).$$

Обозначение. Значение линейного функционала f на элементе $\varphi \in D$ будем обозначать как скалярное произведение: $f(\varphi) = (f, \varphi)$.

Определение 10.5. Линейный функционал $f : D \to \mathbb{R}$ называется **непрерывным**, если для **любой** сходящейся последовательности $\varphi_k \to 0$ в D выполняется сходимость для числовой последовательности: $(f, \varphi_k) \to 0 \in \mathbb{R}$ при $k \to \infty$.

Обсуждение. Определение непрерывности дано по принципу Гейне. Заметим, что непрерывность функционала **на всем** D проверяется только **в единственной точке** $0 \in D$. Это объясняется линейностью отображения f.

Задача. Пусть выполнено определение 10.5. Пусть последовательность $\varphi_k \to \varphi$ в D при $k \to \infty$. Докажите, что числовая последовательность $(f, \varphi_k) \to (f, \varphi)$ при $k \to \infty$.

Дадим основное

Определение 10.6. **Обобщенной функцией** называется линейный непрерывный функционал $f : D \to \mathbb{R}$. **Пространством обобщенных функций** D' называется линейное пространство линейных непрерывных функционалов на D, в котором линейные операции и сходимость определяются поэлементно на D:

1. $\forall f_1, f_2 \in D' \ \&\ \forall a, b \in \mathbb{R} \ \&\ \forall \varphi \in D \ \hookrightarrow\ (af_1 + bf_2, \varphi) = a(f_1, \varphi) + b(f_2, \varphi)$;
2. последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D'$ обобщенных функций называется **сходящейся** к обобщенной функции $f \in D'$, если

$$\forall \varphi \in D \ \hookrightarrow\ (f_k, \varphi) \to (f, \varphi) \text{ при } k \to \infty.$$

Замечание. Определить (=задать) обобщенную функцию $f \in D'$ означает: 1) определить ее **значения на каждой пробной функции** $\varphi \in D$; 2) убедиться, что зависимость **линейная**; 3) убедиться, что зависимость **непрерывная**.

Терминология. Поэлементная сходимость, введенная в определении 10.6, называется **слабой**. Пространство D' непрерывных линейных функционалов на D, в котором введена слабая сходимость, называется **сопряженным** к D (т.е. сохраняется терминология линейной алгебры).

10.4. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Сейчас обсудим вопрос, как классические функции представлены среди обобщенных.

В теории преобразований Фурье мы уже использовали такие функции:

Определение 10.7. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется **локально интегрируемой**, если она абсолютно интегрируема на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Примеры. Абсолютно интегрируемые на $\mathbb{R}$ функции и кусочно-непрерывные на $\mathbb{R}$ функции являются локально интегрируемыми. Заметим, что все пробные функции $\varphi \in D$ очевидно локально интегрируемы.

Определение 10.8. Обобщенная функция f_d называется **регулярной**, если она имеет представление в виде интегрального скалярного произведения, порожденного локально интегрируемой функцией f; т.е.

$$\forall \varphi \in D \hookrightarrow (f_d, \varphi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\, dx. \tag{10.2}$$

Обозначение. Классические и обобщенные функции мы будем обозначать единообразно – так принято в литературе и внутренне обосновано. Если же хотим подчеркнуть, что имеем дело с регулярной обобщенной функцией, то будем обозначать ее f_d.

Лемма 10.2. *(корректность определения 10.8) Справедливы утверждения:*

1. *Функционал, задаваемый формулой (10.2), является линейным и непрерывным, т.е. элементом пространства D'.*
2. *Формула (10.2) сохраняет линейные операции с функциями: для любых локально интегрируемых функций f и g и произвольных $a, b \in \mathbb{R}$ верно: $(af + bg)_d = af_d + bf_d$.*

Доказательство. Поскольку функция $\varphi \in D$ финитна, интегрирование в формуле (10.2) осуществляется на конечном отрезке $[a, b]$. Из абсолютной интегрируемости на $[a, b]$ функции f (см. определение 10.7) и непрерывности функции φ следует абсолютная интегрируемость на $[a, b]$ произведения $f\varphi$. Значит, формула (10.2) задает функционал на всем пространстве D. Его линейность следует из линейности интеграла.

