В. В. Горяйнов, Е. С. Половинкин

Лекции по теории функций комплексного переменного

Содержание

§ 1. Комплексные числа

Возникновение комплексного анализа первоначально было связано с решением алгебраических уравнений. В дальнейшем выяснилось, что анализ над полем комплексных чисел обладает рядом преимуществ и является основой многих методов исследований в различных областях математики.

1.1. Алгебра комплексных чисел. С точки зрения разрешимости алгебраического уравнения $x^2+1=0$ появляется необходимость расширения поля вещественных чисел. Пусть i — новое число (*мнимая единица*), которое удовлетворяет условию $i^2=i\cdot i=-1$. Если производить операции сложения и умножения над вещественными числами и мнимой единицей, то мы естественным образом приходим к записи *комплексных чисел* $z=x+iy$, где $x,y\in\mathbb{R}$. В этой записи x называют вещественной частью комплексного числа z и обозначают $x=\operatorname{Re} z$, а y — мнимой частью с обозначением $y=\operatorname{Im} z$. Если $x=0$, то комплексное число z называют чисто мнимым, а в случае $y=0$ говорят, что z вещественно. Нуль является единственным комплексным числом, которое одновременно и вещественное и чисто мнимое. Под *равенством* двух комплексных чисел понимается одновременное равенство вещественных и мнимых частей.

Арифметические операции сложения и умножения не выводят за рамки комплексных чисел, если предполагать, что для них выполняются те же арифметические законы, как и для вещественных чисел, а также выполняется правило $i^2=-1$. Действительно,

$$(\alpha+i\beta)+(\gamma+i\delta)\;=\;(\alpha+\gamma)+i(\beta+\delta),\quad (\alpha+i\beta)(\gamma+i\delta)\;=\;(\alpha\gamma-\beta\delta)+i(\alpha\delta+\beta\gamma).$$

Менее очевидно, что в рамках комплексных чисел возможно деление. Пусть $\gamma+i\delta\neq 0$, т.е. $\gamma^2+\delta^2\neq 0$. Тогда частное $(\alpha+i\beta)/(\gamma+i\delta)=x+iy$ должно определяться из равенства $\alpha+i\beta=(\gamma+i\delta)(x+iy)$. С учётом условия равенства комплексных чисел x и y должны являться решением системы двух линейных уравнений

$$\begin{cases}\gamma x\;-\;\delta y\;=\;\alpha,\\ \delta x\;+\;\gamma y\;=\;\beta.\end{cases}$$

Поскольку $\gamma^2+\delta^2\neq 0$, то эта система имеет единственное решение

$$x\;=\;\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2},\quad y\;=\;\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}.$$

В частности, обратное к числу $\alpha+i\beta\neq 0$ определяется равенством

$$\frac{1}{\alpha+i\beta}\;=\;\frac{\alpha-i\beta}{\alpha^2+\beta^2}\;=\;\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}-i\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Можно также получить явный вид квадратного корня из комплексного числа $\alpha+i\beta$. Действительно, нам нужно найти число $x+iy$, которое удовлетворяет равенству

$$(x+iy)^2\;=\;\alpha+i\beta.$$

Снова равенство комплексных чисел приводит к системе двух вещественных уравнений

$$\begin{cases}x^2\;-\;y^2\;=\;\alpha,\\ \qquad 2xy\;=\;\beta.\end{cases}\tag{1.1}$$

Её решение также должно удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases}\quad x^2\;-\;y^2\;=\;\alpha,\\ (x^2+y^2)^2\;=\;\alpha^2+\beta^2,\end{cases}$$

из которой следуют равенства

$$x^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha\right), \quad y^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha\right).$$

Таким образом, возможны лишь по два значения для x и для y:

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}.$$

Выбор знаков можно осуществить с учетом равенства $2xy = \beta$. Если $\beta = 0$, то решениями системы (1.1) являются

$$x = \pm\sqrt{\alpha}, \qquad y = 0$$

при $\alpha \geqslant 0$ и

$$x = 0, \qquad y = \pm\sqrt{-\alpha}$$

при $\alpha < 0$. В случае $\beta \neq 0$ значения x и y должны быть одного знака при $\beta > 0$ и иметь разные знаки при $\beta < 0$. Следовательно, для любого комплексного числа $\alpha + i\beta \neq 0$ существует ровно два квадратных корня:

$$\sqrt{\alpha+i\beta} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\alpha}{2}} + i\frac{\beta}{|\beta|}\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{2}}\right)$$

если $\beta \neq 0$, а при $\beta = 0$ этими корнями являются $\pm\sqrt{\alpha}$, если $\alpha > 0$, и $\pm i\sqrt{-\alpha}$, если $\alpha < 0$. Оба эти корня, как и в случае извлечения квадратного корня из положительного числа, отличаются друг от друга только знаком.

Отметим также, что введенное выше равенство комплексных чисел можно подкрепить следующими рассуждениями. Пусть $\alpha + i\beta = \gamma + i\delta$, т. е. мы имеем две записи одного комплексного числа. Тогда $\alpha - \gamma = i(\delta - \beta)$ и после возведения в квадрат обеих частей равенства приходим к равенству вещественных чисел $(\alpha-\gamma)^2 = -(\delta-\beta)^2$, которое возможно лишь в случае $\alpha = \gamma$ и $\beta = \delta$ одновременно. Совокупность всех комплексных чисел обозначают символом $\mathbb{C}$. Из проведенных выше рассуждений следует, что $\mathbb{C}$ является числовым полем.

Под *комплексным сопряжением* понимается операция, которая каждому комплексному числу $a = \alpha + i\beta$ ставит в соответствие *сопряжённое* число $\overline{a} = \alpha - i\beta$. Комплексное сопряжение является инволюцией, что выражается равенством $\overline{\overline{a}} = a$. Вещественная и мнимая части комплексного числа a алгебраически выражаются через a и $\overline{a}$:

$$\operatorname{Re} a = \frac{1}{2}(a+\overline{a}), \qquad \operatorname{Im} a = \frac{1}{2i}(a-\overline{a}).$$

Фундаментальным свойством сопряжения является то, что

$$\overline{a+b} = \overline{a}+\overline{b}, \qquad \overline{ab} = \overline{a}\,\overline{b}.$$

Эти равенства легко проверяются непосредственным сравнением левых и правых частей. Далее, поскольку частное $z = a/b$ определяется как решение уравнения $a = bz$, то в силу предыдущих свойств $\overline{a} = \overline{b}\,\overline{z}$, откуда получаем

$$\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}.$$

Заметим теперь, что для любого комплексного числа $a = \alpha + i\beta$ произведение $a\overline{a} = \alpha^2 + \beta^2$ всегда принимает неотрицательное значение и равняется нулю лишь в случае $a = 0$. Неотрицательный корень $\sqrt{a\overline{a}}$ называется *модулем* комплексного числа a и обозначается $|a|$. Отметим основные свойства модуля. Непосредственно из определения следует, что $a\overline{a} = |a|^2$ и $|\overline{a}| = |a|$. Для произведения двух комплексных чисел a и b получаем

$$|ab|^2 \;=\; ab\overline{ab} \;=\; ab\overline{a}\overline{b} \;=\; a\overline{a}b\overline{b} \;=\; |a|^2|b|^2,$$

т. е. $|ab| = |a||b|$. Если $b \neq 0$, то для частного a/b будет выполняться равенство $b(a/b) = a$. Используя свойство модуля для произведения чисел, получаем $|b||a/b| = |a|$, откуда следует равенство

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

В отличие от вещественных чисел комплексные числа не связаны отношением порядка. Поэтому все неравенства записываются только для вещественных чисел. Из определения модуля сразу же следуют неравенства

$$-|a| \;\leqslant\; \operatorname{Re} a \;\leqslant\; |a|, \qquad -|a| \;\leqslant\; \operatorname{Im} a \;\leqslant\; |a|.$$

Равенство $\operatorname{Re} a = |a|$ имеет место в том и только том случае, если a вещественно и неотрицательно. Далее, для любых двух комплексных чисел a и b имеем

$$|a+b|^2 = (a+b)\overline{(a+b)} = |a|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re}\{a\overline{b}\} \leqslant |a^2| + |b|^2 + 2|a||b| = (|a| + |b|)^2.$$

Отсюда следует неравенство треугольника для комплексных чисел

$$|a+b| \;\leqslant\; |a| \;+\; |b|.$$

Заметим, что в этом неравенстве знак равенства достигается лишь в случае, если $a\overline{b} \geqslant 0$.

Применяя неравенство треугольника, получаем

$$|a| \;=\; |(a-b)+b| \;\leqslant\; |a-b| + |b|,$$

откуда следует, что $|a| - |b| \leqslant |a-b|$. Аналогично получаем

$$|b| \;=\; |(b-a)+a| \;\leqslant\; |b-a| + |a|$$

и $|b| - |a| \leqslant |a-b|$. Полученные неравенства приводят к следующему

$$\big||a| - |b|\big| \;\leqslant\; |a-b|.$$

1.2. Геометрическое представление комплексных чисел. На координатной плоскости комплексное число $a = \alpha + i\beta$ можно интерпретировать либо как точку с координатами (α, β), либо как вектор, выходящий из начала координат в эту точку. Саму плоскость при этом будем называть *комплексной плоскостью.*

Сложение комплексных чисел вполне согласуется с векторным сложением. Кроме того, простое геометрическое содержание получают в рамках векторной интерпретации комплексных чисел модуль $|a|$ (длина вектора), неравенство треугольника $|a+b| \leqslant |a|+|b|$ и тождество параллелограмма

$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2+|b|^2).$$

Комплексное число a и его комплексное сопряжение $\overline{a}$ представляют на комплексной плоскости точки, симметричные относительно вещественной оси. Точка, симметричная к a относительно мнимой оси, выражается в комплексной записи как $-\overline{a}$.

Для геометрической интерпретации произведения комплексных чисел введем в комплексной плоскости полярные координаты. Если (r,φ) — полярные координаты точки (α,β), которую мы ассоциируем с комплексным числом $a = \alpha + i\beta$, то

$$\alpha = r\cos\varphi, \qquad \beta = r\sin\varphi.$$

Это приводит нас к *тригонометрической форме* записи комплексного числа a:

$$a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

При этом $r = |a|$, а полярный угол φ (угол, который образует вектор a с положительным направлением вещественной оси) называется *аргументом* комплексного числа $a \neq 0$. Нулю аргумент не приписывается. В остальных случаях аргумент определяется неоднозначно. Действительно, замена φ на $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, в тригонометрической форме записи дает то же самое комплексное число. В связи с этим условимся через $\arg a$ обозначать некоторое выделенное значение аргумента, например из промежутка $(-\pi,\pi]$, а множество всех значений аргумента обозначать

$$\operatorname{Arg}\{a\} = \{\arg a + 2k\pi\colon\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Рассмотрим теперь два комплексных числа $a_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $a_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Их произведение записывается в виде

$$a_1a_2 = r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)].$$

Используя теоремы косинусов и синусов суммы углов, получаем

$$a_1a_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

То, что модули перемножаются при умножении комплексных чисел, мы видели из алгебраического определения модуля. Полученное выше равенство даёт также правило сложения аргументов:

$$\operatorname{Arg}\{a_1a_2\} = \operatorname{Arg}\{a_1\} + \operatorname{Arg}\{a_2\},$$

или в другой записи

$$\arg(a_1a_2) = \arg a_1 + \arg a_2 \pmod{2\pi}.$$

Другими словами, при произведении комплексных чисел их аргументы складываются.

Пусть теперь $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$. Тогда

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{r}\frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)).$$

Отсюда и из доказанного свойства аргумента для произведения получаем

$$\operatorname{Arg}\left\{\frac{a}{b}\right\} = \operatorname{Arg}\{a\} - \operatorname{Arg}\{b\},$$

т. е. при делении комплексных чисел аргументы вычитаются.

Тригонометрическая форма записи комплексного числа позволяет дать полный анализ решений *биномиального уравнения*

$$z^n = a,$$

$a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Решение z будем искать в виде $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Из правила умножения комплексных чисел сразу же получаем

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

В случае $\rho = 1$ это равенство принимает вид

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

и носит имя *Муавра*. Таким образом, уравнение $z^n = a$ эквивалентно системе

$$\rho^n = r, \quad n\theta = \varphi + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

из которой следует, что все решения уравнения $z^n = a$ можно представить формулой

$$z = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right),$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$. Это — все корни n-ой степени из числа $a \neq 0$. Они расположены на окружности с центром в начале координат и радиуса $\sqrt[n]{r}$. В случае $a = 1$ получаем корни n-ой степени из единицы: $1, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}$, где

$$\omega_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

1.3. Последовательности и ряды. Расширенная комплексная плоскость. Аналогично вещественному случаю в комплексном анализе вводятся понятия окрестности и предела числовой последовательности на основе модуля комплексного числа. Для $a \in \mathbb{C}$ и $r > 0$ под окрестностью точки a радиуса r будем понимать множество

$$\mathcal{O}_r(a) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - a| < r\}.$$

Очевидно, что в плоскости $\mathbb{C}$, которую можно отождествить с $\mathbb{R}^2$, окрестность $\mathcal{O}_r(a)$ представляет собой открытый круг с центром в точке a и радиусом r. Через $\overline{\mathcal{O}}_r(a)$ будем обозначать замкнутый круг, т. е.

$$\overline{\mathcal{O}}_r(a) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - a| \leqslant r\},$$

а через $\dot{\mathcal{O}}_r(a) = \{z \in \mathbb{C}\colon 0 < |z-a| < r\}$ — проколотую окрестность точки a.

Пусть $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ — последовательность комплексных чисел. Будем говорить, что комплексное число $a = \alpha + i\beta$ является *пределом* последовательности $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что $|a_n - a| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N(\varepsilon)$. Другими словами, при $n \geqslant N(\varepsilon)$ точки a_n будут попадать в ε-окрестность $\mathcal{O}_\varepsilon(a)$ точки a. В случае существования предела a последовательности $\{a_n\}$ эту последовательность называют *сходящейся* и пишут

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Заметим, что в силу неравенств

$$|\alpha_n - \alpha| \leqslant |a_n - a|,\ |\beta_n - \beta| \leqslant |a_n - a|,\ |a_n - a| \leqslant |\alpha_n - \alpha| + |\beta_n - \beta|$$

условие $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ эквивалентно следующим двум:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha, \qquad \lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta.$$

Таким образом, последовательность $\{a_n\}$ комплексных чисел $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ сходится в том и только том случае, если сходятся последовательности вещественных частей $\{\alpha_n\}$ и мнимых частей $\{\beta_n\}$ одновременно. Кроме того, применение критерия Коши для последовательностей вещественных и мнимых частей приводит к следующему результату. Последовательность $\{a_n\}$ комплексных чисел является сходящейся в том и только том случае, если она *фундаментальна*, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что $|a_n - a_m| < \varepsilon$ при всех $n, m \geqslant N(\varepsilon)$. Аналогично переносятся все свойства сходящихся последовательностей из вещественного анализа на комплексные последовательности.

Среди *расходящихся* последовательностей $\{a_n\}$ в комплексном анализе выделяют те, для которых $|a_n| \to +\infty$ при $n \to \infty$. Более точно, будем говорить, что последовательность $\{a_n\}$ стремится к бесконечности и писать $a_n \to \infty$ (или $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$), если для любого $R > 0$ найдется номер $N(R)$ такой, что $|a_n| > R$ при всех $n \geqslant N(R)$. В связи с этим, а также по другим причинам, комплексная плоскость $\mathbb{C}$ *пополняется* бесконечно удалённой точкой $z = \infty$. Под окрестностью бесконечно удалённой точки понимается внешность круга с центром в начале координат, т. е. множество точек $z \in \mathbb{C}$, для которых $|z| > R$, где $R > 0$. Пополненная (или *расширенная*) комплексная плоскость обозначается через $\overline{\mathbb{C}}$. В расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ принцип Больцано—Вейерштрасса уточняется следующим образом. Из любой последовательности $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ можно выделить сходящуюся (в собственном или расширенном смысле) подпоследовательность. Действительно, если последовательность $\{a_n\}$ ограничена, то к ней (как к последовательности точек в $\mathbb{R}^2$) можно применить классический принцип Больцано—Вейерштрасса. (Либо применить его к последовательностям вещественных и мнимых частей.) В случае неограниченной последовательности $\{a_n\}$ можно выделить подпоследовательность a_{n_k}, удовлетворяющую условию $|a_{n_k}| > k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Наглядное представление топологических свойств расширенной комплексной плоскости даёт *стереографическая проекция.* Рассмотрим сферу $\mathbb{S}$, которая в трехмерном пространстве задаётся уравнением $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. С каждой точкой (x_1, x_2, x_3) на сфере $\mathbb{S}$, исключая точку $(0,0,1)$, можно ассоциировать комплексное число $z \in \mathbb{C}$ по формуле

$$z = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

Это равенство определяет взаимно-однозначное соответствие между $\mathbb{S} \setminus \{(0,0,1)\}$ и $\mathbb{C}$. Действительно, используя очевидное соотношение

$$|z|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3},$$

легко находится обратное отображение

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \quad x_1 = \frac{z + \overline{z}}{1 + |z|^2}, \quad x_2 = \frac{1}{i} \frac{z - \overline{z}}{1 + |z|^2}.$$

Заметим также, что при $|z| \to \infty$ соответствующая точка на сфере $\mathbb{S}$ стремится к точке $(0,0,1)$. Продолжая отображение соответствием $(0,0,1) \mapsto \infty$, приходим к взаимно-однозначному соответствию $\mathbb{S}$ и $\overline{\mathbb{C}}$. Это отображение называется стереографической проекцией и обладает рядом замечательных свойств.

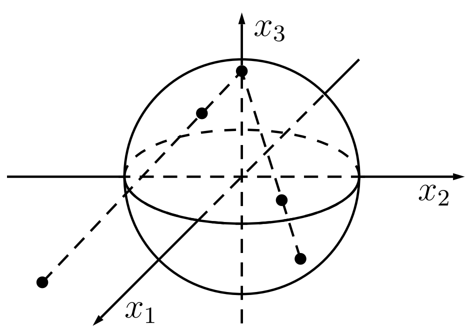

Рис. 1. Сфера Римана

Как и в вещественном анализе под числовым рядом понимается формальная сумма $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. С рядом ассоциируется последовательность его частичных сумм $S_n = a_1 + \ldots + a_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Говорят, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если сходится последовательность его частичных сумм. При этом $S = \lim_{n \to \infty} S_n$ называется суммой ряда и пишут $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пусть $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ будут иметь вид

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + i \sum_{k=1}^{n} \beta_k.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится в том и только том случае, если сходятся два вещественных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$. Критерий Коши, примененный к последовательности частичных сумм, показывает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится в том и только том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что

$$\left|\sum_{k=n}^{n+m} a_k\right| < \varepsilon$$

при всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ и натуральных m. Из критерия Коши и неравенства треугольника сразу же следует, что абсолютная сходимость ряда влечёт его сходимость. Как и в вещественном случае из критерия Коши следует также необходимое условие сходимости ряда: $a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

§ 2. Комплексная дифференцируемость

Теория функций комплексного переменного расширяет исчисление на комплексную область. При этом и дифференцирование и интегрирование приобретают некоторое новое значение. Их область применения существенно сужается и естественным образом возникает класс голоморфных или аналитических функций.

Под функцией комплексного переменного $w = f(z)$ будем понимать отображение множества $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ в комплексной z-плоскости в множество $f(D) = G \subset \overline{\mathbb{C}}$ комплексной w-плоскости. Если представить $z = x + iy$, $w = u + iv$, то задание функции f эквивалентно определению двух вещественных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ вещественных переменных x и y, т. е. $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Другими словами, функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дают запись отображения f в вещественных терминах. Как правило, мы будем рассматривать случай, когда функция f определена на открытом множестве.

Определение 2.1. Будем говорить, что функция $f(z)$ имеет предел A при $z \to a$ и писать

$$\lim_{z\to a} f(z) = A, \tag{2.1}$$

если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(z) - A| < \varepsilon$ при всех $z \in \dot{\mathcal{O}}_\delta(a)$, т. е. при $0 < |z - a| < \delta$.

Формулировка определения легко видоизменяется в случаях, когда $a = \infty$ или $A = \infty$ (или оба вместе). Например, при $a = \infty$ нужно фразу «при всех $z \in \dot{\mathcal{O}}_\delta(a)$» заменить на фразу «при $|z| > \delta$». Хорошо известные из вещественного анализа результаты, касающиеся пределов суммы, произведения и частного, остаются верными и в комплексном случае, поскольку при их доказательстве используются лишь свойства модуля. Заметим также, что условие (2.1) эквивалентно следующему

$$\lim_{z\to a} \overline{f(z)} = \overline{A}. \tag{2.2}$$

Из (2.1) и (2.2) сразу же следуют соотношения

$$\lim_{z\to a} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} A, \qquad \lim_{z\to a} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} A.$$

Обратно, если выполнены последние два соотношения, то выполняются (2.1) и (2.2). Функция $f(z)$ называется *непрерывной в точке* a, если

$$\lim_{z\to a} f(z) = f(a).$$

Термин *непрерывная функция* будем употреблять в случае, когда f непрерывна во всех точках, где она определена. Из свойств предела следует, что сумма и произведение двух непрерывных функций являются непрерывными функциями. Частное двух непрерывных функций f и g также непрерывно в некоторой окрестности точки a, если в этой точке не обращается в нуль знаменатель. Кроме того, из неравенств

$$\left.\begin{array}{l} |\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} f(z_0)| \\ |\operatorname{Im} f(z) - \operatorname{Im} f(z_0)| \\ ||f(z)| - |f(z_0)|| \end{array}\right\} \leqslant |f(z) - f(z_0)|$$

следует, что если f непрерывна, то таковыми являются $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ и $|f|$.

Производная функции определяется как предел отношения приращений независимой и зависимой переменных, т. е. по форме комплексное дифференцирование вполне аналогично вещественному:

$$f'(a) = \lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Это определение производной и идентичность арифметических законов для комплексных и вещественных чисел показывают, что обычные правила дифференцирования суммы, произведения и частного выполняются и в комплексном случае. Однако, в отличие от понятия непрерывности, которое просто сводится к непрерывности вещественной и мнимой частей, условие дифференцируемости влечёт совершенно неожиданные свойства функции.

Теорема 2.1. *Для дифференцируемости функции* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *в точке* $z = x + iy$ *в комплексном смысле необходимо и достаточно, чтобы она была дифференцируема в вещественном смысле (т. е. дифференцируемы функции* $u(x,y)$ *и* $v(x,y)$*) и выполнялись равенства*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Вещественная дифференцируемость функции f в точке $z = x + iy$ означает представление приращений функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в виде

$$u(x+\xi, y+\eta) - u(x,y) = u'_x \cdot \xi + u'_y \cdot \eta + o(|\zeta|),$$
$$v(x+\xi, y+\eta) - v(x,y) = v'_x \cdot \xi + v'_y \cdot \eta + o(|\zeta|),$$

где частные производные вычислены в точке (x,y) и $\zeta = \xi + i\eta$. С другой стороны, комплексная дифференцируемость функции f в точке z эквивалентна представлению её приращения в виде

$$f(z+\zeta) - f(z) = f'(z)\zeta + \zeta\sigma(\zeta),$$

где $\sigma(\zeta) \to 0$ при $\zeta \to 0$. Пусть $f'(z) = \alpha + i\beta$. Тогда, отделяя в последнем равенстве вещественную и мнимую части, получаем

$$\begin{aligned} u(x+\xi, y+\eta) - u(x,y) &= \alpha \cdot \xi - \beta \cdot \eta + o(|\zeta|), \\ v(x+\xi, y+\eta) - v(x,y) &= \beta \cdot \xi + \alpha \cdot \eta + o(|\zeta|). \end{aligned}$$

Другими словами, $du = \alpha dx - \beta dy$, $dv = \beta dx + \alpha dy$. В силу единственности дифференциала получаем равенства

$$u'_x = \alpha, \quad u'_y = -\beta, \quad v'_x = \beta, \quad v'_y = \alpha,$$

из которых следуют соотношения (2.3). Таким образом, из комплексной дифференцируемости следует вещественная дифференцируемость и выполнение соотношений (2.3). При этом

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2.4}$$

Обратно, допустим, что f дифференцируема в вещественном смысле и выполняются соотношения (2.3). Тогда, умножая приращение функции v на i и складывая его с приращением функции u, получаем приращение функции f из которого следует её комплексная дифференцируемость. □

Определение 2.2. Функцию f, определённую на открытом множестве $D \subset \mathbb{C}$ будем называть *голоморфной (аналитической, регулярной)* в D, если она дифференцируема в комплексном смысле в каждой точке D. Будем говорить, что f голоморфна на произвольном множестве $E \subset \mathbb{C}$, если она голоморфна на некотором открытом множестве D, содержащем E.

Соотношения (2.3), которым удовлетворяют вещественная и мнимая части голоморфной функции, называются *условиями (или системой уравнений) Коши—Римана.* С учётом равенств (2.3) можно записать четыре различных выражения для $f'(z)$ в терминах частных производных. В ходе доказательства теоремы были получены следующие два

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = -i\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Сами условия Коши—Римана можно записать одним комплексным равенством

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Если воспользоваться инвариантностью формы первого дифференциала и формальной заменой dx и dy на dz и $d\overline{z}$, то очевидные преобразования

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(dz + d\overline{z}) + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}(dz - d\overline{z}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\overline{z} \end{aligned}$$

естественным образом приводят к дифференциальным операторам

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

В этих терминах условия Коши—Римана принимают вид

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

Система уравнений Коши—Римана (2.3) обладает рядом интересных свойств. В частности, если предположить, что функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ являются дважды непрерывно дифференцируемыми, то из (2.3) получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Отсюда и из равенства смешанных производных следует, что функция $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Дифференциальный оператор

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

называется оператором Лапласа, а дифференциальное уравнение $\triangle u = 0$ — уравнением Лапласа. Аналогично предыдущему получаем, что функция $v(x,y)$ также удовлетворяет уравнению Лапласа.

Определение 2.3. Функция $u(x,y)$ действительных переменных x, y, принимающая вещественные значения и дважды непрерывно дифференцируемая, называется *гармонической* в области определения (на открытом множестве D), если $\triangle u = 0$ всюду в D. Две гармонические функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$, связанные соотношениями Коши—Римана (2.3), называются *сопряжёнными* гармоническими функциями.

Как уже отмечалось выше, правила дифференцирования суммы, произведения и частного голоморфных функций совпадают с аналогичными правилами дифференцирования из вещественного анализа. Допустим теперь, что $w = f(z)$ — голоморфная в окрестности $\mathcal{O}_r(z_0)$ функция, которая принимает значения в окрестности $\mathcal{O}_\varrho(w_0)$ и $f(z_0) = w_0$. Пусть также функция $\zeta = g(w)$ голоморфна в окрестности $\mathcal{O}_\varrho(w_0)$. Тогда композиция $\zeta = h(z) = g(f(z))$ является голоморфной в $\mathcal{O}_r(z_0)$ функцией и имеет место равенство

$$h'(z_0) = g'(w_0)f'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Действительно, пусть $\Delta z = z - z_0$ и $\Delta w = f(z) - f(z_0)$. В силу комплексной дифференцируемости функций f и g имеем

$$\Delta w = f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|), \quad g(w) - g(w_0) = g'(w_0) \cdot \Delta w + \Delta w \cdot \eta(\Delta w),$$

где $\eta(\Delta w) \to 0$ при $\Delta w \to 0$. Но тогда

$$\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0} = \frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{z-z_0} = g'(w_0)\frac{\Delta w}{\Delta z} + \frac{\Delta w}{\Delta z}\eta(\Delta w) \to g'(w_0)f'(z_0)$$

при $\Delta z \to 0$.

Определение 2.4. Множество $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется связным, если не существует двух открытых множеств G_1 и G_2, удовлетворяющих условиям:

(i) $E \subset G_1 \cup G_2$;
(ii) $E \cap G_1 \cap G_2 = \varnothing$;
(iii) $G_1 \cap E \neq \varnothing, \quad G_2 \cap E \neq \varnothing$.

Интуитивно связность означает, что множество E состоит из одного «куска». В случае, когда E является открытым множеством, условие (ii) можно сформулировать в виде $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, поскольку в этом случае множества G_1 и G_2, удовлетворяющие условиям (i) — (iii) можно заменить на $E \cap G_1$ и $E \cap G_2$.

Теорема 2.2. *Отрезок прямой — связное множество. При этом допускается, чтобы один из концов отрезка был бесконечно удалённой точкой, а сам отрезок был открытым, замкнутым или полуоткрытым.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. найдутся два открытых множества G_1 и G_2, для которых выполнены условия (i) — (iii), где E — наш отрезок. Тогда на E найдутся две конечные точки $a \in G_1$ и $b \in G_2$. Очевидно, что условия (i) — (iii) также выполняются при замене E на отрезок $E_1 = [a, b]$. Разобьём E_1 пополам и выберем ту его часть E_2, которая представляет собой отрезок с концами в разных множествах G_1 и G_2. Продолжая этот процесс, получим последовательность замкнутых вложенных отрезков $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$, длины которых стремятся к нулю. По теореме Кантора, существует единственная точка ξ, принадлежащая всем отрезкам последовательности $\{E_n\}$. Из условий (i), (ii) следует, что ξ принадлежит одному из множеств G_1 или G_2. Пусть это для определённости будет G_1. В силу открытости G_1 и стремления длин E_n к нулю следует, что $E_n \subset G_1$ при достаточно больших номерах n. Однако это противоречит условиям выбора E_n. □

Определение 2.5. Непустое открытое связное множество называется *областью.*

Следующий результат даёт характеристическое свойство области.

Теорема 2.3. *Непустое открытое множество $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ является связным в том и только том случае, если любые две его точки можно соединить ломаной, расположенной в D. При этом ломаную можно выбрать так, чтобы её звенья были параллельны координатным осям.*

Доказательство. Пусть D связно и $a \in D$. Обозначим через G_1 множество точек в D, которые можно соединить с a ломаной, расположенной в D и имеющей звенья, параллельные координатным осям. Через G_2 обозначим те точки из D, которые не удовлетворяют этому условию. Если некоторую точку $b \in D$ можно соединить с a указанной ломаной, то и точки круговой окрестности $\mathcal{O}_r(b) \subset D$ также можно соединить такой ломаной. Это означает, что G_1 —

открытое множество. Аналогично убеждаемся, что G_2 — открытое множество. В силу того, что D связно, одно из открытых множеств G_1 или G_2 должно быть пусто. Поскольку точка a содержится в D с некоторой окрестностью, то $G_1 \neq \varnothing$. Следовательно, $G_2 = \varnothing$ и все точки из D можно соединить с a ломаной со звеньями, параллельными координатным осям.

Обратно, пусть D — открытое множество и любые две точки этого множества можно соединить ломаной, расположенной в D. Тогда связность D легко устанавливается рассуждениями от противного. Действительно, допустим, что G_1 и G_2 — открытые множества, удовлетворяющие условиям: $G_1 \cup G_2 = D$, $G_1 \cap G_2 = \varnothing$ и $G_1 \neq \varnothing$, $G_2 \neq \varnothing$. Выберем две точки $a \in G_1$ и $b \in G_2$. По условию их можно соединить в D ломаной. На этой ломаной найдется отрезок E, концы которого расположены в разных множествах G_1 и G_2. Но тогда для E и G_1, G_2 будут выполнены условия (i) — (iii), что противоречит связности отрезка. □

Определение 2.6. Область $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется *односвязной*, если её дополнение $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ является связным множеством в $\overline{\mathbb{C}}$.

Заметим, что в этом определении дополнение рассматривается в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. В связи с этим определением полоса является односвязной областью.

Теорема 2.4. *Пусть f — голоморфная в области $D \subset \mathbb{C}$ функция и $f'(z) = 0$ для всех $z \in D$. Тогда $f(z) \equiv \mathrm{const}$ в D.*

Доказательство. Если $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, то из условия теоремы следует, что $u'_x \equiv 0$, $u'_y \equiv 0$, $v'_x \equiv 0$ и $v'_y \equiv 0$ в D. Допустим, что отрезок $E = \{z = x + iy_0 \colon x_1 \leqslant x \leqslant x_2\}$ содержится в D. Поскольку $u'_x(x, y_0) = 0$ при $x \in [x_1, x_2]$, то по теореме из вещественного анализа $u(x, y_0) \equiv \mathrm{const}$ на $[x_1, x_2]$. Другими словами, функция $u(x,y)$ является постоянной на горизонтальных отрезках, расположенных в D. Условие $u'_y \equiv 0$ даёт постоянство функции $u(x,y)$ на вертикальных отрезках. Аналогичным свойством обладает функция $v(x,y)$. Следовательно, функция $f(z)$ является постоянной на горизонтальных и вертикальных отрезках, расположенных в области D.

Пусть теперь z_1 и z_2 — произвольные точки области D. По предыдущей теореме их можно соединить в D ломаной со звеньями, параллельными координатным осям. В силу доказанного свойства функции f получаем $f(z_1) = f(z_2)$. □

Теорема 2.5. *[Об обратной функции]. Пусть в области D функция $w = f(z)$ голоморфна и имеет непрерывную производную. Допустим, что точке $z_0 \in D$ при отображении f соответствует точка $w_0 = f(z_0)$ и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда найдутся такие окрестность U точки z_0 (открытое множество, содержащее z_0) и окрестность V точки w_0, что f взаимно однозначно отображает U на V и обратное отображение $g = f^{-1}$ является голоморфной функцией в V. При этом*

$$g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что поскольку производная $f'(z)$ непрерывна, то её модуль $|f'(z)|$ также будет непрерывной функцией. По условию $|f'(z_0)| > 0$ и, следовательно, найдётся круговая окрестность $\mathcal{O}_r(z_0)$, в которой выполняется неравенство $|f'(z)| > 0$.

Далее, выделяя в переменных $z = x+iy$ и $w = u+iv$ вещественные и мнимые части, функцию $w = f(z)$ можно представить как отображение $f\colon (x, y) \mapsto (u, v)$, действующее в $\mathbb{R}^2$. Используя условия Коши — Римана, якобиан этого отображения преобразуется следующим образом

$$\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = u'_x \cdot v'_y - u'_y \cdot v'_x = (u'_x)^2 + (v'_x)^2 = |f'(z)|^2,$$

откуда видно, что в $\mathcal{O}_r(z_0)$ выполнены условия теоремы об обратном отображении из вещественного анализа. Согласно этой теоремы найдутся такие окрестности U точки z_0 и V точки w_0, что f взаимно однозначно отображает U на V и обратное отображение $g = f^{-1}$ является непрерывно дифференцируемым (в вещественном смысле). Для нас сейчас важно то, что $f\colon U \mapsto V$ является *топологическим* отображением, т. е. взаимно однозначным и непрерывным в обе стороны. Поскольку V является открытым множеством, то найдётся $\varepsilon > 0$ такое, что $\mathcal{O}_\varepsilon(w_0) \subset V$. Пусть теперь $w \in \dot{\mathcal{O}}_\varepsilon(w_0)$ и $\Delta w = w - w_0$, $\Delta z = g(w) - g(w_0) = z - z_0$. Тогда $\Delta z \neq 0$ и $\Delta z \to 0$ в том и только том случае, когда $\Delta w \to 0$. Замечая, что $\Delta w = f(z) - f(z_0)$, получаем

$$\lim_{\Delta w \to 0} \frac{g(w_0 + \Delta w) - g(w_0)}{\Delta w} = \lim_{\Delta w \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta w / \Delta z} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Таким образом, функция g дифференцируема в комплексном смысле в точке w_0. Однако, для любой пары точек $z \in U$ и $w \in V$, связанных равенством $w = f(z)$, выполнены все условия, что и для пары z_0, w_0. Следовательно, $z = g(w)$ является дифференцируемой в комплексном смысле на всем открытом множестве V и

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}. \qquad \square$$

Определение 2.7. Голоморфную в области D функцию f называют *однолистной* в D, если $f(z_1) = f(z_2)$ лишь в случае $z_1 = z_2$ для любой пары точек z_1, z_2 из D.

Другими словами, функция f однолистна в D, если она отображает D взаимно однозначно. Теорема об обратной функции утверждает, что если f голоморфна и её производная не обращается в нуль, то она *локально* однолистна, т. е. в некоторой окрестности. Пример функции $w = z^2$ показывает, что функция может быть локально однолистной, но не быть однолистной в области. В качестве области D можно рассмотреть кольцо $\{z \in \mathbb{C}\colon 1 < |z| < 2\}$.

§ 3. Степенные ряды и элементарные функции

Простейшим примером голоморфной функции является тождественно постоянная функция с производной, тождественно равной нулю. Другим примером голоморфной функции является $f(z) \equiv z$ с производной $f'(z) \equiv 1$. Поскольку сумма и произведение голоморфных функций также являются голоморфными функциями, то любой полином $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ представляет собой голоморфную в $\mathbb{C}$ функцию. Для расширения класса голоморфных функций естественно перейти к бесконечным суммам, т. е. к рядам.

Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций, определённых на множестве $E \subset \mathbb{C}$. Будем говорить, что эта последовательность сходится в точке $z_0 \in E$ к функции f, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon, z_0)$, что при всех $n \geqslant N(\varepsilon, z_0)$ выполняется неравенство $|f(z_0) - f_n(z_0)| < \varepsilon$. Последовательность f_n сходится к функции f на множестве E, если она сходится в каждой точке множества E. В случае, если для любого $\varepsilon > 0$ номер $N = N(\varepsilon)$ можно выбрать выбрать так, чтобы неравенство $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ выполнялось для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ и $z \in E$, то последовательность f_n называется равномерно сходящейся на множестве E. Важнейшим свойством равномерной сходимости является то, что пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций является непрерывная функция. Совершенно аналогично вещественному случаю устанавливается критерий Коши для равномерной сходимости: «Последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно на $E \subset \mathbb{C}$ в том и только том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что $|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$ для всех $z \in E$ и $n, m \geqslant N(\varepsilon)$».

Критерий Коши, примененный к частичным суммам функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, даёт признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ с неотрицательными α_n мажорирует на множестве E функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, т. е. $|f_n(z)| \leqslant \alpha_n$ для всех $z \in E$ и всех n, за исключением, быть может, конечного числа, и числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сходится, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится на E равномерно.

Под *степенным рядом* понимается функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \;=\; a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \tag{3.1}$$

где a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ — комплексные числа, называемые коэффициентами ряда, а z — комплексная переменная. Можно рассмотреть более общий вид степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, но его изучение сводится к (3.1) путём замены переменной $\zeta = z - z_0$.

Рассмотрим один простой, но важный, пример так называемого геометрического ряда $1 + z + z^2 + \ldots$. Его частичные суммы при $z \neq 1$ можно записать в в виде

$$S_n(z) \;=\; 1 + z + \ldots + z^n \;=\; \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Заметим, что в случае $|z| < 1$ предел частичных сумм существует и

$$S(z) \;=\; \lim_{n \to \infty} S_n(z) \;=\; \frac{1}{1 - z}.$$

В случае $|z| \geqslant 1$ не выполняется необходимое условие сходимости ряда и геометрический ряд расходится. Оказывается, что такая ситуация в определённом смысле типична для степенных рядов.

Теорема 3.1. *Для каждого степенного ряда* (3.1) *число*

$$R = 1/\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \qquad 0 \leqslant R \leqslant +\infty, \tag{3.2}$$

называемое радиусом сходимости, удовлетворяет следующим условиям:

(i) В каждом круге $|z| \leqslant r < R$ ряд (3.1) *сходится абсолютно и равномерно;*
(ii) Если $|z| > R$, то ряд (3.1) *расходится;*
(iii) Сумма ряда $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ является голоморфной в круге $|z| < R$ функцией, а её производная $S'(z)$ представляет собой сумму почленно продифференцированного ряда (3.1)*, т. е. ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.*

Доказательство. (i) Пусть $R > 0$ и $0 < r < R$. Выберем ϱ из интервала (r, R), т. е. $r < \varrho < R$. Поскольку

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} < \frac{1}{\varrho},$$

то найдется такой номер N, что $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/\varrho$ при всех $n \geqslant N$. Но тогда для $n \geqslant N$ и z из круга $|z| \leqslant r$ будут выполняться неравенства

$$|a_n z^n| = |a_n| \cdot |z|^n \leqslant \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n.$$

Это означает, что в круге $|z| \leqslant r$ члены ряда (3.1) мажорируются геометрической прогрессией $(r/\varrho)^n$, $n \geqslant N$. Поскольку $r/\varrho < 1$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(r/\varrho)^n$ сходится и по признаку Вейерштрасса степенной ряд (3.1) сходится абсолютно и равномерно в круге $|z| \leqslant r$. Таким образом, утверждение (i) доказано.

Для доказательства (ii) заметим, что если $|z| > R$, то в силу определения верхнего предела найдется подпоследовательность номеров n_k, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что $|a_{n_k} z^{n_k}| > 1$, поскольку

$$\frac{1}{|z|} < \frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Это означает, что для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ не выполняется необходимое условие сходимости и утверждение (ii) доказано.

Приступая к доказательству (iii), заметим прежде всего, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1},$$

полученный почленным дифференцированием ряда (3.1), имеет тот же радиус сходимости, что и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n$. Однако, поскольку $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R},$$

и радиус сходимости этих рядов также равен R. Пусть $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$. Для каждого натурального n обозначим через $S_n(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}$ частичную сумму ряда (3.1), а через $Q_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$ обозначим остаток этого ряда. Поскольку S_n представляет собой полином, то является голоморфной функцией, а его производная $S_n'(z)$ является частичной суммой продифференцированного ряда (3.1). Следовательно, $S_n'(z) \to g(z)$ при $n \to \infty$ для любого z из круга $|z| < R$.

Фиксируем произвольно z_0, $|z_0| < R$, и пусть r удовлетворяет неравенству $|z_0| < r < R$. Для $z \neq z_0$ из круга $|z| < r$ и натурального n имеет место равенство

$$\frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) = \left[\frac{S_n(z) - S_n(z_0)}{z - z_0} - S_n'(z_0)\right] + (S_n'(z_0) - g(z_0)) + \frac{Q_n(z) - Q_n(z_0)}{z - z_0}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано. Поскольку $|z|, |z_0| < r$, то

$$\left|\frac{Q_n(z) - Q_n(z_0)}{z - z_0}\right| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k \frac{z^k - z_0^k}{z - z_0}\right| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k (z^{k-1} + z^{k-2} z_0 + \ldots + z_0^{k-1})\right| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} k|a_k| r^{k-1}.$$

Правая часть последнего неравенства представляет собой остаток сходящегося ряда. Поэтому найдется такой номер N_1, что

$$\left|\frac{Q_n(z) - Q_n(z_0)}{z - z_0}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

при $n \geqslant N_1$, $|z| \leqslant r$. Далее, найдётся такой номер N_2, что

$$|S_n'(z_0) - g(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

при $n \geqslant N_2$. Пусть теперь $n \geqslant \max\{N_1, N_2\}$. Из определения производной $S_n'(z_0)$ следует, что найдется такое $\delta > 0$, что при $0 < |z - z_0| < \delta$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{S_n(z) - S_n(z_0)}{z - z_0} - S_n'(z_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, если $|z| < r$ и $0 < |z - z_0| < \delta$, то

$$\left|\frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} - g(z_0)\right| < \varepsilon.$$

Это доказывает дифференцируемость функции $S(z)$ и равенство $S'(z) = g(z)$ для всех z из круга $|z| < R$. □

Замечание 3.1. Равенство (3.2) известно в литературе как формула Коши — Адамара.

Замечание 3.2. Под теоремой Абеля (или первой теоремой Абеля) часто подразумевается утверждение: «Если ряд (3.1) сходится в точке z_0, то он сходится абсолютно и равномерно в любом круге $|z| \leqslant r < |z_0|$.» Это утверждение очевидным образом следует из доказанного выше.

Замечание 3.3. Применяя доказанную теорему к производной суммы степенного ряда, получаем голоморфность $S'(z)$ и разложение для её производной

$$S''(z) \,=\, 2a_2 + 6a_3 z + \ldots.$$

Повторяя этот процесс, приходим к бесконечной дифференцируемости суммы степенного ряда (3.1) в круге сходимости и равенствам

$$S^{(n)}(z) \,=\, n!a_n + \frac{(n+1)!}{1!}a_{n+1}z + \frac{(n+2)!}{2!}a_{n+2}z^2 + \ldots,$$

$n = 1, 2, \ldots$. В частности, имеют место формулы

$$a_n \,=\, \frac{S^{(n)}(0)}{n!}, \qquad S(z) \,=\, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Другими словами, $S(z)$ имеет разложение в ряд Тейлора — Маклорена.