Докажем непрерывность функционала. Пусть $\varphi_k \overset{D}{\to} 0$ при $k \to \infty$. Это означает (определение 10.4), что существует отрезок $[c, d]$, содержащий носители всех функций φ_k $(k \in \mathbb{N})$ и $\varphi_k(x) \underset{x\in\mathbb{R}}{\rightrightarrows} 0$ при $k \to \infty$. Поэтому

$$|(f, \varphi_k)| = \Big| \int_c^d f(x)\varphi_k(x)dx \Big| \leqslant$$

$$\max_{x\in[c,d]} |\varphi_k(x)| \cdot \int_c^d |f(x)|dx \ \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Первый пункт доказан. ■

Задача. Докажите второй пункт леммы 10.2.

Следующее утверждение уточняет связь между классическими и регулярными обобщенными функциями.

Лемма 10.3. *(о биективности) Две регулярные обобщенные функции, порожденные двумя классическими* ***непрерывными*** *функциями, равны тогда и только тогда, когда равны их прообразы:*

$$f, g \in C^0(\mathbb{R}) : \ f = g \ \Leftrightarrow \ f_d = g_d.$$

Обсуждение. Лемма 10.3 показывает, что в пространстве D пробных функций достаточно много элементов, с помощью которых можно различать классические непрерывные функции. С другой стороны, каждую пробную функцию

$\varphi \in D$ можно понимать как обобщенную $\varphi_d \in D'$. Вывод 1: пространство D' не уже, чем пространство D пробных функций. Можно доказать, что утверждение леммы справедливо не только для непрерывных функций f, но и для локально интегрируемых; однако формулировка и доказательство потребуют понятия меры Лебега (а не меры Жордана). Вывод 2: в пространстве D' присутствует по **одному** представителю f_d **каждой** локально интегрируемой функции f. Значит, пространство D' не уже, чем пространство локально интегрируемых функций.

Доказательство демонстрирует возможности применения функции (10.1) "шапочка". Импликация $f = g \;\Rightarrow\; f_d = g_d$ очевидна. Допустим, что обратная импликация неверна. Тогда в некоторой точке x_0 классические функции различаются: $f(x_0) \neq g(x_0)$. В силу непрерывности функций, найдется ε-окрестность точки x_0, в которой функция $h(x) := f(x) - g(x)$ сохраняет знак. Возьмем в качестве пробной функции "шапочку", ширины ε, сдвинутую в точку x_0. Тогда:

$$(f_d, \eta(x - x_0, \varepsilon)) - (g_d, \eta(x - x_0, \varepsilon)) = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} h(x)\eta(x - x_0, \varepsilon)dx \neq 0. \;\blacksquare$$

Теперь нужно убедиться, что среди обобщенных функций есть отличные от регулярных, иначе вся конструкция окажется бесполезной. Сначала дадим им название:

Определение 10.9. Обобщенные функции, не являющиеся регулярными, называются **сингулярными**.

Лемма 10.4. *(о существовании сингулярных обобщенных функций) Дельта-функция Дирака $\delta(\varphi) = \varphi(0)$ является сингулярной функцией.*

Доказательство. Линейность функционала δ очевидна. Докажем его непрерывность. Если $\varphi_k \to 0$ в D при $k \to \infty$, то тем более числовая последовательность $\varphi_k(0) \to 0$ при $k \to \infty$. Значит, дельта-функция – элемент пространства D'. Остается показать, что это именно сингулярный элемент. Допустим противное: существует такая локально интегрируемая функция $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что

$$\forall \varphi \in D \;\hookrightarrow\; \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\varphi(x)\; dx = \varphi(0).$$