Экспонента. Важнейшими свойствами функции e^x в вещественном анализе являются инвариантность относительно дифференцирования и условие $e^x|_{x=0} = 1$. Пусть функция f определена как сумма степенного ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Попробуем подобрать коэффициенты a_n так, чтобы выполнялись условия: $f'(z) = f(z)$ и $f(0) = 1$. Второе условие эквивалентно равенству $a_0 = 1$. Замечая также, что в круге сходимости степенного ряда выполняется равенство $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, приходим к соотношениям: $a_{n-1} = n a_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Это вместе с условием $a_0 = 1$ приводит к равенствам $a_n = 1/n!$, $n = 1, 2, \ldots$. Таким образом, естественно показательную функцию определить как сумму степенного ряда

$$e^z \,=\, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{3.3}$$

Поскольку $\sqrt[n]{n!} \to \infty$ при $n \to \infty$, то ряд (3.3), как следует из теоремы 3.1 сходится во всей комплексной плоскости. Следовательно, равенство (3.3) определяет e^z как голоморфную в $\mathbb{C}$ функцию. В случае, когда $z = x$ вещественно, мы получаем ряд Тейлора функции e^x из вещественного анализа. Другими словами, определённая равенством (3.3) функция e^z является продолжением вещественной функции e^x в комплексную плоскость. Вещественность коэффициентов степенного ряда (3.3) приводит к равенству $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ Отметим еще одно важное свойство функции e^z.

Теорема сложения. Для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ выполняется равенство

$$e^{z_1+z_2} \,=\, e^{z_1} e^{z_2}.$$

Доказательство. Фиксируем произвольно $a \in \mathbb{C}$ и рассмотрим функцию $g(z) = e^z e^{a-z}$. Поскольку

$$g'(z) \,=\, e^z e^{a-z} - e^z e^{a-z} \,=\, 0$$

для всех $z \in \mathbb{C}$, то $g(z) \equiv \mathrm{const}$. Заметим также, что $g(0) = e^a$. Следовательно, $e^z e^{a-z} \equiv e^a$. Полагая в этом тождестве $a = z_1 + z_2$ и $z = z_1$, приходим к теореме сложения. $\square$

Из теоремы сложения, в частности, следует тождество $e^z e^{-z} \equiv 1$. Это означает, что $e^z \neq 0$ ни при каком $z \in \mathbb{C}$ и $e^{-z} = 1/e^z$. Далее, применение теоремы сложения и представление $z = x + iy$ даёт $e^z = e^x e^{iy}$. С другой стороны, $\overline{e^{iy}} = e^{-iy}$ и $|e^{iy}|^2 = e^{iy} e^{-iy} = 1$. Следовательно, $|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}$.

Тригонометрические функции. Одним из преимуществ комплексного анализа является то, что в нём наиболее полно раскрываются связи между элементарными функциями. Мы уже отметили, что степенной ряд (3.3) является продолжением ряда Тейлора для e^x в комплексную плоскость. В связи с этим оправдано также введение тригонометрических функций посредством равенств

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \qquad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

При этом

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots, \qquad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots.$$

Для вещественных $z = x$ мы получаем ряды Тейлора соответствующих функций вещественного переменного. Непосредственно из определения косинуса и синуса следует *формула Эйлера*

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

а также основное тригонометрическое тождество $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$. Используя теорему сложения для экспоненты, легко выводятся формулы

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

Из разложения в степенной ряд (или непосредственно из определения) следуют формулы для производных

$$(\sin z)' = \cos z, \qquad (\cos z)' = -\sin z.$$

Как и в вещественном анализе, через синус и косинус вводятся другие тригонометрические функции: $\operatorname{tg} z, \operatorname{ctg} z, \ldots$. Аналогично через экспоненту вводятся гиперболические функции

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \qquad \operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}).$$

Периодичность. Будем говорить, что функция f имеет период $\zeta \in \mathbb{C}$, если $f(z + \zeta) = f(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Условие на ζ быть периодом экспоненты выражается равенством $e^{z+\zeta} = e^z$ или $e^\zeta = 1$. Полагая $\zeta = \xi + i\eta$, получаем условия $\xi = 0$ и $\cos \eta + i \sin \eta = 1$, откуда находим $\eta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, периоды функции e^z определяются равенством $\zeta = i2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Логарифм. В вещественном анализе функция e^x является строго монотонно возрастающей и принимает положительные значения. Поэтому $\ln x$ определяется однозначно для положительных x и является монотонной функцией на положительной полуоси. Естественно и в комплексном анализе под $\ln z$ понимать корень уравнения $e^{\zeta} = z$. Поскольку $e^{\zeta} \neq 0$ ни при каком $\zeta \in \mathbb{C}$, то логарифм нуля не определён. Пусть теперь $\zeta = \xi + i\eta$. Тогда равенство $e^{\zeta} = z$ эквивалентно системе

$$e^{\xi} = |z|, \qquad e^{i\eta} = \frac{z}{|z|}.$$

Первое уравнение имеет единственное решение $\xi = \ln|z|$, где понимается вещественный логарифм от положительного числа $|z|$. Второе уравнение выражает равенство двух комплексных чисел с единичным модулем. Поскольку по формулам Эйлера $e^{i\eta} = \cos\eta + i\sin\eta$, то с учётом тригонометрической формы записи комплексного числа z имеем

$$\eta = \arg z + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

где под $\arg z$ понимается некоторое значение из $\operatorname{Arg}\{z\}$ (например, значение из промежутка $(-\pi, \pi]$ или $[0, 2\pi)$). Таким образом, для любого $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, уравнение $e^{\zeta} = z$ имеет бесконечно много решений. Их совокупность можно представить формулой

$$\operatorname{Ln}\{z\} = \ln|z| + i\operatorname{Arg}\{z\}.$$

Все значения $\operatorname{Ln}\{z\}$ имеют одну и ту же вещественную часть $\ln|z|$, а мнимые части двух различных значений логарифма отличаются на $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Из свойств аргумента комплексного числа и вещественного логарифма следует, что

$$\operatorname{Ln}\{z_1 z_2\} = \operatorname{Ln}\{z_1\} + \operatorname{Ln}\{z_2\}$$

для любых ненулевых комплексных чисел z_1 и z_2. Это равенство также непосредственно следует из теоремы сложения. Действительно, пусть $\zeta_1 \in \operatorname{Ln}\{z_1\}$, $\zeta_2 \in \operatorname{Ln}\{z_2\}$. Тогда

$$e^{\zeta_1 + \zeta_2} = e^{\zeta_1} e^{\zeta_2} = z_1 z_2,$$

т. е. $(\zeta_1 + \zeta_2) \in \operatorname{Ln}\{z_1 z_2\}$.

Допустим теперь, что в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$ определена непрерывная функция $\zeta = f(z)$, принимающая в каждой точке $z \in D$ значение $f(z) \in \operatorname{Ln}\{z\}$. Тогда $e^{f(z)} = z$ и мы будем называть f *непрерывной ветвью* (или просто *ветвью*) *логарифма в области* D. Будем писать $f(z) = \ln z$, если ясно, о какой ветви идет речь. Рассмотрим случай области $D = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \colon x \leqslant 0\}$. В этой области можно выделить ветвь $\arg z$, которая принимает значения из интервала $(-\pi, \pi)$. Функция $\zeta = \ln z = \ln|z| + i\arg z$ будет непрерывной в D и обратной к функции $z = e^{\zeta}$, определённой в полосе $|\operatorname{Im}\zeta| < \pi$. По теореме об обратной функции выделенная ветвь $\ln z$ будет голоморфной функцией в D и

$$\frac{d}{dz}\ln z = \frac{1}{e^{\zeta}} = \frac{1}{z}.$$

Замечая, что $1 + z$ расположено в $D = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ при $|z| < 1$, можно рассмотреть непрерывную ветвь $\ln(1+z)$ в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$. Далее,

$$\frac{d}{dz}\ln(1+z) = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,$$

где степенной ряд сходится в единичном круге $\mathbb{D}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$ также сходится в $\mathbb{D}$, а его сумма $S(z)$ является голоморфной функцией в $\mathbb{D}$ и $S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$. Таким образом,

$$(\ln(1+z) - S(z))' = 0$$

для всех $z \in \mathbb{D}$ и по теореме 2.4 имеем $\ln(1+z) - S(z) \equiv \text{const}$ в $\mathbb{D}$. Однако,

$$\ln(1+z)|_{z=0} = 0 = S(0)$$

и мы приходим к равенству

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}.$$

Комплексные степени. Если a и b — комплексные числа и $a \neq 0$, то под a^b будем понимать значения из множества

$$\left\{a^b\right\} = e^{b\,\mathrm{Ln}\{a\}}.$$

Для $b = n, n \in \mathbb{Z}$, все значения $n\,\mathrm{Ln}\{a\}$ отличаются друг от друга на $2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$, и в силу периодичности экспоненты $\{a^n\}$ состоит из единственного комплексного числа. В случае $b = m/n$ где m и n взаимно простые натуральные числа, $\{a^{m/n}\} = \{\sqrt[n]{a^m}\}$ имеет ровно n различных значений. В области $D = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ можно рассмотреть ветвь

$$z^b = e^{b \ln z},$$

где в качестве $\ln z$ выбрана ветвь, описанная выше.

§ 4. Комплексное интегрирование. Теорема Коши

4.1. Интеграл и его свойства. Комплексное интегрирование является важным инструментом в изучении свойств голоморфных функций. При этом, как и в вещественном анализе, возникает два направления в интегрировании. Одно связано с понятием сумм Римана и играет роль определённого интеграла. Второе связано с понятием первообразной и может рассматриваться как операция, обратная дифференцированию.

Начнем этот параграф с краткого обзора понятия кривой. Как образно выразился Феликс Клейн: «Всякий знает, что такое кривая, пока не выучится математике настолько, что вконец запутается в бесчисленных исключениях».

Уравнение кривой γ в плоскости удобно задать в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, где параметр t пробегает некоторый промежуток $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, а $x(t)$ и $y(t)$ являются непрерывными функциями. В комплексной записи $z(t) = x(t) + iy(t)$. Образ кривой как точечное множество $\{z = z(t)\colon \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$ является компактным и связным. Однако не следует отождествлять кривую с этим множеством. Очень существенно, что её точки упорядочены возрастанием параметра t. Если возрастающая непрерывная функция $t = \varphi(\tau)$ отображает промежуток $\alpha_1 \leqslant \tau \leqslant \beta_1$ на $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, то $z = z(\varphi(\tau))$ определяет тот же порядок точек, что $z = z(t)$. В связи с этим отображение $z = z(t)$ называют *путём* или *параметризацией* кривой γ, а под самой кривой понимают класс эквивалентных путей. Два пути $z = z(t)$, $\alpha_1 \leqslant t \leqslant \beta_1$, и $\zeta = \zeta(\tau)$, $\alpha_2 \leqslant \tau \leqslant \beta_2$, считаются *эквивалентными*, если существует непрерывная строго возрастающая функция $\tau = \tau(t)\colon [\alpha_1, \beta_1] \mapsto [\alpha_2, \beta_2]$ такая, что $z(t) = \zeta(\tau(t))$ для всех $t \in [\alpha_1, \beta_1]$.

Таким образом, чтобы определить кривую γ, достаточно выбрать путь $z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, из класса эквивалентности. Точка $z(\alpha)$ называется *началом* кривой, а точка $z(\beta)$ — *концом* кривой. Это определение не зависит от выбора пути из класса эквивалентности. Путь $z = z(-t)$, $-\beta \leqslant t \leqslant -\alpha$, имеет тот же образ, что и путь $z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, но не является эквивалентным ему. Соответствующую кривую будем обозначать $-\gamma$ (иногда используют обозначение γ^-) и говорить, что эта кривая получается из γ сменой *ориентации*. Будем также говорить, что γ и $-\gamma$ являются *противоположно ориентированными* кривыми. Кривая γ называется *жордановой*, если её параметризация $z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, удовлетворяет условию $z(t_1) \neq z(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$. Кривая γ называется *замкнутой*, если $z(\alpha) = z(\beta)$. Замкнутая жорданова кривая: $z(\alpha) = z(\beta)$, но $z(t_1) \neq z(t_2)$ при $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta)$ и $t_1 \neq t_2$. Замкнутую жорданову кривую можно рассматривать как топологическое отображение окружности в плоскость и по теореме Жордана она разбивает плоскость на две области. Кривую γ будем называть *гладкой*, если найдется её параметризация $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, которая удовлетворяет условиям: $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[\alpha, \beta]$ и $z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$ при всех $t \in [\alpha, \beta]$. Производные $z'(\alpha)$ и $z'(\beta)$ в концевых точках понимаются как односторонние. Заметим, что $z'(t)$ является касательным вектором к кривой γ в точке $z(t)$. Направление вектора $z'(t)$ согласовано с ориентацией кривой. Если существует параметризация $z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, кривой γ и разбиение $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ отрезка $[\alpha, \beta]$ такие, что кривые γ_k, $k = 1, \ldots, n$, с параметризацией $z = z(t)$, $t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k$, являются гладкими, то γ называется *кусочно-гладкой* кривой и писать $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$. В основном, мы будем иметь дело с кусочно-гладкими кривыми.

Пусть $\gamma\colon z = z(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$ — некоторая кривая в $\mathbb{C}$. Под её длиной понимается величина

$$\mathrm{Lenght}(\gamma) \,=\, \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |z(t_k) - z(t_{k-1})|\right\},$$

где супремум берётся по всем разбиениям $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ отрезка $[\alpha, \beta]$. Этот супремум не зависит от выбора параметризации и в случае, когда он конечен, кривая γ называется *спрямляемой*. Допустим теперь, что спрямляемая кривая γ расположена в области $D \subset \mathbb{C}$, в которой также определена непрерывная комплекснозначная функция f. Для каждого разбиения $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ рассмотрим два вида интегральных сумм

$$\sum_{k=1}^{n} f(z(\tau_k))(z(t_k) - z(t_{k-1})), \qquad \sum_{k=1}^{n} f(z(\tau_k))|z(t_k) - z(t_{k-1})|,$$

где $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k], k = 1, \ldots, n$. Обозначая $z(t) = x(t) + iy(t)$, $\Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1})$, $\Delta y_k = y(t_k) - y(t_{k-1})$, $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$, $k = 1, \ldots, n$, а также $f(z) =$

$u(x,y)+iv(x,y)$, интегральные суммы можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{n} f(z(\tau_k))\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}(u(x(\tau_k),y(\tau_k))\Delta x_k - v(x(\tau_k),y(\tau_k))\Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{n}(u(x(\tau_k),y(\tau_k))\Delta y_k + v(x(\tau_k),y(\tau_k))\Delta x_k),$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(z(\tau_k))|\Delta z_k| = \sum_{k=1}^{n}(u(x(\tau_k),y(\tau_k))|\Delta z_k| + i\sum_{k=1}^{n}(v(x(\tau_k),y(\tau_k))|\Delta z_k|.$$

Из теории криволинейных интегралов первого и второго рода следует существование пределов интегральных сумм при стремлении к нулю максимальной длины интервалов разбиения $[t_{k-1},t_k]$. При этом

$$\sum_{k=1}^{n} f(z(\tau_k))(z(t_k)-z(t_{k-1})) \to \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma udy + vdx,$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(z(\tau_k))|z(t_k)-z(t_{k-1})| \to \int_\gamma uds + i\int_\gamma vds.$$

Эти пределы мы будем обозначать соответственно

$$\int_\gamma f(z)dz \qquad \text{и} \qquad \int_\gamma f(z)|dz|.$$

В случае, когда γ является кусочно-гладкой кривой, вычисление этих интегралов можно свести к линейным интегралам по параметризующему промежутку

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt, \quad \int_\gamma f(z)|dz| = \int_\alpha^\beta f(z(t))|z'(t)|dt.$$

Важнейшим свойством этих интегралов является то, что их значение не зависит от выбора параметризации кривой γ. Действительно, если $\zeta=\zeta(\tau)$, $\alpha_1 \leqslant \tau \leqslant \beta_1$, — эквивалентная параметризация кривой γ, т. е. $\zeta(\tau)=z(t(\tau))$, где $t=t(\tau)$, $\alpha_1 \leqslant \tau \leqslant \beta_1$, является непрерывно дифференцируемой функцией, то

$$\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(z(t(\tau)))z'(t(\tau))t'(\tau)d\tau = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\zeta(\tau))\zeta'(\tau)d\tau.$$

Отметим также некоторые свойства этих интегралов, которые непосредственно следуют из свойств криволинейных интегралов.

Линейность. Если f и g — две непрерывные функции и $a,b\in\mathbb{C}$, то

$$\int_\gamma (af(z)+bg(z))dz \;=\; a\int_\gamma f(z)dz + b\int_\gamma g(z)dz.$$

Аддитивность. Если $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, то

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Заметим, что в равенствах, выражающих свойства линейности и аддитивности, можно dz заменить на $|dz|$. Однако,

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz, \quad \int_{-\gamma} f(z)|dz| = \int_\gamma f(z)|dz|.$$

Применяя неравенство треугольника к интегральным суммам и переходя к пределу, получаем также неравенство

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leqslant \int_\gamma |f(z)||dz|. \tag{4.1}$$

Следует обратить внимание на то, что в левой и правой частях неравенства (4.1) стоят интегралы разные по структуре. Кроме того, поскольку

$$\int_\gamma |dz| = \mathrm{Length}(\gamma),$$

то

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leqslant \int_\gamma |f(z)||dz| \leqslant \max_{z\in\gamma} |f(z)| \cdot \mathrm{Length}(\gamma).$$

Другой аспект интегрального исчисления связан с рассмотрением интегрирования как операции, обратной дифференцированию. В связи с этим голоморфную в области D функцию F будем называть *первообразной* функции f, если $F'(z) = f(z)$ для всех $z \in D$. Другими словами, существование первообразной в D для функции f означает, что $f(z)dz$ является *полным дифференциалом* в области D. Это условие оказывается эквивалентным независимости интеграла от формы пути в области D, что можно также сформулировать как равенство нулю интеграла по любой замкнутой кривой в области D.

Теорема 4.1. *Пусть f — непрерывная в области D функция. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(i) Если $f(z)dz$ является полным дифференциалом в области D, то для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset D$ выполняется равенство

$$\int_\gamma f(z)dz = 0; \tag{4.2}$$

(ii) Если равенство (4.2) выполняется для любой замкнутой ломаной γ, расположенной в D, то $f(z)dz$ является полным дифференциалом в области D.

Доказательство. (i) Допустим, что $f(z)dz$ является полным дифференциалом в области D, т. е. существует голоморфная в D функция F такая, что $F'(z) = f(z)$ для всех $z \in D$. Если $\gamma\colon z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, — кусочно-гладкая кривая в области D, то

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}F(z(t))dt = F(z(\beta)) - F(z(\alpha)).$$

В частности, если γ — замкнутая кривая, то $z(\beta) = z(\alpha)$ и выполняется равенство (4.2).

(ii) Допустим теперь, что равенство (4.2) выполняется для любой замкнутой ломаной γ, расположенной в D. Это означает, что интеграл $\int_\lambda f(z)dz$ не зависит от вида ломаной $\lambda \subset D$, а определяется лишь началом и концом этой ломаной. Фиксируем точку $a \in D$ и определим функцию

$$F(z) = \int_{\lambda_z} f(\zeta)d\zeta,$$

где λ_z — ломаная, соединяющая в области D точку a с точкой z (т. е. a — начало этой ломаной, а z — её конец). Из теоремы 2.3 и сделанных предположений следует корректность определения функции F. Покажем, что она голоморфна в D и выполняется равенство $F'(z) = f(z)$ для всех $z \in D$.

Пусть $z_0 \in D$ и $\varepsilon > 0$. Поскольку D — открытое множество и f — непрерывная функция, то найдётся такое $\delta > 0$, что $\mathcal{O}_\delta(z_0) \subset D$ и $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ при $z \in \mathcal{O}_\delta(z_0)$. Тогда для $z \in \dot{\mathcal{O}}_\delta(z_0)$ в силу свойства аддитивности интеграла будем иметь

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)d\zeta,$$

где $[z_0, z]$ — отрезок, соединяющий точки z_0 и z. Далее, с учётом равенства

$$\int_{[z_0,z]} f(z_0)d\zeta = (z - z_0)f(z_0)$$

получаем

$$\left|\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0)\right| = \frac{1}{|z - z_0|}\left|\int_{[z_0,z]} (f(\zeta) - f(z_0))d\zeta\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{|z - z_0|}\int_{[z_0,z]} |d\zeta| = \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{z\to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = f(z_0),$$

и теорема доказана. □

Пример. Рассмотрим важный пример, к которому в дальнейшем мы будем неоднократно обращаться. Пусть $f(z) = (z - a)^n$. Если n является целым и неотрицательным, то функция $F(z) = (z-a)^{n+1}/(n+1)$ будет первообразной для $f(z)$ во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Поэтому

$$\int\limits_{\gamma} (z-a)^n dz \,=\, 0 \tag{4.3}$$

для любой замкнутой кривой $\gamma \subset \mathbb{C}$, если $n = 0, 1, 2, \ldots$. В случае $n \neq -1$ целого отрицательного функция $f(z) = (z-a)^n$ будет голоморфной в $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ и $F(z) = (z-a)^{n+1}/(n+1)$ будет её первообразной в этой же области. Следовательно, и в этом случае равенство (4.3) будет выполняться для любой замкнутой кривой γ, не проходящей через точку a. Отдельно разберём случай $n = -1$. Допустим вначале, что замкнутая кривая γ расположена в $\mathbb{C} \setminus L$, где L — луч, выходящий из точки a на бесконечность. Поскольку в $\mathbb{C} \setminus L$ можно выделить непрерывную ветвь $\arg(z-a)$ и, следовательно, ветвь $F(z) = \ln(z-a)$, то $dz/(z-a)$ является полным дифференциалом в $\mathbb{C} \setminus L$. Таким образом, для такой кривой и $n = -1$ снова выполнено равенство (4.3).

Наконец, рассмотрим в качестве γ окружность с центром в точке a. Будем считать, что окружность γ *положительно ориентирована*, т. е. при движении точки вдоль неё круг, ограниченный γ, остаётся слева. В дальнейшем в случае таких простых областей, как круг, треугольник, прямоугольник, под положительно ориентированной границей будем понимать такой обход граничной кривой, когда ограниченная ею область остаётся слева. Часто такое определение положительно ориентированной границы распространяют вплоть до жордановых областей, хотя это не вполне строго. Положительной ориентации окружности γ соответствует параметризация $z = z(t) = a + re^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, где r — радиус окружности γ. При этом $z'(t) = ire^{it}$ и

$$\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-a} \,=\, i\int\limits_{0}^{2\pi} dt \,=\, 2\pi i.$$

4.2. Теорема Коши для выпуклой области. Существует несколько вариантов теоремы Коши, которые отличаются больше в топологическом плане, а не в аналитическом контексте. Поэтому естественно начать с более простой топологической ситуации.

Теорема 4.2. *[Лемма Гурса] Пусть f — голоморфная в области D функция и треугольник Δ содержится в D вместе со своим замыканием. Тогда*

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(z) dz \,=\, 0,$$

где $\partial\Delta$ — положительно ориентированная граница треугольника Δ.

Доказательство. Введём для удобства обозначение $I(\Delta) \,=\, \int_{\partial\Delta} f(z)dz$. Соединяя середины сторон треугольника Δ, разобьём его на четыре конгруэнтных треугольника $\Delta^{(1)}, \ldots, \Delta^{(4)}$. Очевидно, что

$$I(\Delta) \,=\, I(\Delta^{(1)}) + \ldots + I(\Delta^{(4)}),$$

поскольку интегрирование вдоль каждой общей стороны двух смежных треугольников проводится в обоих направлениях, а потому сокращается. Из последнего равенства следует, что среди $\Delta^{(1)}, \ldots, \Delta^{(4)}$ найдётся треугольник, обозначим его Δ_1, для которого

$$|I(\Delta_1)| \geqslant \frac{1}{4}\,|I(\Delta)|\,.$$

Теперь разобьём Δ_1 на четыре конгруэнтных треугольника $\Delta_1^{(1)}, \ldots, \Delta_1^{(4)}$ и выберем из них Δ_2 так, чтобы выполнялось неравенство

$$|I(\Delta_2)| \geqslant \frac{1}{4}\,|I(\Delta_1)| \geqslant \frac{1}{4^2}\,|I(\Delta)|\,.$$

Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных треугольников $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$, удовлетворяющих условию

$$|I(\Delta_n)| \geqslant \frac{1}{4^n}|I(\Delta)|.$$

Легко видеть, что центры треугольников Δ_n, $n = 1, 2, \ldots$, образуют фундаментальную последовательность, а её предел z^* принадлежит всем треугольникам Δ_n.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, чтобы окрестность $\mathcal{O}_\delta(z^*)$ содержалась в области D и при $z \in \dot{\mathcal{O}}_\delta(z^*)$ выполнялось неравенство

$$\left|\frac{f(z) - f(z^*)}{z - z^*} - f'(z^*)\right| < \varepsilon$$

или, что эквивалентно,

$$|f(z) - f(z^*) - (z - z^*)f'(z^*)| < \varepsilon|z - z^*|.$$

Пусть l — периметр треугольника Δ. Тогда периметр треугольника Δ_n будет равен $l \cdot 2^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$, и найдётся такой номер N, что $\Delta_n \subset \mathcal{O}_\delta(z^*)$ при $n \geqslant N$. Выберем теперь $n \geqslant N$ и, используя соотношения

$$\int\limits_{\partial\Delta_n} dz = 0, \qquad \int\limits_{\partial\Delta_n} (z - z^*)dz = 0,$$

которые являются следствием того, что dz и $(z - z^*)dz$ представляют собой полные дифференциалы в $\mathbb{C}$, получаем

$$|I(\Delta_n)| = \left|\int\limits_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right| = \left|\int\limits_{\partial\Delta_n} (f(z) - f(z^*) - (z - z^*)f'(z^*))dz\right| \leqslant \varepsilon \int\limits_{\partial\Delta_n} |z - z^*||dz|.$$

Поскольку z^* расположена внутри Δ_n, то для $z \in \partial\Delta_n$ величина $|z - z^*|$ не превышает периметра треугольника Δ_n, т. е. величины $l \cdot 2^{-n}$. Но тогда из способа построения треугольников Δ_n и полученного выше неравенства имеем

$$\frac{1}{4^n}|I(\Delta)| \leqslant |I(\Delta_n)| \leqslant \varepsilon \int\limits_{\partial\Delta_n} |z - z^*||dz| \leqslant \frac{\varepsilon l}{2^n} \int\limits_{\partial\Delta_n} |dz| = \frac{\varepsilon l^2}{4^n}.$$

Отсюда следует неравенство $|I(\Delta)| \leqslant \varepsilon l^2$, которое в силу произвольности $\varepsilon > 0$ влечёт равенство $I(\Delta) = 0$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 4.3. *[Коши для выпуклой области] Пусть f — голоморфная в выпуклой области D функция. Тогда $f(z)dz$ является полным дифференциалом в D и для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset D$ выполняется равенство (4.2).*

Доказательство. Пусть a — фиксированная точка области D. Поскольку D является выпуклым множеством, то для любого $z \in D$ отрезок $[a, z]$ содержится в D и мы можем определить функцию

$$F(z) = \int\limits_{[a,z]} f(\zeta)d\zeta.$$

Покажем, что F является первообразной для f в области D. Действительно, если $z_0 \in D$, то найдётся окрестность $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$ и для любого $z \in \dot{\mathcal{O}}_r(z_0)$ треугольник Δ с вершинами в точках a, z_0, z будет расположен в D. По теореме 4.2

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta = 0.$$

С другой стороны, в силу свойства аддитивности интеграла

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta = \int\limits_{[a,z_0]} f(\zeta)d\zeta + \int\limits_{[z_0,z]} f(\zeta)d\zeta + \int\limits_{[z,a]} f(\zeta)d\zeta = F(z_0) - F(z) + \int\limits_{[z_0,z]} f(\zeta)d\zeta$$

и, следовательно, как и при доказательстве теоремы 4.1 имеем равенство

$$F(z) - F(z_0) = \int\limits_{[z_0,z]} f(\zeta)d\zeta.$$

Поэтому, повторяя соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 4.1, получаем дифференцируемость функции F и равенство $F'(z_0) = f(z_0)$. Теорема доказана. □

Замечание 4.1. Доказанная теорема означает, что если f голоморфна в области D, то локально $f(z)dz$ является полным дифференциалом, поскольку любая точка z_0 из D принадлежит области вместе с некоторой окрестностью $\mathcal{O}_r(z_0)$, которая является выпуклой. По доказанной теореме в этой окрестности можно определить первообразную F для f. С другой стороны, пример функции $f(z) = 1/(z-a)$, голоморфной в $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, показывает, что не для всех замкнутых кривых γ в этой области интеграл $\int_\gamma dz/(z-a)$ равен нулю, т. е. в этом случае нельзя определить первообразную сразу во всей области.

Для дальнейшего расширения теоремы Коши нам потребуется ввести некоторые топологические понятия.

4.3. Приращение аргумента вдоль кривой. Индекс. Пусть $\gamma\colon z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, — кусочно-гладкая кривая, не проходящая через начало координат. Тогда определён интеграл

$$\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{z'(t)}{z(t)}dt.$$

Выясним геометрический смысл его мнимой части. Пусть $d = \operatorname{dist}(\gamma, 0)$ — расстояние от γ до начала координат. Поскольку $z(t)$ является равномерно непрерывной функцией на отрезке $[\alpha, \beta]$, то найдётся такое $\delta > 0$, что $|z(t') - z(t'')| < d/2$ при $|t' - t''| < \delta$. Выполним разбиение $t_0 = \alpha < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ отрезка $[\alpha, \beta]$ так, чтобы $(t_k - t_{k-1}) < \delta$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Это разбиение индуцирует разложение кривой γ в сумму дуг $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$, где $\gamma_k \colon z = z(t)$, $t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k$. Через Δ_k обозначим круг $\mathcal{O}_r(z(t_k))$ с центром в $z(t_k)$ и радиусом $r = d/2$. Из условия на разбиение следует, что $\gamma_k \subset \Delta_k$, $k = 1, \ldots, n$. Кроме того, расстояние от точки $z = 0$ до каждого круга Δ_k не меньше $d/2$. Это позволяет в каждом круге Δ_k определить непрерывную ветвь $\arg_{(k)} z$ (в каждом свою) и, следовательно, регулярную ветвь логарифма $\ln_{(k)} z = \ln|z| + i \arg_{(k)} z$, которая будет первообразной функции $1/z$ в Δ_k. Используя свойство аддитивности интеграла, получаем

$$\begin{aligned}
\int\limits_\gamma \frac{dz}{z} &= \sum_{k=1}^n \int\limits_{\gamma_k} \frac{dz}{z} \\
&= \sum_{k=1}^n (\ln|z(t_k)| - \ln|z(t_{k-1})|) + i \sum_{k=1}^n (\arg_{(k)} z(t_k) - \arg_{(k)} z(t_{k-1})) \\
&= \ln\left|\frac{z(\beta)}{z(\alpha)}\right| + i \sum_{k=1}^n \arg \frac{z(t_k)}{z(t_{k-1})},
\end{aligned}$$

где в последней сумме под аргументом понимается главное значение из интервала $(-\pi, \pi)$. В действительности, разность $(\arg_{(k)} z(t_k) - \arg_{(k)} z(t_{k-1}))$ не зависит от выбора ветви аргумента. Сумма

$$\sum_{k=1}^n \arg \frac{z(t_k)}{z(t_{k-1})}$$

выражает приращение аргумента $z(t)$ (в радианной мере), когда $z(t)$ пробегает кривую γ. Как и ранее, поворот вектора против движения часовой стрелки считается положительным. В связи с этими рассуждениями введём следующее понятие.

Определение 4.1. Пусть γ — кусочно-гладкая кривая, не проходящая через точку $z = 0$. *Приращением аргумента z вдоль кривой* γ называется величина

$$\Delta_\gamma \arg z = \operatorname{Im} \int\limits_\gamma \frac{dz}{z}.$$

Заметим, что в этих терминах

$$\int\limits_\gamma \frac{dz}{z} = \ln\left|\frac{z(\beta)}{z(\alpha)}\right| + i\Delta_\gamma \arg z.$$

В случае замкнутой кривой γ имеет место равенство

$$\int\limits_\gamma \frac{dz}{z} = i\Delta_\gamma \arg z,$$

а само приращение аргумента $\Delta_\gamma \arg z$ кратно 2π.

Допустим теперь, что кривая $\gamma\colon z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, расположена в области D, в которой определена голоморфная функция $w = f(z)$. Если кроме того $f(z) \neq 0$ на γ, то кривая $\Gamma = f(\gamma)\colon w = f(z(t))$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, не будет проходить через точку $w = 0$. Поэтому определена величина $\Delta_\Gamma \arg w$, которую будем называть *приращением аргумента функции* f *вдоль кривой* γ и обозначать $\Delta_\gamma \arg f(z)$. Непосредственно из определения получаем

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = \operatorname{Im} \int\limits_\Gamma \frac{dw}{w} = \operatorname{Im} \int\limits_\alpha^\beta \frac{f'(z(t))}{f(z(t))} z'(t)dt = \operatorname{Im} \int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

т. е.

$$\Delta_\gamma \arg f(z) \;=\; \operatorname{Im} \int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \tag{4.4}$$

Из (4.4) сразу же следует, что для любого комплексного числа $c \neq 0$ имеет место равенство

$$\Delta_\gamma \arg(cf(z)) \;=\; \Delta_\gamma \arg f(z).$$

Отметим ещё одно так называемое *логарифмическое свойство* приращения аргумента функции вдоль кривой.

Лемма 4.1. *Пусть γ — кусочно-гладкая кривая, расположенная в области D, в которой определены голоморфные функции f_1 и f_2. Допустим также, что f_1 и f_2 не обращаются в нуль на γ. Тогда*

$$\Delta_\gamma \arg(f_1(z) f_2(z)) \;=\; \Delta_\gamma \arg f_1(z) + \Delta_\gamma \arg f_2(z).$$

Доказательство. Из формулы (4.4) и правила дифференцирования произведения следует, что

$$\begin{aligned}
\Delta_\gamma \arg(f_1(z) f_2(z)) \;&=\; \operatorname{Im} \int\limits_\gamma \frac{(f_1(z) f_2(z))'}{f_1(z) f_2(z)} dz \\
&=\; \operatorname{Im} \int\limits_\gamma \frac{f_1'(z) f_2(z) + f_1(z) f_2'(z)}{f_1(z) f_2(z)} dz \\
&=\; \Delta_\gamma \arg f_1(z) + \Delta_\gamma \arg f_2(z),
\end{aligned}$$

и лемма доказана. $\square$

Из свойств интеграла также следует, что

$$\Delta_{-\gamma} \arg f(z) \;=\; -\Delta_\gamma \arg f(z).$$

Введём в рассмотрение ещё одно важное понятие, которое характеризует соотношение между замкнутой кривой и точкой вне этой кривой. Если γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая, не проходящая через точку a, то $f(z) =$

$z - a$ является голоморфной функцией, которая не обращается в нуль на γ. Поэтому определена величина

$$\Delta_\gamma \arg(z-a) \;=\; \operatorname{Im} \int\limits_\gamma \frac{dz}{z-a}.$$

Поскольку кривая γ замкнута, то эта величина кратна 2π, а вещественная часть интеграла в правой части последнего равенства равна нулю.

Определение 4.2. Пусть γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая, не проходящая через точку a. Тогда *индексом* точки a относительно кривой γ называется число

$$J(\gamma, a) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{dz}{z-a}.$$

Из предыдущего следует, что величина

$$J(\gamma, a) \;=\; \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \arg(z-a)$$

является целочисленной и выражает число оборотов вектора, соединяющего a с точкой z, когда она обходит кривую γ. Иногда $J(\gamma, a)$ называют также *порядком кривой* γ относительно точки a. Непосредственно из определения индекса и свойств интеграла следует равенство $J(-\gamma, a) = -J(\gamma, a)$. Проведенные ранее вычисления показывают также, что если γ — положительно ориентированная окружность с центром в точке a, то $J(\gamma, a) = 1$. Этим объясняется термин «положительно ориентированная».

Для замкнутой кривой γ дополнение $\overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma$ является открытым множеством, а максимальные связные подмножества в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma$ представляют собой области и называются *компонентами связности* дополнения $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

Теорема 4.4. *Как функция точки a индекс $J(\gamma, a)$ является постоянным в каждой компоненте связности дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma$ замкнутой кривой γ. Кроме того, индекс обращается в нуль во внешней компоненте связности (содержащей бесконечно удалённую точку).*

Доказательство. Пусть a и b — две точки из области $D \subset \mathbb{C} \setminus \gamma$. Тогда в D их можно соединить ломаной. Следовательно, первая часть утверждения теоремы будет доказана, если мы покажем, что $J(\gamma, a) = J(\gamma, b)$ в случае, когда отрезок $[a, b]$ не пересекается с γ.

Заметим, что функция $w = (z-a)/(z-b)$ является голоморфной в $\mathbb{C} \setminus \{b\}$ и переводит внешность отрезка $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ на дополнение отрицательной вещественной полуоси $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Поэтому во внешности отрезка можно выделить регулярную ветвь функции $\ln\{(z-a)/(z-b)\}$. При этом

$$\left(\ln \frac{z-a}{z-b}\right)' \;=\; \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}.$$

Следовательно, в области $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ выражение

$$\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right) dz$$

является полным дифференциалом. Поскольку γ расположена $\mathbb{C}\setminus[a,b]$ и представляет собой замкнутую кривую, то

$$\int\limits_{\gamma}\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right)dz \,=\, 0,$$

откуда следует равенство $J(\gamma,a)=J(\gamma,b)$.

Равенство индекса нулю во внешней компоненте связности следует из его постоянства в этой компоненте связности и того, что интеграл

$$\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{z-a}$$

стремится к нулю при $a\to\infty$. □

4.4. Общая форма теоремы Коши. Как было установлено в теореме 4.3, если функция f голоморфна в выпуклой области D, то результат её интегрирования по любой замкнутой кривой γ, расположенной в D, равен нулю. Для произвольной области D в таком виде результат не имеет места, на что указывает пример кольца $1<|z-a|<2$ и голоморфной в этом кольце функции $f(z)=1/(z-a)$. В связи с этим естественно возникает два вопроса: для какого класса областей D остаётся верным заключение теоремы 4.3 и, если область D произвольна, то для какого семейства замкнутых кривых интеграл от голоморфной в D функции равен нулю?

Расширим понятие замкнутой кривой. Систему замкнутых кусочно-гладких кривых $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ будем называть *циклом* и обозначать $\gamma=\gamma_1+\ldots+\gamma_n$. Если некоторая кривая входит в эту формальную сумму несколько раз, то будем её в сумме писать с соответствующим множителем. Тогда запись цикла примет вид

$$\gamma \,=\, k_1\gamma_1+\ldots+k_m\gamma_m, \tag{4.5}$$

где $k_j\in\mathbb{Z}$. Отрицательность коэффициента k_j будет означать, что кривая γ_j входит в цикл с противоположной ориентацией. Как и для замкнутых кривых, для цикла γ и точки $a\notin\gamma$ (т. е. $a\notin\gamma_j$ для всех j) определяется индекс

$$J(\gamma,a) \,=\, \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{z-a} \,=\, \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{m}\left(k_j\int\limits_{\gamma_j}\frac{dz}{z-a}\right) \,=\, \sum_{j=1}^{m}k_jJ(\gamma_j,a).$$

Определение 4.3. Цикл γ, расположенный в области D, будем называть *гомологичным нулю относительно* этой *области* и писать $\gamma\sim 0(\operatorname{mod} D)$, если $J(\gamma,a)=0$ для любой точки $a\notin D$.

Теорема 4.5. *[Общая форма теоремы Коши] Пусть f — голоморфная в области D функция и γ — цикл, гомологичный нулю относительно области D. Тогда*

$$\int\limits_{\gamma}f(z)dz \,=\, 0.$$

Доказательство. Пусть цикл γ имеет представление (4.5) где γ_j, $j = 1, \ldots, m$, — замкнутые кусочно-гладкие кривые, расположенные в области D. Для каждой γ_j выполним следующие построения. Разобьём γ_j на сумму дуг $\gamma_j = \gamma_j^{(1)} + \ldots + \gamma_j^{(l)}$ так, чтобы каждая дуга $\gamma_j^{(i)}$ содержалась в круге $\Delta_i \subset D$. Поскольку круг представляет собой выпуклую область, то в Δ_i интеграл от голоморфной функции не зависит от формы кривой. Поэтому, если $\lambda_j^{(i)}$ — двузвенная ломаная со звеньями, параллельными координатным осям, расположенная в Δ_i и имеющая те же начало и конец, что и $\gamma_j^{(i)}$, то

$$\int\limits_{\lambda_j^{(i)}} g(z)dz = \int\limits_{\gamma_j^{(i)}} g(z)dz$$

для любой голоморфной в Δ_i функции g. Сумма $\lambda_j = \lambda_j^{(1)} + \ldots + \lambda_j^{(l)}$ будет замкнутой ломаной со звеньями, параллельными осям координат, и такая, что

$$\int\limits_{\lambda_j} g(z)dz = \int\limits_{\gamma_j} g(z)dz$$

для любой голоморфной в D функции g. В результате мы получаем цикл $\lambda = k_1\lambda_1 + \ldots + k_m\lambda_m$, который состоит из замкнутых ломаных со звеньями, параллельными координатным осям, и удовлетворяющий условию

$$\int\limits_{\lambda} g(z)dz = \int\limits_{\gamma} g(z)dz$$

для любой голоморфной в D функции g. В частности,

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\lambda} f(z)dz, \qquad J(\lambda, a) = J(\gamma, a) = 0$$

для любой точки $a \notin D$, т. е. $\lambda \sim 0 (\operatorname{mod} D)$, поскольку $g(z) = 1/(z-a)$ является голоморфной в D функцией при $a \notin D$. Для доказательства теоремы достаточно теперь установить равенство

$$\int\limits_{\lambda} f(z)dz = 0.$$

Через каждую вершину ломаных из цикла λ проведём прямые, параллельные координатным осям. В результате мы получим разбиение всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ на $2M$ горизонтальных полуполос, $2N$ вертикальных полуполос, MN прямоугольников и четыре угловые области. Обозначим через $a_1, \ldots, a_{MN}$ центры прямоугольников $Q_1, \ldots, Q_{MN}$, соответственно, и покажем, что имеет место представление

$$\lambda = \sum_{j=1}^{MN} J(\lambda, a_j)\partial Q_j, \tag{4.6}$$

где ∂Q_j — положительно ориентированная граница прямоугольника Q_j. Равенство (4.6) понимается в том смысле, что стороны прямоугольников, которые входят в сумму с итоговым нулевым коэффициентом, аннулируются. Таким образом, равенство (4.6) эквивалентно тому, что цикл

$$\sigma \;=\; \lambda - \sum_{j=1}^{MN} J(\lambda, a_j)\partial Q_j$$

является нулевым, т. е. все стороны входящих прямоугольников аннулируются. Допустим, что σ_{ij} — общая сторона прямоугольников Q_i и Q_j. Будем считать, что σ_{ij} ориентирована как в ∂Q_i. Если σ_{ij} входит в σ с коэффициентом k, то в цикле $\sigma - k\partial Q_i$ она аннулируется. Поэтому точки a_i и a_j лежат в одной компоненте связности открытого множества $\mathbb{C}\setminus(\sigma - k\partial Q)$. По теореме 4.4 имеем равенство

$$J(\sigma - k\partial Q_i, a_i) \;=\; J(\sigma - k\partial Q_i, a_j).$$

Вычислим отдельно правую и левую части этого равенства. Замечая, что $J(\partial Q_r, a_s) = \delta_{rs}$ (δ_{rs} — символ Кронекера, равный единице при совпадении r и s и равный нулю в противном случае), получаем

$$\begin{aligned} J(\sigma - k\partial Q_i, a_i) \;&=\; J\left(\lambda - \sum_{r=1}^{MN} J(\lambda, a_r)\partial Q_r - k\partial Q_i, a_i\right) \\ &=\; J(\lambda, a_i) - \sum_{r=1}^{MN} J(\lambda, a_r) J(\partial Q_r, a_i) - kJ(\partial Q_i, a_i) \;=\; -k. \end{aligned}$$

Аналогично для правой части получаем

$$J(\sigma - k\partial Q_i, a_j) \;=\; J(\lambda, a_j) - \sum_{r=1}^{MN} J(\lambda, a_r) J(\partial Q_r, a_j) - kJ(\partial Q_i, a_j) \;=\; 0.$$

Следовательно, $k = 0$ и отрезок σ_{ij} аннулируется в цикле σ.

Пусть теперь σ_i — сторона прямоугольника Q_i с ориентацией из ∂Q_i, которая примыкает к одной из полуполос. Снова допустим, что она входит в цикл σ с коэффициентом k. Тогда $\sigma - k\partial Q_i$ не содержит σ_i и поскольку a_i в этом случае можно соединить через примыкающую полуполосу с бесконечно удалённой точкой, то a_i находится во внешней компоненте связности множества $\mathbb{C} \setminus (\sigma - k\partial Q_i)$. Снова по теореме 4.4 получаем

$$J(\sigma - k\partial Q_i, a_i) \;=\; 0.$$

Однако, как показывают проведенные выше вычисления, левая часть этого равенства равна $-k$ и мы приходим к аннулированию σ_i в цикле σ. Тем самым представление (4.6) для цикла λ доказано.