Возьмем в качестве пробной функции "шапочку" ширины a. Заметим, что $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} \eta(x; a) = \eta(0; a) = e^{-1}$. Тогда **для любого** $a > 0$ верно:

$$\eta(0; a) = \int_{-a}^{a} h(x)\eta(x; a)\; dx \leqslant \eta(0; a) \int_{-a}^{a} |h(x)|\; dx \;\Rightarrow\; \int_{-a}^{a} |h(x)|\; dx \geqslant 1.$$

С другой стороны, в силу локальной интегрируемости функции h, справедливо предельное равенство: $\int_{-a}^{a} |h(x)| dx \to +0$ при $a \to +0$. Противоречие. $\blacksquare$

Хотя дельта-функция сингулярна, существуют последовательности регулярных функций, которые к ней сходятся в D' (см. определение 10.6).

Примеры последовательностей регулярных обобщенных функций, сходящихся к дельта-функции:

1. Пусть $(1/\pi)D_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ – последовательность нормированных ядер Дирихле (см. определение 2.1 и лемму 2.1). Переопределим их нулем вне периода:

$$\hat{D}_n(x) := \begin{cases} (1/\pi)D_n(x), & |x| < \pi, \\ 0, & |x| \geqslant \pi, \end{cases}$$

Последовательность $\hat{D}_n \xrightarrow{D'} \delta$ при $n \to \infty$.
2. Пусть $(1/\pi)\Phi_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ – последовательность нормированных ядер Фейера (см. определение 4.1 и лемму 4.2). Поступим аналогично примеру 1:

$$\hat{\Phi}_n(x) := \begin{cases} (1/\pi)\Phi_n(x), & |x| < \pi, \\ 0, & |x| \geqslant \pi, \end{cases}$$

Последовательность $\hat{\Phi}_n \xrightarrow{D'} \delta$ при $n \to \infty$.
3. Последовательность "растущих столбиков":

$$h_n(x) := \begin{cases} n, & |x| < \frac{1}{2n}, \\ 0, & |x| \geqslant \frac{1}{2n}, \end{cases}$$

Последовательность $h_n \xrightarrow{D'} \delta$ при $n \to \infty$.

Замечание. Теперь, сопоставляя определение дельта-функции с доказательствами теорем 2.1 (принцип локализации) и 4.1, понятно, что последние являются по сути обоснованием предельных переходов ядер $\hat{D}_n$ и $\hat{\Phi}_n$ к дельта-функции в пространстве D'.

Задача. Докажите, что $h_n \xrightarrow{D'} \delta$ при $n \to \infty$. Указание: достаточно показать, что $\forall \varphi \in D$ верно предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty}(h_n, \varphi) = (\delta, \varphi) := \varphi(0) \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty}\int_{-1/2n}^{1/2n} h_n(x)\varphi(x)dx = \varphi(0).$$

Возникает естественный вопрос: можно ли произвольную сингулярную обобщенную функцию аппроксимировать в D' последовательностью регулярных? Ответ на этот вопрос положительный; более того, можно обойтись только пробными функциями. Без доказательства примем к сведению:

Теорема 10.1. *Каждая обобщенная функция $f \in D'$ есть слабый предел последовательности функций из D, трактуемых как регулярные обобщенные функции.*

Обсуждение. Утверждение теоремы 10.1, в частности, означает, что сопряженное пространство D' шире пространства D, которое его породило. Это явление, конечно, связано с неполнотой D как линейного подмногообразия $D_d \subset D'$ относительно слабой топологии (определение 10.6 п. 2). Отметим, что пространство D в своей топологии (см. определение 10.4) является полным.

10.5. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую.