Покажем теперь, что представление (4.6) является внутренним для области D. Более точно, что в сумму (4.6) входят с ненулевыми коэффициентами лишь те ∂Q_i для которых $\overline{Q_i} \subset D$. Действительно, пусть $a \in \overline{Q_i}$ и $a \notin D$. Тогда отрезок $[a_i, a]$ не пересекает λ и по свойству индекса $J(\lambda, a_i) = J(\lambda, a) = 0$, поскольку $\lambda \sim 0 (\operatorname{mod} D)$. По теореме 4.3 имеем равенство

$$\int_{\partial Q_i} f(z)dz = 0$$

для всех прямоугольников Q_i, которые вместе со своим замыканием содержатся в области D. Отсюда и из представления (4.6) получаем требуемое равенство

$$\int_{\lambda} f(z)dz = 0. \qquad \square$$

Рисунок 2 цикла, состоящего из двух замкнутых ломаных, поясняет смысл проведенных в доказательстве теоремы рассуждений.

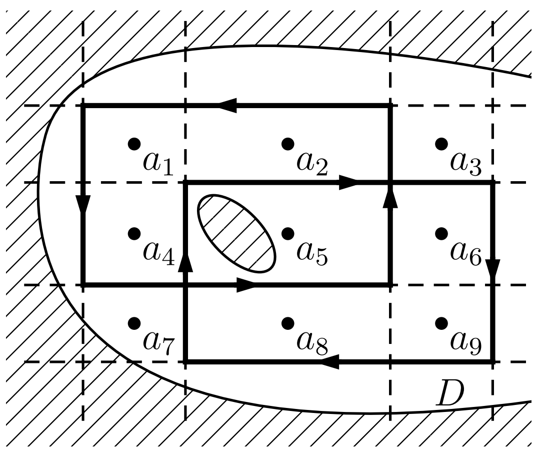

Рис. 2. К доказательству теоремы 4.5

В соответствии с этим рисунком представление (4.6) имеет вид

$$\lambda = \partial Q_1 + \partial Q_2 + 0 \cdot \partial Q_3 + \partial Q_4 + 0 \cdot \partial Q_5 - \partial Q_6 + 0 \cdot \partial Q_7 - \partial Q_8 - \partial Q_9.$$

Теперь мы можем дать ответ на вопрос: для какого класса областей D остаётся верным заключение теоремы 4.3?

Следствие 4.1. *[Теорема Коши для односвязной области]. Для любой голоморфной в односвязной области D функции f выражение $f(z)dz$ является полным дифференциалом в D и, следовательно, для любой замкнутой кривой $\gamma \subset D$ выполняется равенство*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Доказательство. Пусть γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая, расположенная в области D. Поскольку D — односвязная область, то $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ является связным множеством и потому полностью содержится во внешней компоненте связности множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma$. Но тогда по теореме 4.4 $J(\gamma, a) = 0$ для любой точки $a \notin D$. Это означает, что $\gamma \sim 0(\operatorname{mod} D)$ и в силу общей формы теоремы Коши выполняется равенство нулю интеграла. □

Пусть γ — замкнутая кусочно-гладкая жорданова кривая. По теореме Жордана $\overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma$ имеет ровно две компоненты связности, а γ является их общей границей. Ограниченная компонента называется внутренней областью кривой γ, а компонента, содержащая бесконечно удалённую точку, называется внешней областью. Под жордановой областью обычно понимают внутреннюю область некоторой замкнутой жордановой кривой. Саму теорему Жордана можно доказать, используя понятие индекса. Кроме того, как следует из теоремы 4.4, $J(\gamma, a) = 0$ для любой точки a из внешней области. В случае, когда точка a принадлежит внутренней области, индекс $J(\gamma, a)$ равен либо 1, либо -1. В первом случае кривая γ положительно ориентирована. Во втором случае говорят об отрицательной или противоположной ориентации. Для окружности соответствующие вычисления были проведены ранее. Также легко убедиться в этом непосредственными вычислениями для простых кривых. Поскольку мы не будем иметь дела с другими случаями кривых, ограничимся этими замечаниями.

Рассмотрим теперь часто возникающую в приложениях конструкцию многосвязной области. Пусть γ_0 — замкнутая кусочно-гладкая положительно ориентированная жорданова кривая и D_0 — внутренняя область, ограниченная γ_0. Тогда $J(\gamma_0, a) = 1$, если $a \in D_0$, и $J(\gamma_0, a) = 0$, если $a \notin D \cup \gamma$. Допустим, что в D_0 расположены замкнутые кусочно-гладкие положительно ориентированные жордановы кривые $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, ограничивающие соответственно области $D_1, \ldots, D_n$ и такие, что $\overline{D_i} \cap \overline{D_j} = \varnothing$ при $i \neq j$. Тогда область $D = D_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{D_i}$ будет иметь в качестве границы объединение всех кривых $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$, а цикл

$$\gamma = \gamma_0 - \gamma_1 - \ldots - \gamma_n$$

будет удовлетворять условиям: $J(\gamma, a) = 0$ или не определён ($a \in \gamma$), если $a \notin D$, и $J(\gamma, a) = 1$, если $a \in D$. В связи с этим введём следующее определение.

Определение 4.4. Будем говорить, что цикл γ ограничивает область D, если индекс $J(\gamma, a)$ определён и равен 1 для любой точки $a \in D$ и либо не определён, либо равен нулю для точек $a \notin D$. При этом γ называется *положительно ориентированной границей* области D и также обозначается $\gamma = \partial D$.

Заметим, что если $\gamma = \partial D$ — положительно ориентированная граница области D и $D \cup \gamma$ содержится в более широкой области D', то $\gamma \sim 0(\operatorname{mod} D')$. Будем также говорить, что функция f голоморфна в замкнутой области $\overline{D}$, если она голоморфна в некоторой более широкой области D', $\overline{D} \subset D'$. Таким образом, имеет место следующий результат.

Следствие 4.2. *[Теорема Коши для многосвязной области.] Пусть цикл γ ограничивает область D и f — голоморфная функция на $D \cup \gamma$, т. е. в замкнутой области. Тогда*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \qquad \text{или} \qquad \int_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

Замечание 4.2. Часто, когда кривые, составляющие границу области D имеют простую структуру, в формулировке следствия 4.2 достаточно потребовать голоморфность функции f в открытой области D и непрерывность в замыкании $\overline{D}$. Результат равенства нулю интеграла по границе ∂D достигается отступлением от границы внутрь области и последующим предельным переходом.

§ 5. Интегральная формула Коши. Интеграл Коши

Следующий результат выводится непосредственно из теоремы Коши и играет важную роль в получении свойств голоморфных функций, а также в приложениях, использующих методы теории функций комплексного переменного.

Теорема 5.1. *Пусть f — голоморфная в области D функция и γ — цикл, гомологичный нулю относительно области D. Тогда для любой точки $a \in D \setminus \gamma$ выполняется равенство*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz = J(\gamma, a)f(a). \tag{5.1}$$

Доказательство. Поскольку $D \setminus \gamma$ является открытым множеством, то для достаточно малых $r > 0$ окрестность $\mathcal{O}_r(a)$ будет содержаться в $D \setminus \gamma$ вместе с граничной окружностью $\lambda_r = \partial\mathcal{O}_r(a)$. Функция $f(z)/(z-a)$ является голоморфной в проколотой области $D \setminus \{a\}$, а цикл $\gamma - J(\gamma, a)\lambda_r$ является гомологичным нулю относительно $D \setminus \{a\}$. Следовательно, по теореме Коши 4.5

$$\int_{\gamma - J(\gamma,a)\lambda_r} \frac{f(z)}{z-a}dz = 0,$$

что эквивалентно равенству

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz = J(\gamma, a)\int_{\lambda_r} \frac{f(z)}{z-a}dz.$$

Поскольку это равенство выполняется для всех достаточно малых $r > 0$, то для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_r} \frac{f(z)}{z-a}dz \to f(a)$$

при $r \to 0$. Пусть $\varrho > 0$ и такое, что $\overline{\mathcal{O}_\varrho(a)} \subset D$. В силу дифференцируемости функции f имеем

$$\sup_{z \in \dot{\mathcal{O}}(a)} \left| \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \right| = M < \infty.$$

Но тогда для $r < \varrho$ получаем

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\lambda_r} \frac{f(z)}{z - a} dz - f(a) \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{\lambda_r} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz \right| \leqslant M \cdot r,$$

откуда следует требуемое соотношение. □

Следствие 5.1. *Пусть γ — цикл, ограничивающий область D (т. е., γ состоит из конечного числа кусочно-гладких замкнутых кривых, которые составляют положительно ориентированную границу области D) и f — голоморфная в D и непрерывная в замыкании $D \cup \gamma$ функция. Тогда для любого $z \in D$ выполняется равенство*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{5.2}$$

Действительно, если предположить, что f голоморфна в замкнутой области, т. е. в некоторой области D', которая содержит $D \cup \gamma$, то формула (5.2) будет частным случаем формулы (5.1). Это следует из того, что $\gamma \sim 0 (\operatorname{mod} D)$ и $J(\gamma, z) = 1$ для любой точки $z \in D$. В общем случае мы можем от каждой кривой, входящей в γ, отступить внутрь области D и применить формулу (5.2), после чего осуществить предельный переход.

Замечание 5.1. Равенство (5.2) известно как *интегральная формула Коши*. Она имеет наглядную интерпретацию: значение голоморфной функции f внутри области восстанавливается по её граничным значениям.

Интегральная формула Коши даёт идеальный инструмент для исследования локальных свойств голоморфных функций. При этом в качестве γ можно взять окружность, как положительно ориентированную границу окрестности точки. В частности, теперь мы можем доказать, что голоморфная функция имеет производные всех порядков, которые, в свою очередь, также представляют собой голоморфные функции. Для этого выделим отдельно конструкцию, которая содержится в интегральной формуле Коши.

Пусть γ — кусочно-гладкая кривая и φ — заданная на ней непрерывная функция. Тогда выражение

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

называют *интегралом Коши* с плотностью φ. Формула (5.2) выражает тот факт, что f представляет собой внутри области D интеграл Коши по границе этой области, а в качестве плотности выступают её граничные значения.

Теорема 5.2. *[Свойства интеграла Коши.] Пусть γ — кусочно-гладкая кривая и φ — непрерывная функция, определённая на γ. Тогда для каждого $n = 1, 2, \ldots$ функция*

$$F_n(z;\varphi) = \int\limits_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta$$

является голоморфной в каждой из областей, определяемых кривой γ (т. е. в компонентах связности $\mathbb{C} \setminus \gamma$), и выполняются равенства

$$F_n'(z;\varphi) = nF_{n+1}(z;\varphi).$$

Доказательство. Докажем вначале непрерывность функции F_1. Пусть z_0 — произвольная точка из $\mathbb{C}\setminus\gamma$ и $\delta > 0$ выбрано меньше половины расстояния от z_0 до γ. Тогда для $z \in \mathcal{O}_\delta(z_0)$ будем иметь

$$|F_1(z;\varphi) - F_1(z_0;\varphi)| = |z - z_0| \left| \int\limits_\gamma \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} \right| \leqslant |z - z_0| \frac{1}{2\delta^2} \int\limits_\gamma |\varphi(\zeta)||d\zeta|.$$

Отсюда следует непрерывность F_1 в точке z_0.

Заметим теперь, что отношение приращений

$$\frac{F_1(z;\varphi) - F_1(z_0;\varphi)}{z - z_0} = \int\limits_\gamma \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} = F_1\left(z; \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}\right)$$

имеет ту же структуру, что и F_1, но с плотностью $\varphi(\zeta)/(\zeta - z_0)$. Следовательно, она непрерывна в точке z_0 и

$$\lim_{z\to z_0} \frac{F_1(z;\varphi) - F_1(z_0;\varphi)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} F_1\left(z; \frac{\varphi}{\zeta - z_0}\right) = F_1\left(z_0; \frac{\varphi}{\zeta - z_0}\right) = F_2(z_0;\varphi).$$

Таким образом, голоморфность функции $F_1(z;\varphi)$ и равенство $F_1'(z;\varphi) = F_2(z;\varphi)$ доказаны.

Воспользуемся теперь методом математической индукции и допустим, что голоморфность функции $F_{n-1}(z;\varphi)$ и равенство

$$F_{n-1}'(z;\varphi) = (n-1)F_n(z;\varphi)$$

доказаны. Тогда из представления

$$\begin{aligned} F_n(z;\varphi) - F_n(z_0;\varphi) &= \int\limits_\gamma \left(\frac{1}{(\zeta - z)^n} - \frac{1}{(\zeta - z)^{n-1}(\zeta - z_0)} \right) \varphi(\zeta) d\zeta \\ &\quad + \int\limits_\gamma \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n-1}(\zeta - z_0)} - \int\limits_\gamma \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^n} \\ &= (z - z_0) \int\limits_\gamma \frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^n(\zeta - z_0)} \\ &\quad + F_{n-1}\left(z; \frac{\varphi}{\zeta - z_0}\right) - F_{n-1}\left(z_0; \frac{\varphi}{\zeta - z_0}\right) \end{aligned}$$

следует непрерывность функции $F_n(z;\varphi)$. Действительно, ограниченность интеграла, который стоит множителем при $(z-z_0)$, устанавливается в окрестности точки z_0 как и при доказательстве непрерывности F_1, а непрерывность F_{n-1} имеем по предположению индукции. Далее, из равенства

$$\frac{F_n(z;\varphi)-F_n(z_0;\varphi)}{z-z_0} \;=\; F_n\left(z;\frac{\varphi}{\zeta-z_0}\right)+\frac{F_{n-1}\left(z;\dfrac{\varphi}{\zeta-z_0}\right)-F_{n-1}\left(z_0;\dfrac{\varphi}{\zeta-z_0}\right)}{z-z_0},$$

доказанной непрерывности F_n и предположений индукции получаем голоморфность функции $F_n(z;\varphi)$ и выполнение соотношения

$$F_n'(z_0;\varphi) \;=\; F_n\left(z_0;\frac{\varphi}{\zeta-z_0}\right)+(n-1)F_n\left(z_0;\frac{\varphi}{\zeta-z_0}\right) \;=\; nF_{n+1}(z_0;\varphi).$$

Теорема доказана. □

Приведём три важных следствия доказанной теоремы.

Следствие 5.2. *Интеграл Коши*

$$F(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

представляет собой бесконечно дифференцируемую функцию в $\mathbb{C}\setminus\gamma$. *При этом для всех* $z\in\mathbb{C}\setminus\gamma$ *и* $n=1,2,\ldots$ *выполняются равенства*

$$F^{(n)}(z) \;=\; \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta. \tag{5.3}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$F(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}F_1(z;\varphi).$$

Поэтому функция F является голоморфной в $\mathbb{C}\setminus\gamma$ и

$$F'(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}F_2(z;\varphi).$$

Функция $F_2(z;\varphi)$, а следовательно и $F'(z)$, также является голоморфной и

$$F''(z) \;=\; \frac{2!}{2\pi i}F_3(z;\varphi).$$

По индукции получаем бесконечную дифференцируемость функции F и равенства

$$F^{(n)}(z) \;=\; \frac{n!}{2\pi i}F_{n+1}(z;\varphi),$$

$n=1,2,\ldots$, которые эквивалентны (5.3). □

Следствие 5.3. *Голоморфная в области D функция f является бесконечно дифференцируемой в этой области.*

Доказательство. Пусть $z_0 \in D$ и $\mathcal{O}_r(z_0)$ содержится в области D вместе со своей положительно ориентированной границей $\gamma_r = \partial\mathcal{O}_r(z_0)$. Тогда интегральная формула Коши для функции f в $\mathcal{O}_r(z_0)$ принимает вид

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Это означает, что $f(z)$ является интегралом Коши в круге $\mathcal{O}_r(z_0)$ с плотностью $\varphi(\zeta) = f(\zeta)$. Таким образом, f является бесконечно дифференцируемой в $\mathcal{O}_r(z_0)$ по предыдущему следствию. Поскольку z_0 выбиралось произвольно, то утверждение доказано. □

Следствие 5.4. *Пусть γ — цикл, ограничивающий область D (т. е. γ — положительно ориентированная граница области D), и f — голоморфная в D и непрерывная в замыкании $D \cup \gamma$ функция. Тогда для всех $z \in D$ и $n = 1, 2, \ldots$ имеют место равенства*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}. \tag{5.4}$$

Доказательство. Интегральная формула Коши (5.2) показывает, что функция f представляет собой в области D интеграл Коши с плотностью $\varphi(\zeta) = f(\zeta)$. При этом равенства (5.3) принимают вид (5.4). □

Замечание 5.2. Равенство (5.4) называется *интегральной формулой Коши для производных.* Оно показывает, что не только сама голоморфная функция, но и её производные, восстанавливаются внутри области лишь по граничным значениям функции.

Следующий результат по формулировке в некотором смысле является обратным к теореме Коши.

Теорема 5.3. *[Морера]. Пусть f — непрерывная в области D функция и такая, что для любого треугольника Δ, расположенного в D вместе со своим замыканием, выполняется равенство*

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

Тогда f является голоморфной функцией в области D.

Доказательство. Поскольку свойство голоморфности является локальным, то достаточно доказать, что при сделанных предположениях функция f голоморфна в некоторой окрестности каждой точки области D. Фиксируем произвольно $a \in D$ и пусть $\mathcal{O}_r(a) \subset D$. Покажем, что $f(z)dz$ является полным дифференциалом в $\mathcal{O}_r(a)$, откуда будет следовать голоморфность f как производной от голоморфной функции. В силу теоремы 4.1 для этого достаточно показать, что

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0$$

для любой замкнутой ломаной γ, расположенной в $\mathcal{O}_r(a)$. Ломаную γ можно представить как сумму направленных отрезков

$$\gamma = [z_0, z_1] + [z_1, z_2] + \ldots + [z_{n-1}, z_n].$$

Условие замкнутости ломаной γ означает, что $z_n = z_0$. Рассмотрим треугольники Δ_k, $k = 1, \ldots, n-2$, с вершинами в точках z_0, z_k, z_{k+1}. В силу выпуклости круговой окрестности $\Delta_k \subset \mathcal{O}_r(a)$. Но тогда по условиям теоремы

$$\int\limits_{\partial\Delta_k} f(z)dz = 0,$$

$k = 1, \ldots, n-1$, и поскольку $[z_0, z_{n-1}] = -[z_{n-1}, z_n]$, то

$$0 = \sum_{k=1}^{n-2} \int\limits_{\partial\Delta_k} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n-2} \left(\int\limits_{[z_0,z_k]} f(z)dz + \int\limits_{[z_k,z_{k+1}]} f(z)dz - \int\limits_{[z_0,z_{k+1}]} f(z)dz \right)$$

$$= \int\limits_{[z_0,z_1]} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n-2} \int\limits_{[z_k,z_{k+1}]} f(z)dz - \int\limits_{[z_0,z_{n-1}]} f(z)dz = \int\limits_{\gamma} f(z)dz.$$

Теорема доказана. □

§ 6. Локально равномерная сходимость. Ряды Тейлора и Лорана

Среди различных видов сходимости последовательностей функций в теории аналитических функций исключительно важную роль играет так называемая локально равномерная сходимость.

Определение 6.1. Будем говорить, что последовательность определённых в области D функций f_n, $n = 1, 2, \ldots$, сходится *локально равномерно* в D к функции f, если для каждой точки $z_0 \in D$ найдётся такая её окрестность $\mathcal{O}_r(z_0)$, $r > 0$, что $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$ и $f_n(z) \to f(z)$ равномерно в $\mathcal{O}_r(z_0)$ при $n \to \infty$.

Замечание 6.1. Приведенное определение можно дать в другой эквивалентной формулировке. Последовательность $\{f_n\}$ сходится локально равномерно в области D к функции f в том и только том случае, если для любого компактного подмножества $K \subset D$ последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно на K к функции f.

Доказательство. Действительно, если $f_n \to f$ локально равномерно в D в смысле определения 6.1 и K — компактное подмножество области D, то для любой точки $z_0 \in K$ найдётся $r_0 > 0$ такое, что $\mathcal{O}_{r_0}(z_0) \subset D$ и $f_n(z) \to f(z)$ равномерно в $\mathcal{O}_{r_0}(z_0)$ при $n \to \infty$. Поскольку каждая точка множества K обладает такой окрестностью, а K — компактное множество, то можно выбрать конечное число окрестностей $\mathcal{O}_{r_1}(z_1), \ldots, \mathcal{O}_{r_m}(z_m)$, которые покрывают K и в каждой из которых сходимость последовательности $\{f_n\}$ равномерная. Пусть теперь $\varepsilon > 0$. Для каждой окрестности $\mathcal{O}_{r_k}(z_k)$, $k = 1, \ldots, m$, существует номер N_k такой, что $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ при всех $z \in \mathcal{O}_{r_k}(z_k)$ и $n \geqslant N_k$. Но тогда для $n \geqslant \max\{N_1, \dots, N_m\}$ и всех $z \in K$ будет выполняться неравенство $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ выбиралось произвольно, то это и означает равномерную сходимость последовательности $\{f_n\}$ на множестве K.

Обратно, если последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно на каждом компактном подмножестве $K \subset D$, то для любой точки $z_0 \in D$ найдется (в силу того, что D — открытое множество) окрестность $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$. Замкнутый круг $\{z\colon |z - z_0| \leqslant r/2\}$ является компактным подмножеством области D и по предположению $f_n(z) \to f(z)$ равномерно в окрестности $\mathcal{O}_{r/2}(z_0)$. $\square$

Теорема 6.1. *[Вейерштрасса]. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность голоморфных в области D функций и $f_n(z) \to f(z)$ локально равномерно в D при $n \to \infty$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(i) f является голоморфной в D функцией;

(ii) $f_n'(z) \to f'(z)$ локально равномерно в D при $n \to \infty$.

Доказательство. (i) Пусть z_0 — произвольная точка области D. Выберем $r > 0$ так, чтобы замкнутый круг $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)}$ содержался в области D. Поскольку этот круг является компактным подмножеством области D, то $f_n(z) \to f(z)$ равномерно на $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)}$, а предельная функция f будет непрерывной. Далее, для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\gamma \subset \mathcal{O}_r(z_0)$ в силу равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$ на ней будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\gamma f_n(z)dz = \int\limits_\gamma f(z)dz.$$

Однако по теореме Коши интегралы в левой части равенства равны нулю. Это означает, что для функции f в $\mathcal{O}_r(z_0)$ выполнены условия теоремы Морера 5.3 и, следовательно, f голоморфна в $\mathcal{O}_r(z_0)$. Поскольку z_0 была произвольной точкой области D то голоморфность f в D доказана.

Для доказательства (ii) воспользуемся интегральной формулой Коши для производных (5.4). Снова фиксируем $z_0 \in D$ и $r > 0$ такое, что $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)} \subset D$. Если $\gamma_r = \partial\mathcal{O}_r(z_0)$ — положительно ориентированная граница окрестности $\mathcal{O}_r(z_0)$, то для всех $z \in \mathcal{O}_r(z_0)$ будут выполняться равенства

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta, \qquad f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta.$$

Но тогда для $z \in \mathcal{O}_{r/2}(z_0)$ будем иметь

$$|f'(z) - f_n'(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta) - f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta\right| \leqslant \frac{4}{r}\max_{\zeta\in\gamma_r}|f(\zeta) - f_n(\zeta)|.$$

Поскольку правая часть этого неравенства не зависит от $z \in \mathcal{O}_{r/2}(z_0)$ и стремится к нулю при $n \to \infty$, то $f_n'(z) \to f'(z)$ равномерно в $\mathcal{O}_{r/2}(z_0)$. Принимая во внимание то, что z_0 выбиралось произвольно из D, приходим к утверждению (ii). $\square$

Иногда утверждение (i) называют первой теоремой Вейерштрасса, а (ii) — второй теоремой Вейерштрасса.

Ранее мы доказали, что сумма степенного ряда представляет собой голоморфную в круге сходимости функцию. Теорема Вейерштрасса позволяет расширить этот результат следующим образом.

Следствие 6.1. *[Теорема Вейерштрасса для рядов]. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, составленный из голоморфных в области D функций f_n сходится локально равномерно в D. Тогда его сумма $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ является голоморфной в D функцией и ряд можно почленно дифференцировать, т. е. $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(z)$.*

Наше определение голоморфной (или аналитической) функции базировалось на свойстве комплексной дифференцируемости. Имеется другой подход к определению аналитической функции, основанный на представлении её в виде суммы степенного ряда в окрестности каждой точки области. Следующий результат показывает, что оба эти подхода приводят к одному и тому же классу функций.

Теорема 6.2. *Пусть f — голоморфная в области D функция и z_0 — произвольная точка области D. Тогда в любом круге $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$ функция f представима в виде суммы сходящегося степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{6.1}$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \tag{6.2}$$

$n = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Допустим вначале, что $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)} \subset D$, и пусть $\gamma = \partial\mathcal{O}_r(z_0)$ — положительно ориентированная граница круга $\mathcal{O}_r(z_0)$. Тогда f имеет представление в $\mathcal{O}_r(z_0)$ интегральной формулой Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Для фиксированного $z \in \mathcal{O}_r(z_0)$ ядро Коши $1/(\zeta - z)$ разложим в ряд

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0)\left(1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Поскольку для всех $\zeta \in \gamma$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{r} < 1,$$

то полученный ряд сходится равномерно по $\zeta \in \gamma$ в силу признака Вейерштрасса. Следовательно, этот ряд можно почленно интегрировать на γ. Умножая его на непрерывную функцию $f(\zeta)/(2\pi i)$ и выполняя почленное интегрирование, приходим к равенству

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n.$$

В силу интегральной формулы Коши для производных

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

$n = 1, 2, \ldots$.

Остаётся заметить, что коэффициенты (6.2) ряда (6.1) не зависят ни от точки z, ни от выбора окружности γ. Поэтому ряд (6.1) сходится и его сумма совпадает с функцией f в любом круге $\mathcal{O}_r(z_0)$, который содержится в области D. $\square$

Замечание 6.2. Ряд (6.1), коэффициенты которого вычисляются по формулам (6.2), называется *рядом Тейлора* функции f в окрестности точки z_0. Кроме того, если функция f представима в виде ряда (6.1) в некотором круге $\mathcal{O}_r(z_0)$, то коэффициенты ряда однозначно определяются формулами (6.2), как было показано в замечании к теореме 3.1. Другими словами, представление голоморфной функции в виде суммы ряда по степеням $(z - z_0)$ единственно.

Нули голоморфной функции и теорема единственности.

Точка $a \in \mathbb{C}$ называется нулём функции f, если $f(a) = 0$.

Определение 6.2. *Порядком* (или *кратностью*) нуля $a \in \mathbb{C}$ функции f, голоморфной в этой точке, называется наименьший номер отличной от нуля производной $f^{(n)}(a)$. Другими словами, точка a является нулём функции f порядка m, если $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(m-1)}(a) = 0$, $f^{(m)}(a) \neq 0$.

Из формул для коэффициентов ряда Тейлора следует, что порядок нуля совпадает с наименьшим номером отличного от нуля коэффициента тейлоровского разложения функции в окрестности этой точки. При этом, если a — нуль бесконечного порядка, то $f(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности $\mathcal{O}_r(a)$. С другой стороны, если a — нуль конечного порядка m, то найдётся окрестность $\mathcal{O}_\delta(a)$, $\delta > 0$, в которой нет нулей функции f, отличных от a. Действительно, в некоторой окрестности $\mathcal{O}_r(a)$ функция f представима рядом Тейлора

$$f(z) = (z - a)^m \sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k}(z - a)^k = (z - a)^m \varphi(z),$$

где φ — голоморфная в $\mathcal{O}_r(a)$ функция и $\varphi(a) = c_m \neq 0$. В силу непрерывности функции φ найдётся окрестность $\mathcal{O}_\delta(a)$, в которой φ не обращается в нуль. В силу отсутствия делителей нуля в поле комплексных чисел $f(z) \neq 0$ в проколотой окрестности $\dot{\mathcal{O}}_\delta(a)$.

Заметим, что в вещественном анализе ситуация с нулями и представлением бесконечно дифференцируемой функции её рядом Тейлора кардинально отличается. Классическим примером является функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

которая имеет в окрестности точки ряд Тейлора с нулевыми коэффициентами, но обращается нуль лишь в самой точке $x = 0$.

Теорема 6.3. *[Единственности.] Если две голоморфные в области D функции f и g совпадают на множестве E, которое имеет хотя бы одну предельную точку a, принадлежащую области D, то $f(z) \equiv g(z)$ всюду в D.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(z) = f(z) - g(z)$, которая является голоморфной в области D и обращается в нуль на множестве E, а в силу непрерывности и в точке a. Нам нужно доказать, что $h(z) \equiv 0$. Пусть Q — множество нулей функции h в области D. Внутренность этого множества обозначим через G_1. Другими словами, $\zeta \in G_1$ в том и только том случае, если найдётся окрестность $\mathcal{O}_\varrho(\zeta)$, в которой h обращается в нуль. По самому определению G_1 является открытым множеством и $G_1 \subset D$. Пусть $G_2 = D \setminus G_1$ и покажем, что G_2 также является открытым множеством, т. е. каждая точка принадлежит G_2 с некоторой окрестностью. Действительно, в противном случае некоторая точка ζ из G_2 была бы предельной точкой нулей функции h. Но тогда, как показывают рассуждения, проведенные перед формулировкой теоремы, ζ не может быть нулём конечной кратности и нашлась бы окрестность этой точки, в которой h обращается в нуль. Но это означало бы, что $\zeta \in G_1$. Итак, $D = G_1 \cup G_2$, где G_1 и G_2 — открытые непересекающиеся множества. В силу связности D одно из множеств G_1 или G_2 должно быть пустым. С другой стороны, точка a является предельной точкой нулей функции h и, следовательно, принадлежит G_1. В результате, $G_2 = \varnothing$ и $G_1 = D$, что и доказывает теорему. $\square$

Следствие 6.2. *Если $f(z) \not\equiv 0$ голоморфна в области D, то все её нули изолированы и конечного порядка.*

Ряды Лорана

Рассмотрим вначале ряд вида $b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots$. Простая замена переменной $z = 1/\zeta$ приводит его к обычному степенному ряду $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n$. Область сходимости этого ряда, как следует из теоремы 3.1, является круг $|\zeta| < R$, где

$$1/R = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}.$$

Следовательно, областью сходимости исходного ряда является внешность круга $|z| > 1/R$, где его сумма представляет собой голоморфную функцию. Если скомбинировать такой ряд с обычным степенным рядом, то получим более общую форму степенного ряда $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, или $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, областью сходимости которого (если она не пуста) является кольцо. Внутренний и внешний радиусы этого кольца можно получить, например, по формуле Коши—Адамара (3.2).

Теорема 6.4. *Любую функцию f, голоморфную в кольце $K = \{z\colon r < |z - a| < R\}$, можно представить как сумму сходящегося в K ряда*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{6.3}$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\varrho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, \tag{6.4}$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, где γ_ϱ — положительно ориентированная окружность $|\zeta - a| = \varrho$, $r < \varrho < R$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что интегралы в правой части (6.4) не зависят от значения ϱ. Действительно, если $\varrho', \varrho'' \in (r, R)$, то $\gamma_{\varrho'} - \gamma_{\varrho''}$ является циклом, гомологичным нулю относительно кольца K. Поэтому применение теоремы Коши 4.5 к функции $f(z)/(z-a)^{n+1}$ даёт равенство

$$\int\limits_{\gamma_{\varrho'} - \gamma_{\varrho''}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta = 0,$$

откуда следует, что

$$\int\limits_{\gamma_{\varrho'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta = \int\limits_{\gamma_{\varrho''}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta.$$

Пусть теперь $r < r' < R' < R$. Тогда цикл $\gamma_{R'} - \gamma_{r'}$ ограничивает кольцо $K' = \{z\colon r' < |z - a| < R'\}$. В силу интегральной формулы Коши (5.2) имеем в кольце K' представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{R'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{r'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f_1(z) + f_2(z),$$

где

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{R'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \qquad f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{r'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Функцию f_1 можно рассматривать как интеграл Коши в круге $|z - a| < R'$ и потому она является голоморфной в этом круге. В силу теоремы 6.2 функцию f_1 можно представить рядом Тейлора

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \qquad c_n = \frac{f_1^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{R'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta,$$

т. е. коэффициенты $c_n, n = 0, 1, 2, \ldots$, вычисляются по формулам (6.4). Для получения разложения функции f_2 во внешности круга $|z - a| > r'$ представим ядро Коши в виде

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(z-a)\left(1 - \dfrac{\zeta - a}{z - a}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^{n-1}}{(z-a)^n}.$$

Поскольку при $|z-a| > r'$ и $\zeta \in \gamma_{r'}$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{\zeta - a}{z - a}\right| = \frac{r'}{|z-a|} < 1,$$

то полученный ряд сходится равномерно по $\zeta \in \gamma_{r'}$ и его можно почленно интегрировать. Умножая его на ограниченную функцию $f(\zeta)/(2\pi i)$ и интегрируя почленно, получаем

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n},$$

где

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{r'}} (\zeta - a)^{n-1} f(\zeta) d\zeta = c_{-n}.$$

Складывая теперь полученные разложения для f_1 и f_2, получаем разложение (6.3) для функции f в кольце K'. Поскольку r' и R' можно выбрать сколь угодно близко к r и R, соответственно, и коэффициенты c_n не зависят от этого выбора, то полученное представление имеет место во всём кольце K. $\square$

Определение 6.3. Ряд (6.3), коэффициенты которого вычисляются по формулам (6.4), называется *рядом Лорана* функции f в кольце K. Совокупность членов этого ряда с неотрицательными степенями $(z-a)^n, n = 0, 1, \ldots$, называется его *правильной частью*, а совокупность членов с отрицательными степенями $(z-a)^n, n = -1, -2, \ldots$, — *главной частью.*

Теорема 6.5. *[Единственность ряда Лорана.] Если функция f представима сходящимся в кольце $K = \{z\colon r < |z-a| < R\}$ рядом* (6.3)*, то его коэффициенты определяются по формулам* (6.4).

Доказательство. Фиксируем $\varrho \in (r, R)$. Ряд (6.3) сходится равномерно на окружности γ_ϱ. Поэтому его можно почленно интегрировать. Равномерная сходимость не нарушится, если его умножить на ограниченную функцию. Умножая равенство (6.3) на $(z-a)^{-m-1}$, где m — произвольное целое, и переходя к почленному интегрированию, получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int\limits_{\gamma_\varrho} (z-a)^{n-m-1} dz = \int\limits_{\gamma_\varrho} \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}} dz.$$

Однако в сумме левой части последнего равенства все слагаемые, кроме соответствующего индексу $n = m$, обращаются в нуль. Поэтому

$$c_m \cdot 2\pi i = \int\limits_{\gamma_\varrho} \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}} dz$$

и теорема доказана. $\square$

Смысл теоремы состоит в том, что всякий сходящийся ряд является рядом Лорана своей суммы. Формулы для вычисления коэффициентов ряда Лорана на практике применяются редко ввиду громоздкости соответствующих вычислений. На основании доказанной теоремы для получения лорановского разложения можно использовать любой корректный приём.

Завершим этот параграф замечаниями о ряде Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки. Если функция f голоморфна во внешности некоторого круга $|z| > R$, т. е. в окрестности бесконечно удалённой точки, то в силу теоремы 6.4 её можно разложить в этой окрестности в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\varrho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta,$$

где γ_ϱ — положительно ориентированная окружность $|\zeta| = \varrho$, $\varrho > R$. Однако при этом несколько меняется терминология. Под главной частью ряда Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки понимается сумма $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ по положительным степеням z, а под правильной частью понимается сумма $\sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n$ по отрицательным степеням z и c_0. Это связано с тем, что $z^n \to 0$ при $z \to \infty$ для отрицательных n и $z^n \to \infty$ при $z \to \infty$ для положительных n. В случае отсутствия главной части $f(z) \to c_0$ при $z \to \infty$, а замена $z = 1/\zeta$ приводит к тому, что функция $g(\zeta) = f(1/\zeta)$ будет голоморфной в окрестности точки $\zeta = 0$.

§ 7. Изолированные особые точки. Вычеты

Точка $a \in \mathbb{C}$ называется изолированной особой точкой (однозначного характера) для функции f, если найдётся такое $r > 0$, что f является голоморфной в проколотой окрестности $\dot{O}_r(a)$. В зависимости от поведения функции $f(z)$ при приближении z к особой точке a проводится следующая классификация.

Определение 7.1. Изолированная особая точка $a \in \mathbb{C}$ функции f называется:

(i) *устранимой особой точкой*, если существует конечный предел

$$\lim_{z \to a} f(z) = A;$$

(ii) *полюсом*, если $f(z) \to \infty$ при $z \to a$;

(iii) *существенно особой точкой*, если $f(z)$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела при $z \to a$.

Теорема 7.1. *Изолированная особая точка a функции f является устранимой в том и только том случае, если f ограничена в некоторой окрестности $\dot{O}_r(a)$, $r > 0$.*

Доказательство. Если a является устранимой особой точкой, то ограниченность $f(z)$ в некоторой окрестности $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ следует из существования предела $\lim f(z)$ при $z \to a$.

Допустим теперь, что $|f(z)| \leqslant M$ при всех $z \in \dot{\mathcal{O}}_r(a)$ и некотором $M > 0$. В $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$, как в кольцевой области, функция f представима в виде суммы ряда Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\varrho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta,$$

где γ_ϱ — положительно ориентированная окружность $|\zeta - a| = \varrho$, а ϱ можно выбрать любым в интервале $(0, r)$. Поскольку

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{\gamma_\varrho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \right| \leqslant \frac{M}{2\pi \varrho^{n+1}} \int\limits_{\gamma_\varrho} |d\zeta| = \frac{M}{\varrho^n},$$

то $c_n = 0$ для всех отрицательных n. Таким образом, ряд Лорана функции f в $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ является, по существу, обычным степенным рядом, а его сумма $g(z)$ представляет собой голоморфную в $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ функцию, которая совпадает с функцией f в проколотой окрестности $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$. $\square$

Замечание 7.1. Из доказательства теоремы видно, что доопределение (или переопределение) функции f в устранимой особой точке a делает её голоморфной в полной окрестности $\mathcal{O}_r(a)$, чем и объясняется её название.

Замечание 7.2. Полученные в ходе доказательства неравенства $|c_n| \leqslant M/\varrho^n$ для коэффициентов ряда Лорана, где

$$M = \max_{z \in \gamma_\varrho} |f(z)|,$$

иногда называют *неравенствами Коши.*

Следствие 7.1. *Пусть f — голоморфная в области D функция и a является её нулём порядка m. Тогда в области D имеет место равенство*

$$f(z) = (z-a)^m g(z),$$

где g — голоморфная в D функция и $g(a) \neq 0$.

Доказательство. Функция $g(z) = f(z)/(z-a)^m$ является голоморфной в $D \setminus \{a\}$. Из вида ряда Тейлора функции f в окрестности точки a следует, что a является устранимой особой точкой для функции g. Таким образом, доопределяя функцию g в точке a соответствующим образом, получаем голоморфную в D функцию. Условие $g(a) = 0$ означало бы, что f имеет в точке a нуль более высокого порядка, чем m. Следовательно, $g(a) \neq 0$. $\square$

При доказательстве теоремы 7.1 мы установили также, что изолированная особая точка a является устранимой для функции f в том и только том случае, если разложение f в ряд Лорана в проколотой окрестности $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ не содержит главной части. Оказывается, что главная часть лорановского разложения функции в окрестности изолированной особой точки полностью определяет характер особенности.

Теорема 7.2. *Изолированная особая точка $a \in \mathbb{C}$ функции f является полюсом (существенно особой) в том и только том случае, если главная часть ряда Лорана функции f в проколотой окрестности $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ содержит конечное (бесконечное) число членов с ненулевыми коэффициентами.*

Доказательство. Утверждение теоремы достаточно доказать только для полюса. Допустим, что лорановское разложение функции f в $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ имеет вид

$$f(z) = c_{-m}(z-a)^{-m} + c_{-m+1}(z-a)^{-m+1} + \dots$$

и $c_{-m} \neq 0$, т. е. главная часть имеет конечное число членов с ненулевыми коэффициентами. Тогда функция φ, определяемая как сумма степенного ряда

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k-m}(z-a)^k,$$

будет голоморфной в полной окрестности $\mathcal{O}_r(a)$. При этом $\varphi(a) = c_{-m} \neq 0$. Из равенства $f(z) = (z-a)^{-m}\varphi(z)$ видно, что $f(z) \to \infty$ при $z \to a$. Таким образом, a является полюсом для функции f.

Допустим теперь, что a — полюс функции f. Тогда $f(z) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ и, следовательно, в этой окрестности функция $g(z) = 1/f(z)$ является голоморфной и $g(z) \to 0$ при $z \to a$. Полагая $g(a) = 0$, получаем голоморфную в $\mathcal{O}_r(a)$ функцию. Пусть m — порядок нуля функции g в точке a. Тогда $g(z) = (z-a)^m\varphi(z)$ где φ — голоморфная в $\mathcal{O}_r(a)$ функция и $\varphi(z) \neq 0$ при $z \in \mathcal{O}_r(a)$. Функция $1/\varphi(z)$ также будет голоморфной в $\mathcal{O}_r(a)$, а её разложение в ряд Тейлора в $\mathcal{O}_r(a)$ будет иметь вид

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k,$$

где $a_0 \neq 0$. Но тогда в $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ функция f представима в виде

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = (z-a)^{-m}\frac{1}{\varphi(z)} = (z-a)^{-m}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k,$$

из которого видно, что главная часть ряда Лорана функции f в окрестности точки a имеет конечное число ненулевых членов. □

Определение 7.2. *Порядком* (или *кратностью*) полюса a функции f называется порядок этой точки как нуля функции $1/f$.

Из доказательства теоремы видно, что порядок полюса совпадает с номером старшего члена главной части лорановского разложения функции в окрестности полюса. Следующий результат указывает на сложное поведение функции в окрестности существенно особой точки.

Теорема 7.3. *[Сохоцкого] Пусть f голоморфна в проколотой окрестности $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ и a является существенно особой точкой функции f. Тогда для любого $A \in \overline{\mathbb{C}}$ найдётся последовательность $\{z_n\} \subset \dot{\mathcal{O}}_r(a)$ такая, что $z_n \to a$, $f(z_n) \to A$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. В случае $A = \infty$ утверждение следует из теоремы 7.1, согласно которой f не может быть ограниченной в окрестности $\dot{\mathcal{O}}_\varrho(a)$ ни для какого $\varrho \in (0, r)$.

Пусть $A \in \mathbb{C}$ и допустим, что A не является предельной точкой никакой последовательности $\{f(z_n)\}$, для которой $z_n \to a$. Тогда найдутся такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что $|f(z) - A| \geqslant \varepsilon$ при $z \in \dot{\mathcal{O}}_\delta(a)$ Функция

$$g(z) \;=\; \frac{1}{f(z) - A}$$

будет голоморфной в $\dot{\mathcal{O}}_\delta(a)$ и $|g(z)| \leqslant 1/\varepsilon$. По теореме 7.1 точка a должна быть устранимой особой точкой для функции g. Доопределяя её некоторым значением $g(a) \in \mathbb{C}$, получим голоморфную в полной окрестности $\mathcal{O}_\delta(a)$ функцию. Если $g(a) \neq 0$, то должно выполняться предельное соотношение $f(z) \to 1/g(a) + A$ при $z \to a$, что противоречит предположениям теоремы. В случае $g(a) = 0$ должно выполняться условие $f(z) \to \infty$ при $z \to a$, что также противоречит предположениям теоремы. $\square$

Бесконечно удалённая точка. В случае, когда f голоморфна во внешности некоторого круга, т. е. в области $|z| > R$, бесконечно удалённую точку также рассматривают как изолированную особую точку. Характер особенности (и порядок полюса, если $f(z) \to \infty$ при $z \to \infty$) определяется в этом случае как соответствующий характер изолированной особой точки $\zeta = 0$ функции $g(\zeta) = f(1/\zeta)$. Легко видеть, что результаты теорем 7.1 — 7.3 остаются в силе, если в них положить $a = \infty$. Напомним при этом, что под главной частью ряда Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки понимается совокупность членов разложения с положительными степенями z^n.

Вычеты. Пусть a — изолированная особая точка функции f и $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ — проколотая окрестность точки a, в которой функция f является голоморфной. Из теоремы Коши для $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ следует, что интеграл

$$\int\limits_{\gamma_\varrho} f(z)dz,$$

где γ_ϱ — положительно ориентированная окружность $|z - a| = \varrho$, не зависит от выбора ϱ в интервале $(0, r)$. В связи с этим *вычетом* голоморфной функции f в изолированной особой точке a называется комплексное число

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\varrho} f(z)dz,$$

где γ_ϱ — положительно ориентированная окружность $|z - a| = \varrho$ с радиусом ϱ из интервала $(0, r)$, а f голоморфна в проколотой окрестности $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$. Иногда для обозначения вычета используют более короткую запись $\operatorname*{res}_a f$.