Определение 10.10. Для произвольной обобщенной функции $f \in D'$ и бесконечно дифференцируемой $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ положим

$$\alpha f \in D' : \ \forall \varphi \in D \ \hookrightarrow \ (\alpha f, \varphi) := (f, \alpha\varphi). \tag{10.3}$$

Лемма 10.5. *(корректность определения) Введенное произведение:*

1. *является обобщенной функцией;*
2. *обладает дистрибутивностью по каждому сомножителю:*

$$(\alpha + \beta)(f + g) = \alpha f + \alpha g + \beta f + \beta g;$$

3. *сохраняет преемственность: если f_d – регулярная обобщенная функция, то $\alpha f_d = (\alpha f)_d$.*

Замечание. О коммутативности умножения говорить бессмысленно, поскольку сомножители в общем случае из разных пространств.

Доказательство. Функционал (10.3) линеен и непрерывен (докажите!), что обосновывает п. 1.

Докажем п. 3. Т.е. докажем, что

$$\forall \varphi \in D \ \hookrightarrow \ (\alpha f_d, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x) f(x) \varphi(x) dx.$$

Но, согласно определению (10.3) и определению (10.2) регулярной функции, имеем:

$$\forall \varphi \in D \ \hookrightarrow \ (\alpha f_d, \varphi) := (f_d, \alpha\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\alpha(x)\varphi(x) dx. \ \blacksquare$$

Задача. Докажите п. 2 леммы 10.5.

Поскольку дельта-функция является одним из основных инструментов конструирования обобщенных функций с нужными свойствами, полезна следующая

Лемма 10.6. *(об умножении на дельта-функцию) Пусть $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$. Тогда $\alpha(x)\delta(x) = \alpha(0)\delta(x)$.*

Доказательство. Для произвольной функции $\varphi \in D$ верно:

$$(\alpha\delta, \varphi) := (\delta, \alpha\varphi) = (\alpha\varphi)(0) := \alpha(0)\varphi(0) = \alpha(0)(\delta, \varphi). \ \blacksquare$$

10.6. Дифференцирование обобщенных функций. В начале двадцатого века были обнаружены “решения” уравнений математической физики, которые не имели производных в классическом понимании. Если же трактовать эти “решения” как обобщенные функции, то проблема их дифференцирования преодолевается.

Пусть сначала $f \in C^1(\mathbb{R})$. В этом случае существует непрерывная производная $f' \in C^1(\mathbb{R})$, которую мы уже умеем трактовать как обобщенную регулярную функцию. Применим определение (10.2) и **проинтегрируем по частям**, пользуясь **финитностью** пробных функций, получим:

$$\forall \varphi \in D \hookrightarrow ((f')_d, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -(f_d, \varphi').$$

Преимущество полученного выражения по сравнению с исходным в том, что в нем на функцию f дифференцирование не распространяется – оно **перенесено на пробную функцию**. (Заметим, что этот же прием "перенесения" на пробную функцию уже применялся в определении 10.10 умножения на обобщенную функцию.) Теперь мы можем предложить

Определение 10.11. **Производной** обобщенной функции $f \in D'$ называется обобщенная функция $f' \in D'$, которая определяется формулой

$$(f', \varphi) := -(f, \varphi') \text{ для произвольной пробной функции } \varphi \in D. \tag{10.4}$$

Лемма 10.7. *Определение 10.11 корректно:*

1. *функционал в правой части формулы (10.4) определен на D, линеен и непрерывен;*
2. *соблюден принцип преемственности: если $f \in C^1(\mathbb{R})$, то $(f_d)' = (f')_d$.*

Задача. Докажите лемму 10.7. Указания: 1) воспользуйтесь финитностью и бесконечной дифференцируемостью функций $\varphi \in D$; 2) см. мотивацию перед определением 10.11.