Теорема 7.4. *Вычет функции f в изолированной особой точке a равен коэффициенту при $(z-a)^{-1}$ лорановского разложения функции f в окрестности точки a.*

Доказательство. Поскольку ряд Лорана $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ функции f сходится равномерно на окружности γ_ϱ, то его можно почленно интегрировать. Замечая также, что $\int_{\gamma_\varrho}(z-a)^n dz = 0$ при $n \neq -1$, получаем

$$\operatorname*{res}_a f = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\varrho} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int\limits_{\gamma_\varrho}(z-a)^n dz = c_{-1}J(\gamma_\varrho, a) = c_{-1}.$$

Теорема доказана. □

Замечание 7.3. Из хода доказательства теоремы видно, что если γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая, расположенная в $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(z)dz = J(\gamma, a)\operatorname*{res}_a f.$$

Следствие 7.2. *В устранимой особой точке вычет равен нулю.*

Предложение 7.1. *Пусть a — полюс кратности $m \geqslant 1$ голоморфной в $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ функции f. Тогда*

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\left[\frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}}(z-a)^m f(z)\right].$$

Доказательство. Поскольку кратность полюса a равняется m, то разложение в ряд Лорана функции f в окрестности $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ будет иметь вид

$$f(z) = c_{-m}(z-a)^{-m} + \ldots + c_{-1}(z-a)^{-1} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots,$$

где $c_{-m} \neq 0$. Функция $g(z) = (z-a)^m f(z)$ будет иметь в точке a устранимую особенность, а c_{-1} будет коэффициентом её ряда Тейлора при $(z-a)^{m-1}$. Следовательно,

$$c_{-1} = \operatorname*{res}_a f = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}}g(z)\Big|_{z=a}. \qquad \square$$

Следующий результат называют теоремой Коши о вычетах и он играет важную роль в вычислении интегралов.

Теорема 7.5. *Пусть D — область, ограниченная циклом γ (т. е. $\gamma = \partial D$ — положительно ориентированная граница области D), и f — голоморфная на $\overline{D}$ функция, исключая конечное число особых точек $a_1, \ldots, a_n$, расположенных в D. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=a_k} f(z).$$

Доказательство. Пусть $r > 0$ таково, что $\overline{\mathcal{O}_r(a_k)} \subset D$ для всех $k = 1, \ldots, n$, и $\overline{\mathcal{O}_r(a_j)} \cap \overline{\mathcal{O}_r(a_k)} = \varnothing$ при $j \neq k$. Тогда цикл $\gamma - \sum_{k=1}^n \lambda_k$, где $\lambda_k = \partial\mathcal{O}_r(a_k)$, будет гомологичным нулю относительно области голоморфности функции f. Поэтому в силу теоремы Коши имеем

$$\int_{\partial D} f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} \int_{\lambda_k} f(z)dz = 0,$$

откуда следует требуемое равенство, поскольку

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_k} f(z)dz = \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z),$$

$k = 1, \ldots, n$. □

Вычет в бесконечно удалённой точке. Пусть функция f голоморфна во внешности некоторого круга $|z| > R$. Тогда бесконечно удалённую точку мы причисляем к изолированным особым точкам. Определим вычет в бесконечно удалённой точке посредством равенства

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\gamma_\varrho} f(z)dz,$$

где γ_ϱ — положительно ориентированная окружность $|z| = \varrho$, $\varrho > R$. Интегрируя почленно лорановское разложение $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ функции f в окрестности $z = \infty$ по окружности $-\gamma_\varrho$, получаем

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

Это равенство часто используется для вычисления вычетов функций в бесконечно удалённой точке. Отметим в связи с этим отличие бесконечно удалённой точки от конечных изолированных особых точек. Коэффициент c_{-1} относится к правильной части ряда Лорана разложения функции f в окрестности точки $z = \infty$. Поэтому даже в случае, когда $z = \infty$ является устранимой особой точкой, вычет в ней может оказаться отличным от нуля.

Теорема 7.6. *Пусть функция f является голоморфной во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, за исключением конечного числа особых точек $a_1, \ldots, a_n$. Тогда*

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z) = 0.$$

Доказательство. Поскольку особых точек конечное число, то найдётся такое $R > 0$, что $|a_k| < R$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Обозначим γ_R положительно ориентированную окружность $|z| = R$. По предыдущей теореме

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z).$$

Замечая, что
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} f(z)dz = -\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z),$$
получаем требуемое равенство. $\square$

Пусть D — область, которая получена удалением из комплексной плоскости $\mathbb{C}$ конечного числа замкнутых попарно не пересекающихся жордановых областей $\overline{\Delta_1}, \dots, \overline{\Delta_n}$, ограниченных кусочно-гладкими кривыми $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, соответственно. Такую область будем называть внешней областью с кусочно-гладкой границей. Положительно ориентированной границей этой области будем считать отрицательно ориентированные кривые γ_k ($J(\gamma_k, a) = -1$ для $a \in \Delta_k$), $k = 1, \dots, n$, и обозначать ∂D. В случае достаточно простых кривых γ_k можно сказать, что при движении вдоль границы ∂D область D остаётся слева.

Теорема 7.7. *Пусть D — внешняя область с кусочно-гладкой границей ∂D и f — голоморфная на $\overline{D}$ функция, исключая конечное число особых точек a_1, …, a_n, расположенных в D. Тогда*
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} f(z)dz = \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) + \sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=a_k} f(z).$$

Доказательство. Пусть $R > 0$ такое, что граница ∂D и точки $a_1, \dots, a_n$ расположены внутри круга $|z| < R$. Обозначим через Γ_R положительно ориентированную окружность $|z| = R$ и пусть $D_R = \{z \in D\colon |z| < R\}$. Тогда $\Gamma_R + \partial D$ будет положительно ориентированной границей области D_R и по теореме 7.5 получаем равенство
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R+\partial D} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=a_k} f(z).$$

Замечая, что
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} f(z)dz = -\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z),$$
приходим к доказываемому утверждению. $\square$

Вычисление интегралов. Теория вычетов даёт очень эффективный инструмент для вычисления определённых интегралов. При этом следует иметь в виду, что подынтегральная функция должна быть близка к голоморфной. На практике это, как правило, выполняется в силу того, что интегрируются, в основном, элементарные функции. Более существенным является то, что теория вычетов связана с интегрированием по замкнутым кривым, в то время как в вещественном анализе интегрирование ведётся по отрезку, а в случае несобственных интегралов по всей числовой прямой или некоторой её части. Рассмотрим некоторые типичные примеры преодоления этих трудностей.

I. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть $R(x,y)$ — рациональная функция (т. е. отношение полиномов) двух переменных. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta.$$

Идея применения техники вычетов к вычислению такого интеграла состоит в том, чтобы представить его как линейный интеграл, полученный при интегрировании по замкнутой кривой. Пусть $\mathbb{T}$ — положительно ориентированная единичная окружность и $\mathbb{T}$: $z = e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, — её параметризация. Тогда на $\mathbb{T}$ будут выполняться следующие соотношения

$$dz = izd\theta, \qquad \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \qquad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{T}} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz} = \int\limits_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta.$$

Если рациональная функция

$$R_1(z) = \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)$$

от комплексной переменной z не имеет на $\mathbb{T}$ полюсов, то

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta = \frac{1}{i}\int\limits_{\mathbb{T}} R_1(z)dz = 2\pi \sum_{|a|<1} \operatorname*{res}_{z=a} R_1(z),$$

где суммирование ведётся по всем полюсам функции R_1, которые расположены внутри единичного круга. Такая запись суммы мотивирована тем, что вычет в точке голоморфности функции R_1 равен нулю.

II. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим теперь интеграл вида

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — полиномы степени m и n, соответственно. Будем считать, что они не имеют общих корней, т. е. дробь P/Q является несократимой. Для того, чтобы сходился рассматриваемый интеграл, нужно, чтобы знаменатель Q не имел вещественных корней и степень числителя P была меньше степени знаменателя Q, по крайней мере, на 2, т. е. $n - m \geqslant 2$.

Лемма 7.1. *Пусть P и Q — полиномы без общих корней степени m и n, соответственно. Допустим, что Q не имеет вещественных корней и $n-m \geqslant 2$. Тогда*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname*{res}_{z=a} \frac{P(z)}{Q(z)},$$

где суммирование ведётся по всем нулям полинома Q, расположенным в верхней полуплоскости.

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — нули полинома Q. Поскольку дробь P/Q является несократимой (P и Q не имеют общих нулей), то эти точки являются полюсами рациональной функции P/Q. Выберем $R > 0$ так, чтобы для всех $k = 1, \ldots, n$ выполнялись неравенства $|a_k| < R$. Другими словами, все полюсы рациональной функции P/Q расположены в круге $|z| < R$. Рассмотрим полуокружность $\Gamma_R\colon z = Re^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, и отрезок $\lambda_R\colon z = x$, $-R \leqslant x \leqslant R$. Поскольку $\Gamma_R + \lambda_R$ образует положительно ориентированную границу полукруга $D_R = \{z\colon |z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}$, то по теореме 7.5

$$\int\limits_{\Gamma_R+\lambda_R} \frac{P(z)}{Q(z)}dz = 2\pi i \sum_{k\colon \operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname*{res}_{z=a_k} \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Заметим, что при увеличении R правая часть этого равенства не меняется, поскольку вне круга $|z| < R$ нулей полинома Q нет. С другой стороны,

$$\int\limits_{\Gamma_R+\lambda_R} \frac{P(z)}{Q(z)}dz = \int\limits_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}dz + \int\limits_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}dx, \quad \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx.$$

Далее, пусть $P(z) = b_m z^m + \ldots + b_0$, $Q(z) = c_n z^n + \ldots + c_0$, где $b_m \neq 0$, $c_n \neq 0$. Тогда для $z \in \Gamma_R$ имеем

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| = \frac{1}{R^{n-m}} \frac{|b_m + b_{m-1}/z + \ldots + b_0/z^m|}{|c_n + c_{n-1}/z + \ldots + c_0/z^n|},$$

откуда с учётом неравенства $n - m \geqslant 2$ следует, что

$$R \cdot \max_{z\in\Gamma_R} \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \to 0$$

при $R \to \infty$. Но тогда

$$\left|\int\limits_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}dz\right| \leqslant \int\limits_{\Gamma_R} \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \cdot |dz| \leqslant \pi R \cdot \max_{z\in\Gamma_R} \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \to 0$$

при $R \to \infty$. В результате приходим к равенству из формулировки леммы. □

III. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛЕММЫ ЖОРДАНА

Интегралы вида

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin x dx, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos x dx$$

абсолютно расходятся, если знаменатель имеет степень всего на единицу выше степени числителя. С другой стороны, интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

сходится условно. Для вычисления таких интегралов с помощью вычетов используется лемма Жордана.

Лемма 7.2. *[Жордана.] Пусть g — непрерывная на множестве $\{z\colon \operatorname{Im} z \geqslant 0, |z| \geqslant R_0\}$ функция при некотором $R_0 > 0$. Допустим также, что*

$$\max_{z\in\Gamma_R} |g(z)| \to 0$$

при $R \to \infty$, где $\Gamma_R\colon z = Re^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, — полуокружность. Тогда для любого $\alpha > 0$ выполняется соотношение

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma_R} g(z)e^{i\alpha z} dz = 0.$$

Доказательство. Для доказательства нашего утверждения достаточно показать, что интеграл

$$\int\limits_{\Gamma_R} \left|e^{i\alpha z}\right| |dz| = R\int\limits_0^{\pi} e^{-\alpha R\sin\theta} d\theta = 2R\int\limits_0^{\pi/2} e^{-\alpha R\sin\theta} d\theta$$

ограничен равномерно по $R > 0$. Поскольку $\sin\theta$ является вогнутой на промежутке $(0,\pi)$ функцией, то $\sin\theta \geqslant 2\theta/\pi$ при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Используя это неравенство, получаем

$$\int\limits_0^{\pi/2} e^{-\alpha R\sin\theta} d\theta \leqslant \int\limits_0^{\pi/2} e^{-\alpha 2R\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi}{2\alpha R}\int\limits_0^{\alpha R} e^{-t} dt \leqslant \frac{\pi}{2\alpha R}\int\limits_0^{\infty} e^{-t} dt = \frac{\pi}{2\alpha R}.$$

Отсюда находим, что

$$\int\limits_{\Gamma_R} \left|e^{i\alpha z}\right| |dz| < \frac{\pi}{\alpha}. \qquad \square$$

Лемма Жордана применяется обычно к вычислению интегралов вида

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\cos\alpha x dx, \qquad I_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\sin\alpha x dx$$

где $\alpha > 0$, а $g(x)$ — рациональная функция, у которой степень знаменателя лишь на единицу больше степени числителя. Для применения теории вычетов рассматривается

$$I = I_1 + iI_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{i\alpha x} dx$$

и строится замкнутая кривая, состоящая из отрезка $\lambda_R\colon z = x$, $-R \leqslant x \leqslant R$, и полуокружности $\Gamma_R\colon z = Re^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. При достаточно больших значениях R имеем

$$\int\limits_{\Gamma_R+\lambda_R} g(z)e^{i\alpha z} dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname*{res}_{z=a} \left[g(z)e^{i\alpha z}\right].$$

Однако, в силу леммы Жордана

$$\int\limits_{\Gamma_R} g(z)e^{i\alpha z}dz \to 0$$

при $R \to \infty$. Поэтому

$$\int\limits_{\lambda_R} g(z)e^{i\alpha z}dz \to I$$

при $R \to \infty$ и, следовательно,

$$I = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname*{res}_{z=a} \left[g(z)e^{i\alpha z}\right].$$

При этом $I_1 = \operatorname{Re} I$ и $I_2 = \operatorname{Im} I$.

IV. ДОЛЕВОЙ ВЫЧЕТ В ПРОСТОМ ПОЛЮСЕ

Пусть a — изолированная особая точка функции f, т. е. f голоморфна в $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ при некотором $r > 0$. Рассмотрим дугу окружности $\gamma_{\varrho,\alpha}\colon z = a + \varrho e^{i\theta}$, $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 + \alpha$, где $\varrho \in (0, r)$ и $\alpha \in (0, 2\pi]$. Если $\alpha = 2\pi$, то $\gamma_{\varrho,\alpha}$ представляет собой полную окружность γ_ϱ и

$$\int\limits_{\gamma_\varrho} f(z)dz = i2\pi \operatorname*{res}_{z=a} f(z).$$

В общем случае для интеграла вдоль $\gamma_{\varrho,\alpha}$ при $\alpha < 2\pi$ выражения через вычет нет. Однако, если a является простым полюсом (кратности 1), то можно вычислить предел этого интеграла при $\varrho \to 0$.

Лемма 7.3. *Пусть a — простой полюс функции f и $\gamma_{\varrho,\alpha}\colon z = a + \varrho e^{i\theta}$, $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 + \alpha$ — дуга окружности, содержащаяся в угловом секторе раствора α, $0 < \alpha < 2\pi$. Тогда*

$$\lim_{\varrho\to 0} \int\limits_{\gamma_{\varrho,\alpha}} f(z)dz = i\alpha \operatorname*{res}_{z=a} f(z).$$

Доказательство. Поскольку a является простым полюсом функции f, то в окрестности этой точки разложение f в ряд Лорана имеет вид $f(z) = c_{-1}(z - a)^{-1} + c_0 + c_1(z - a) + \ldots$, $c_{-1} \neq 0$. Следовательно, в этой окрестности $f(z) = c_{-1}(z - a)^{-1} + g(z)$, где g — голоморфная в полной окрестности точки a. Но тогда

$$\int\limits_{\gamma_{\varrho,\alpha}} f(z)dz = c_{-1} \int\limits_{\gamma_{\varrho,\alpha}} \frac{dz}{z-a} + \int\limits_{\gamma_{\varrho,\alpha}} g(z)dz.$$

Поскольку $g(z)$ ограничена в окрестности точки a, то

$$\int\limits_{\gamma_{\varrho,\alpha}} g(z)dz \to 0$$

при $\varrho \to 0$. Замечая также, что

$$\int\limits_{\gamma_{\varrho,\alpha}} \frac{dz}{z-a} = i \int\limits_{\theta_0}^{\theta_0+\alpha} d\theta = i\alpha,$$

приходим к утверждению леммы. $\square$

Пример 1. *Для иллюстрации применения доказанной леммы покажем, что*

$$\int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{x^2-1} dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

В комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль луча $L = \{z = iy \colon y \leqslant 0\}$ можно выделить регулярную ветвь логарифма

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z, \qquad -\pi/2 < \arg z < 3\pi/2,$$

и рассмотреть функцию $f(z) = \ln z/(z^2-1)$. Эта функция имеет в $\mathbb{C} \setminus L$ две изолированные особые точки $z = \pm 1$. Поскольку в окрестности точки $z = 1$ выделенная ветвь логарифма имеет разложение

$$\ln z = \ln(1 + (z-1)) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n},$$

то для функции $f(z)$ точка $z = 1$ является устранимой особой точкой. Точка $z = -1$ является простым полюсом с вычетом

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to-1} \frac{\ln z}{z-1} = -\frac{1}{2}\ln(-1) = -\frac{i\pi}{2}.$$

Для больших $R > 2$ и малых $\varepsilon < 1/4$ рассмотрим область $D(R,\varepsilon)$, которая получается из полукруга $\{z \colon |z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}$ удалением множеств $\{z \colon |z| \leqslant \varepsilon, \operatorname{Im} z > 0\}$ и $\{z \colon |z+1| \leqslant \varepsilon, \operatorname{Im} z > 0\}$. Положительно ориентированная граница области $D(R,\varepsilon)$ состоит из дуг:

$$\partial D(R,\varepsilon) = \Gamma_R + \lambda_1^\varepsilon - \gamma_1^\varepsilon + \lambda_2^\varepsilon - \gamma_2^\varepsilon + \lambda_3^\varepsilon,$$

где $\Gamma_R \colon z = Re^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$; $\lambda_1^\varepsilon \colon z = x$, $-R \leqslant x \leqslant -1-\varepsilon$; $\gamma_1^\varepsilon \colon z = -1 + \varepsilon e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$; $\lambda_2^\varepsilon \colon z = x$, $-1+\varepsilon \leqslant x \leqslant -\varepsilon$; $\gamma_2^\varepsilon \colon z = \varepsilon e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$; $\lambda_3^\varepsilon \colon z = x$, $\varepsilon \leqslant x \leqslant R$.

Поскольку f голоморфна на $\overline{D(R,\varepsilon)}$, то по теореме Коши

$$\int\limits_{\partial D(R,\varepsilon)} f(z)dz = 0,$$

или, что эквивалентно,

$$\int\limits_{\Gamma_R} f(z)dz + \int\limits_{-R}^{-1-\varepsilon} f(x)dx - \int\limits_{\gamma_1^\varepsilon} f(z)dz + \int\limits_{-1+\varepsilon}^{-\varepsilon} f(x)dx - \int\limits_{\gamma_2^\varepsilon} f(z)dz + \int\limits_{\varepsilon}^{R} f(x)dx = 0.$$

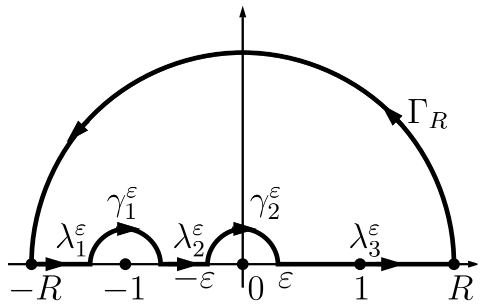

Рис. 3. К примеру 1

Заметим, что

$$\left|\int\limits_{\Gamma_R} f(z)dz\right| \leqslant \int\limits_{\Gamma_R} |f(z)|\cdot|dz| \leqslant \frac{\sqrt{(\ln R)^2+\pi^2}}{R^2-1}\pi R \to 0$$

при $R\to\infty$. Поэтому, осуществляя предельный переход при $R\to\infty$, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{-1-\varepsilon}\frac{\ln|x|+i\pi}{x^2-1}dx+\int\limits_{-1+\varepsilon}^{-\varepsilon}\frac{\ln|x|+i\pi}{x^2-1}dx+\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}dx-\int\limits_{\gamma_1^\varepsilon} f(z)dz-\int\limits_{\gamma_2^\varepsilon} f(z)dz\,=\,0.$$

Отделяя в левой части равенства вещественную часть и выполняя в первых двух интегралах замену переменной, получаем

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{\ln x}{x^2-1}dx+\int\limits_{1+\varepsilon}^{\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}dx+\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}dx-\operatorname{Re}\left\{\int\limits_{\gamma_1^\varepsilon} f(z)dz+\int\limits_{\gamma_2^\varepsilon} f(z)dz\right\}\,=\,0.$$

Далее,

$$\left|\int\limits_{\gamma_2^\varepsilon} f(z)dz\right| \leqslant \frac{\sqrt{(\ln\varepsilon)^2+\pi^2}}{1-\varepsilon}\pi\varepsilon \to 0$$

при $\varepsilon\to 0$, а в силу доказанной выше леммы

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\gamma_1^\varepsilon} f(z)dz\,=\,i\pi\operatorname*{res}_{z=-1} f(z)\,=\,\frac{\pi^2}{2}.$$

Таким образом,

$$2\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}dx-\frac{\pi^2}{2}\,=\,0,\qquad \int\limits_{0}^{\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}dx\,=\,\frac{\pi^2}{4}.\qquad\square$$

§ 8. Регулярные ветви логарифма и корней

8.1. Условия существования регулярных ветвей. Основной вопрос, который изучается в этом параграфе, заключается в выяснении условий возможности выделения регулярной ветви $\ln f(z)$ и $\sqrt[n]{f(z)}$ для голоморфной в области D функции f. Очевидно, что нужно в качестве одного из условий потребовать необращение в нуль функции f в области D. Другие условия связаны с топологической структурой области D и её образа $f(D)$.

Теорема 8.1. *Пусть f — голоморфная в области D функция и $f(z) \neq 0$ при $z \in D$. Тогда в области D можно выделить регулярную ветвь $\ln f(z)$ в том и только том случае, если для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой γ, расположенной в D, выполняется условие*

$$J(f(\gamma), 0) = 0, \qquad \text{\textit{или, что эквивалентно,}} \qquad \Delta_\gamma \arg f(z) = 0. \tag{8.1}$$

Доказательство. Допустим вначале, что $F(z)$ — регулярная ветвь $\ln f(z)$ в области D, т. е. F голоморфна в D и $e^{F(z)} \equiv f(z)$. Тогда $F'(z) = f'(z)/f(z)$ и $(f'(z)/f(z))dz$ — полный дифференциал в области D. Следовательно, для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой γ в области D будет выполняться равенство

$$0 = \int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i J(f(\gamma), 0).$$

Обратно, допустим теперь, что $J(f(\gamma), 0) = 0$ для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой γ в D. Это эквивалентно тому, что $(f'(z)/f(z))dz$ является полным дифференциалом в D. Поэтому существует первообразная $F(z)$ для $f'(z)/f(z)$, которая определяется с точностью до аддитивной константы. Фиксируем некоторую точку $a \in D$ и значение $\ln f(a)$ из $Ln\{f(a)\}$. Распорядимся аддитивной константой первообразной так, чтобы выполнялось равенство $F(a) = \ln f(a)$. Заметим теперь, что

$$\left(f(z)e^{-F(z)}\right)' = e^{-F(z)}\left(f'(z) - f(z)F'(z)\right) = 0$$

для всех $z \in D$. Следовательно, $f(z)e^{-F(z)} \equiv \text{const}$. При $z = a$ имеем $f(a)e^{-\ln f(a)} = 1$. Таким образом, $f(z)e^{-F(z)} \equiv 1$ и $e^{F(z)} \equiv f(z)$. Другими словами, $F(z)$ является регулярной ветвью в области D функции $\ln f(z)$.