Замечательно, что остаются неизменными основные

Теорема 10.2. *свойства дифференцирования:*

1. *линейность:*

$$\forall f_1, f_2 \in D' \;\; \& \;\; \forall a, b \in \mathbb{R} \hookrightarrow (af_1 + bf_2)' = af_1' + bf_2';$$

2. *непрерывность при слабой сходимости:*

$$\text{если } f_k \overset{D'}{\to} f \text{ при } k \to \infty \Rightarrow f_k' \overset{D'}{\to} f' \text{ при } k \to \infty.$$

3. *правило Лейбница:*

$$\forall \alpha \in C^\infty(\mathbb{R}) \;\; \forall f \in D' \hookrightarrow (\alpha f)' = \alpha' f + \alpha f'.$$

Доказательство п. 2: для произвольной функции $\varphi \in D$

$$(f_k', \varphi) = -(f_k, \varphi') \underset{k\to\infty}{\overset{D'}{\to}} -(f, \varphi') = (f', \varphi).$$

Доказательство п .3: для произвольной функции $\varphi \in D$

$$((\alpha f)', \varphi) = -(\alpha f, \varphi') = (f, -\alpha\varphi') = (f, \alpha'\varphi - (\alpha\varphi)') =$$

$$(\alpha' f, \varphi) + (f', \alpha\varphi) = (\alpha' f, \varphi) + (\alpha f', \varphi) = (\alpha' f + \alpha f', \varphi). \blacksquare$$

Задача. Докажите п. 1 теоремы 10.2

Естественно следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.12. **Производная n-го порядка** задается формулой

$$(f^{(n)}, \varphi) := (-1)^n (f, \varphi^{(n)}) \text{ для произвольной пробной функции } \varphi \in D.$$

СЛЕДСТВИЕ 10.1. *Обобщенные функции имеют производные любого порядка.*

Примеры дифференцирования обобщенных функций.

1) Продифференцируем функцию-ступеньку – **функцию Хевисайда** (Оливер Хевисайд, 1850-1925):

$$\theta(x) := \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Для регулярной обобщенной функции $\theta \in D'$ и произвольной функции $\varphi \in D$ получаем:

$$(\theta', \varphi) = -(\theta, \varphi') - \int_0^{+\infty} 1 \cdot \varphi'(x) dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

Значит, $\theta(x)' = \delta(x)$.

2) Пусть функция f непрерывно дифференцируема всюду, кроме x_0 – точки разрыва и скачка производной; причем сама функция испытывает скачок $h(x_0)$. Тогда ее обобщенная производная равна сумме $f_d' = f' + h(x_0)\delta(x - x_0)$, где слагаемое f' понимается как регулярная обобщенная функция. (Докажите!)

3) Продифференцируем регулярную обобщенную функцию $f(x) = x\theta(x)$, воспользовавшись правилом Лейбница, предыдущим примером и леммой 10.6:

$$(x\theta(x))' = 1 \cdot \theta(x) + x\delta(x) = \theta(x) + 0\delta(x) = \theta(x).$$

Этот результат выглядит естественно, поскольку функция $f(x) = x\theta(x)$ кусочно-гладкая (см. рис. ???)

Рис. ???

4) Найдем производную дельта-функции:

$$\forall \varphi \in D: \ (\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0).$$

5) Рассмотрим 2π-периодическую, кусочно непрерывную и кусочно дифференцируемую функцию “пила”

$$f(x) := \begin{cases} -\frac{\pi + x}{2}, & \text{если } -\pi \leqslant x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ \frac{\pi - x}{2}, & \text{если } 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Обобщенная производная этой функции равна

$$f_d'(x) = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2\pi k).$$

Поскольку обобщенная функция $f_d'(x)$ действует только на финитные пробные функции, проблем с бесконечной суммой сдвинутых на $2\pi k$ дельта-функций не возникает. С другой стороны, данная функция раскладывается в ряд Фурье, который сходится к ней в каждой точке:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}.$$

Формальное почленное дифференцирование приводит к ряду

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx),$$

который расходится в каждой точке (в этом нетрудно убедиться, поскольку частичная сумма ряда выражается через ядро Дирихле по формуле $FS_n(f', x) = D_n(x) - 1/2$). Однако ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\cos(kx))_d$, рассматриваемый в пространстве D', сходится к обобщенной функции f'_d.