Следствие 8.1. *Если f — голоморфная в области D функция, $f(z) \neq 0$ при $z \in D$ и выполняется условие (8.1), то для любого $c \in \mathbb{C}$ в области D можно выделить регулярную ветвь функции $(f(z))^c = e^{c \ln f(z)}$.*

Следствие 8.2. *Если f — голоморфная в односвязной области D функция и $f(z) \neq 0$ при $z \in D$, то в D можно выделить регулярные ветви функций $\ln f(z)$ и $(f(z))^c$, $c \in \mathbb{C}$.*

Действительно, поскольку D — односвязная область, а $f'(z)/f(z)$ является голоморфной в D функцией, то в силу теоремы Коши

$$\int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой γ, расположенной в D. Это означает выполнение условия (8.1) и возможность выделения регулярных ветвей функций $\ln f(z)$ и $(f(z))^c$, $c \in \mathbb{C}$.

Замечание 8.1. В условиях теоремы 8.1 регулярную ветвь $\ln f(z)$ в области D можно представить формулой

$$\ln f(z) \;=\; \ln f(a) + \int\limits_{\gamma_z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta, \tag{8.2}$$

где a — фиксированная точка области D, $\ln f(a)$ — некоторое значение из множества $Ln\{f(a)\}$ и γ_z — кусочно-гладкая кривая, соединяющая точку a с точкой z в области D.

Действительно, регулярная ветвь $\ln f(z)$ в области D выделяется как первообразная функции $f'(z)/f(z)$. С другой стороны, при доказательстве теоремы 4.1 было показано, что первообразная может быть получена интегрированием по кусочно-гладким кривым с началом в некоторой фиксированной точке $a \in D$ и с концом в текущей точке $z \in D$. Кроме того, учитывая геометрический смысл интеграла от логарифмической производной

$$\int\limits_{\gamma_z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta \;=\; \ln\left|\frac{f(z)}{f(a)}\right| + i\Delta_{\gamma_z} \arg f(\zeta),$$

формулу (8.2) можно переписать в виде

$$\ln f(z) \;=\; \ln|f(z)| + i\left[\theta + \Delta_{\gamma_z} \arg f(\zeta)\right], \tag{8.3}$$

где θ — некоторое фиксированное значение $\arg f(a)$, т. е. $\theta \in \mathrm{Arg}\{f(a)\}$.

Замечание 8.2. Если D — односвязная область и $0 \notin D$, то в области D можно определить $\ln z$ по формуле

$$\ln z \;=\; \ln a + \int\limits_{\gamma_z} \frac{d\zeta}{\zeta} \;=\; \ln|z| + i\left[\theta + \Delta_{\gamma_z} \arg \zeta\right],$$

где $a \in D$, $\ln a \in \mathrm{Ln}\{a\}$, γ_z — кусочно-гладкая кривая, соединяющая точки a и z в D и $\theta \in \mathrm{Arg}\{a\}$.

Замечание 8.3. Все регулярные ветви $\ln f(z)$ в области D отличаются друг от друга на аддитивную постоянную $2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть $F_1(z)$ и $F_2(z)$ — две голоморфные в области D функции, удовлетворяющие условию

$$e^{F_1(z)} \;\equiv\; e^{F_2(z)} \;\equiv\; f(z).$$

Тогда $e^{F_1(z)-F_2(z)} \equiv 1$ и, следовательно,

$$F_1(z) - F_2(z) \;\equiv\; k(z)\cdot 2\pi i,$$

где $k(z) \in \mathbb{Z}$ для всех $z \in D$. Однако, из этого равенства видно, что $k(z)$ — непрерывная функция, принимающая только целые значения. Это возможно, как следует из леммы ниже, лишь в случае, когда $k(z)$ тождественно постоянна, т. е. $k(z) \equiv k$.

Лемма 8.1. *Пусть $k(z)$ — непрерывная в области D функция, которая принимает значения из множества $K = \{w_j : j \in \mathbb{Z}^*\}$, $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}$, удовлетворяющего условию $|w_i - w_j| \geqslant d > 0$ для всех $i \neq j$. Тогда $k(z) \equiv \mathrm{const}$.*

Доказательство. Фиксируем $a \in D$ и через G_1 обозначим множество тех точек $z \in D$, для которых $k(z) = k(a)$. Пусть также $G_2 = D \setminus G_1$. В силу непрерывности функции $k(z)$ каждая точка z_0 из G_1 входит в это множество с некоторой окрестностью. Действительно, для $\varepsilon \in (0, d/2)$ найдётся $\delta > 0$ такое, что $|k(z) - k(z_0)| < \varepsilon$ при $z \in \mathcal{O}_\delta(z_0)$. Поскольку $k(z_0) = k(a)$ и $\varepsilon < d/2$, то также должно выполняться равенство $k(z) = k(a)$ и, следовательно, $\mathcal{O}_\delta(z_0) \subset G_1$. Таким образом, G_1 — открытое множество. Аналогично устанавливается, что и G_2 является открытым множеством. Однако, $G_1 \cap G_2 = \varnothing$ и $D \subset G_1 \cup G_2$. В силу связности D одно из множеств G_1 или G_2 должно быть пустым. По условию $a \in G_1$. Следовательно, $G_2 = \varnothing$ и $D = G_1$ т. е. $k(z) \equiv k(a)$. $\square$

Теорема 8.2. *Пусть f — голоморфная в области D функция и $f(z) \neq 0$ при $z \in D$. Тогда для натурального числа n в области D можно выделить регулярную ветвь $\sqrt[n]{f(z)}$ в том и только том случае, если для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой γ, расположенной в D, выполняется условие*

$$J(f(\gamma), 0) = k \cdot n, \quad \text{или, что эквивалентно,} \quad \Delta_\gamma \arg f(z) = k \cdot n \cdot 2\pi, \qquad (8.4)$$

где $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Допустим вначале, что $g(z)$ — регулярная ветвь $\sqrt[n]{f(z)}$ в области D, т. е. g голоморфна в D и $(g(z))^n \equiv f(z)$. Тогда $g(z) \neq 0$ в D и из равенства $f'(z) = n(g(z))^{n-1} g'(z)$ следует

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = n \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Если γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая в области D, то $\Gamma = f(\gamma)$ и $\Gamma^* = g(\gamma)$ также будут замкнутыми кусочно-гладкими кривыми, которые не проходят через начало координат. Из полученного выше равенства получаем

$$J(f(\gamma), 0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz = n J(\Gamma^*, 0),$$

т. е. выполняется условие (8.4), поскольку $J(\Gamma^*, 0)$ является целым числом.

Обратно, допустим, что условие (8.4) выполняется для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой γ, расположенной в области D. Фиксируем в области D точку a и некоторое значение $g(a) \in \{(f(a))^{1/n}\}$. Определим в области D функцию

$$g(z) = g(a) \exp\left\{ \frac{1}{n} \int\limits_{\gamma_z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta \right\},$$

где γ_z — кусочно-гладкая кривая, соединяющая точки a и z в области D. Покажем, что $g(z)$ корректно определена, голоморфна в D и выполняется равенство $(g(z))^n = f(z)$ для всех $z \in D$.

Для корректности определения $g(z)$ нам нужно показать, что её значение не зависит от выбора кусочно-гладкой кривой γ_z, соединяющей точки a и z. Пусть γ_z^* — другая такая кривая. Тогда $\gamma = \gamma_z - \gamma_z^*$ будет замкнутой кусочно-гладкой кривой в D. По условию теоремы

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta \;=\; J(f(\gamma),0) \;=\; k\cdot n,$$

где $k\in\mathbb{Z}$. В силу периодичности экспоненты

$$\exp\left\{\frac{1}{n}\int\limits_{\gamma}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta\right\} \;=\; e^{2k\pi i} \;=\; 1.$$

Используя свойство аддитивности интеграла, получаем

$$\exp\left\{\frac{1}{n}\int\limits_{\gamma_z}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta\right\}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{n}\int\limits_{\gamma_z^*}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta\right\} \;=\; 1,$$

откуда следует корректность определения функции $g(z)$.

Для доказательства голоморфности функции $g(z)$ выберем произвольно точку $z_0\in D$ и окрестность $\mathcal{O}_r(z_0)\subset D$. Поскольку $\mathcal{O}_r(z_0)$ является односвязной областью, а функция $f'(z)/f(z)$ голоморфна, то $(f'(z)/f(z))dz$ — полный дифференциал в $\mathcal{O}_r(z_0)$. Первообразную h для $f'(z)/f(z)$ в $\mathcal{O}_r(z_0)$ можно определить равенством

$$h(z) \;=\; \int\limits_{[z_0,z]}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta.$$

Выбирая $\gamma_z=\gamma_{z_0}+[z_0,z]$, приходим к равенству

$$g(z) \;=\; g(z_0)e^{\frac{1}{n}h(z)},$$

откуда следует голоморфность функции g в $\mathcal{O}_r(z_0)$. Поскольку точка z_0 выбиралась произвольно, то g голоморфна в области D. Из представления $g(z)$ в окрестности $\mathcal{O}_r(z_0)$ следует также, что

$$g'(z) \;=\; \frac{1}{n}g(z)h'(z) \;=\; \frac{1}{n}g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Далее заметим, что функция $f(z)(g(z))^{-n}$ является голоморфной в области D и в точке $z=a$ принимает значение 1. Поскольку

$$\begin{aligned}\left[f(z)(g(z))^{-n}\right]' \;&=\; f'(z)(g(z))^{-n} - nf(z)(g(z))^{-n-1}g'(z)\\ &=\; (g(z))^{-n}\left[f'(z)-n\frac{g'(z)}{g(z)}f(z)\right] \;=\; 0\end{aligned}$$

для всех $z\in D$, то $f(z)(g(z))^{-n}\equiv 1$ и $(g(z))^n\equiv f(z)$. $\square$

Замечание 8.4. В условиях теоремы 8.2 регулярную ветвь $g(z)$ функции $\sqrt[n]{f(z)}$ в области D можно получить по формуле

$$g(z) = g(a)\exp\left\{\frac{1}{n}\int\limits_{\gamma_z}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta\right\}, \tag{8.5}$$

где $a \in D$, $g(a) \in \{(f(a))^{1/n}\}$ и γ_z — кусочно-гладкая кривая, соединяющая в области D точки a и z. Принимая во внимание геометрический смысл интеграла от логарифмической производной функции f, представление регулярной ветви $\sqrt[n]{f(z)}$ можно переписать в виде

$$g(z) = |f(z)|^{1/n}\exp\left\{\frac{i}{n}\left(\theta + \Delta_{\gamma_z}\arg f(\zeta)\right)\right\}, \tag{8.6}$$

где $\theta \in \operatorname{Arg}\{f(a)\}$.

Замечание 8.5. Все регулярные ветви функции $\sqrt[n]{f(z)}$ в области D отличаются друг от друга множителем $e^{i2k\pi/n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Доказательство. Действительно, если $g_1(z)$ и $g_2(z)$ — две регулярные ветви функции $\sqrt[n]{f(z)}$, то

$$\left(\frac{g_1(z)}{g_2(z)}\right)^n \equiv 1,$$

откуда получаем

$$g_1(z) \equiv \varkappa(z)g_2(z),$$

где $\varkappa(z) \in \{e^{i2k\pi/n}\colon k = 0, 1, \ldots, n-1\}$. Из леммы 8.1 следует, что $\varkappa(z) \equiv \text{const}$, и утверждение доказано. $\square$

Пример 2. *Исследовать вопрос существования регулярных ветвей многозначной функции $\sqrt[4]{z^3(z+1)}$ в области $D = \mathbb{C}\setminus E$, где E — компактное связное множество, содержащее точки $z = 0$ и $z = -1$ (например, $E = [-1, 0]$).*

Нам нужно проверить выполнимость условий теоремы 8.2 для функции $f(z) = z^3(z+1)$, $n = 4$, и области $D = \mathbb{C} \setminus E$. Поскольку точки $z = 0$ и $z = -1$ не принадлежат области D, то $f(z) \neq 0$ при $z \in D$. Далее, пусть γ — замкнутая кусочно-гладкая кривая, расположенная в D. Рассматривая функцию f как произведение $f(z) = f_1(z)f_2(z)$, где $f_1(z) = z^3$ и $f_2(z) = z+1$, и применяя логарифмическое свойство индекса, получаем

$$J(f(\gamma), 0) = J(f_1(\gamma), 0) + J(f_2(\gamma), 0).$$

Заметим теперь, что

$$J(f_1(\gamma), 0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}dz = \frac{3}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{z} = 3J(\gamma, 0), \quad J(f_2(\gamma), 0) = J(\gamma, -1),$$

откуда находим выражение для $J(f(\gamma), 0)$:

$$J(f(\gamma), 0) = 3J(\gamma, 0) + J(\gamma, -1).$$

В силу связности множества E точки $z = 0$ и $z = -1$ принадлежат одной и той же компоненте связности $\mathbb{C} \setminus \gamma$ и по теореме 4.4 имеет место равенство

$$J(\gamma, 0) \,=\, J(\gamma, -1) \,=\, k,$$

где $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом,

$$J(f(\gamma), 0) \,=\, 3k + k \,=\, 4k,$$

т. е. условие (8.4) выполнено и в области $\mathbb{C} \setminus E$ можно выделить регулярную ветвь многозначной функции $\sqrt[4]{z^3(z+1)}$. $\square$

8.2. Разложение в ряды регулярных ветвей логарифма и корня. Рассмотрим теперь вопрос представления рядами Тейлора и Лорана регулярных ветвей (когда они существуют) многозначных функций $\ln f(z)$ и $(f(z))^a$, $a \in \mathbb{C}$. Когда вводились элементарные функции, было показано, что для регулярной ветви $\ln(1+z)$, выделяемой в единичном круге $\mathbb{D}$ условием $\ln(1+z)|_{z=0} = 0$, имеет место представление

$$\ln(1+z) \,=\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n.$$

Поскольку другие регулярные ветви отличаются лишь слагаемым $2k\pi i$, то для них тейлоровское разложение в $\mathbb{D}$ будет иметь вид

$$\ln_{(k)}(1+z) \,=\, 2k\pi i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n,$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Рассмотрим теперь функцию $(1+z)^a$, где $a \in \mathbb{C}$. Её регулярные ветви в единичном круге $\mathbb{D}$ определяются через регулярные ветви логарифма

$$h_k(z) \,=\, e^{a \ln_{(k)}(1+z)}.$$

Пусть $h(z)$ — ветвь, которая соответствует значению $k = 0$, т. е. выделяется условием $h(0) = 1$. Тогда все остальные ветви будут отличаться лишь множителем

$$h_k(z) \,=\, e^{ia2\pi k} h(z),$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Найдём разложение в ряд Тейлора ветви $h(z)$. Для вычисления коэффициентов ряда Тейлора воспользуемся равенствами

$$h'(z) \,=\, \frac{a}{1+z} h(z), \qquad h''(z) \,=\, \frac{a(a-1)}{(1+z)^2} h(z), \ldots,$$
$$h^{(n)}(z) \,=\, \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{(1+z)^n} h(z), \ldots$$

и условием $h(0) = 1$. Таким образом,

$$h(z) \,=\, \sum_{n=0}^{\infty} C_a^n z^n, \quad \text{где} \quad C_a^n \,=\, \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} \qquad (C_a^0 \,=\, 1).$$

Далее, в области $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$ многозначная функция $\ln\frac{1-z}{1+z}$ имеет имеет регулярные ветви. Действительно, функция $f(z)=(1-z)/(1+z)$ в этой области в нуль не обращается. Кроме того, для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\gamma\subset\mathbb{C}\setminus[-1,1]$ имеем

$$\begin{aligned} J(f(\gamma),0) \,&=\, \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz \,=\, \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{2dz}{z^2-1} \\ &=\, \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{z-1}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{z+1} \,=\, J(\gamma,1)-J(\gamma,-1). \end{aligned}$$

Поскольку точки $z=1$ и $z=-1$ расположены в одной и той же компоненте связности множества $\mathbb{C}\setminus\gamma$, то $J(\gamma,-1)=J(\gamma,1)$ и условия теоремы 8.1 выполнены. Следовательно, в $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$ выделяются ветви функции $\ln\frac{1-z}{1+z}$. Но тогда во внешности единичного круга (как в кольцевой области) каждая ветвь должна иметь разложение в ряд Лорана.

Пусть $g(z)$ — некоторая ветвь многозначной функции $\ln\frac{1-z}{1+z}$. Тогда

$$g'(z) \,=\, \frac{2}{z^2-1} \,=\, 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{2n}}$$

и ряд в правой части этого равенства сходится во внешности единичного круга. Сумма почленно проинтегрированного ряда

$$S(z) \,=\, -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)z^{2n-1}}$$

представляет собой голоморфную во внешности единичного круга функцию. При этом $(g(z)-S(z))'\equiv 0$ и, следовательно, $g(z)-S(z)\equiv\mathrm{const}$. Заметим теперь что $(1-z)/(1+z)\to -1$ при $z\to\infty$, т. е. ветви функции $\ln\frac{1-z}{1+z}$ имеют в бесконечно удалённой точке устранимую особенность, а их пределы принадлежат множеству $\mathrm{Ln}\{-1\}$, т. е. имеют вид $i(\pi+2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$. С другой стороны, $S(z)\to 0$ при $z\to\infty$. В результате приходим к разложению в ряд Лорана ветвей $\ln\frac{1-z}{1+z}$:

$$\ln_{(k)}\frac{1-z}{1+z} \,=\, i(2k+1)\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n-1}z^{-(2n-1)}, \qquad k\in\mathbb{Z}.$$

Для натурального $n\geqslant 2$ рассмотрим в $\mathbb{C}\setminus[-1,0]$ многозначную функцию

$$\sqrt[n]{z^{n-1}(z+1)}.$$

Как и в примере 2 устанавливается существование регулярных ветвей этой функции. Найдём разложение в ряд Лорана ветви, которая принимает положительные значения при $z=x>1$. Замечая, что

$$\sqrt[n]{z^{n-1}(z+1)} \,=\, z\left(1+\frac{1}{z}\right)^{1/n},$$

где в качестве $(1+\frac{1}{z})^{1/n}$ рассматривается регулярная ветвь во внешности единичного круга, принимающая положительные значения при $z = x > 1$, и используя разложение $(1+z)^a$ в единичном круге, получаем

$$\sqrt[n]{z^{n-1}(z+1)} = z\sum_{m=0}^{\infty} C_{1/n}^m \frac{1}{z^m} = \sum_{m=0}^{\infty} C_{1/n}^m \frac{1}{z^{m-1}}.$$

Для других ветвей разложение имеет вид

$$\left(\sqrt[n]{z^{n-1}(z+1)}\right)_{(k)} = e^{i2k\pi/n}\sum_{m=0}^{\infty} C_{1/n}^m z^{-(m-1)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Пример 3. *Вычислить интеграл*

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(2-x)}}.$$

Как и в примере 2 устанавливается существование регулярных ветвей многозначной функции $\sqrt[3]{z^2(2-z)}$ в области $\mathbb{C}\setminus[0,2]$. Фиксируем $R > 2$ и определим ветвь по формуле

$$g(z) = |z^2(2-z)|^{1/3} \exp\left\{\frac{i}{3}\left(\pi + \Delta_{\gamma_z} \arg\zeta^2(2-\zeta)\right)\right\}, \tag{8.7}$$

где π — одно из значений $\arg(R^2(2-R)) = \arg(-1)$ а γ_z — кусочно-гладкая кривая, соединяющая R с точкой z внутри области $\mathbb{C}\setminus[0,2]$. Для малого $\varepsilon > 0$ рассмотрим отрицательно ориентированные окружности C_1^ε и C_2^ε радиуса ε с центрами в точках $z = 0$ и $z = 2$, соответственно, отрезок $\lambda_\varepsilon^+ = [\varepsilon, 2-\varepsilon]$ и такой же отрезок λ_ε^- с противоположной ориентацией. Тогда $\lambda_\varepsilon^+ + C_2^\varepsilon + \lambda_\varepsilon^- + C_1^\varepsilon$ можно рассматривать как положительно ориентированную границу ∂D_ε внешней области D_ε.

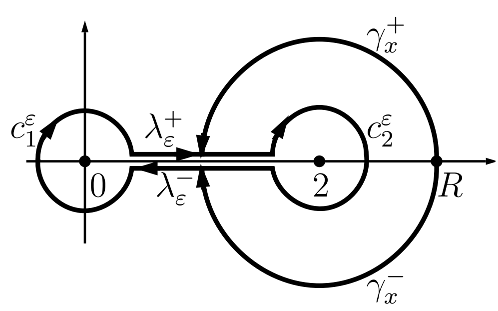

Рис. 4. К примеру 3

Поскольку в D_ε нет особых точек функции $1/g(z)$, то по теореме о вычетах

$$\int\limits_{\partial D_\varepsilon} \frac{dz}{g(z)} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{1}{g(z)}. \tag{8.8}$$

Для вычисления вычета в правой части равенства (8.8) заметим, что функция $1/g(z)$ во внешности круга $|z| > 2$ совпадает с одной из ветвей многозначной функции

$$e^{-i\pi/3}\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}\right)^{-1/3},$$

которые имеют следующее разложение в ряд Лорана

$$\begin{aligned} e^{-i\pi/3}\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}\right)^{-1/3}_{(k)} &= e^{-i\pi/3}\frac{1}{z}e^{-i2k\pi/3}\sum_{m=0}^{\infty} C^m_{-1/3}\frac{(-2)^m}{z^m} \\ &= e^{-i(2k+1)\pi/3}\sum_{m=0}^{\infty} C^m_{-1/3}\frac{(-2)^m}{z^{m+1}}, \end{aligned}$$

$k = 0, 1, 2$. Поскольку $C^m_{-1/3}(-2)^m > 0$ при всех $m = 0, 1, 2, \ldots$, то сумма ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} C^m_{-1/3}\frac{(-2)^m}{z^{m+1}}$$

принимает положительное значение при $z = R$. С другой стороны, $1/g(R)$ имеет аргумент $-\pi/3$. Следовательно, во внешности круга $|z| > 2$ имеет место разложение

$$\frac{1}{g(z)} = e^{-i\pi/3}\sum_{m=0}^{\infty} C^m_{-1/3}\frac{(-2)^m}{z^{m+1}}.$$

Отсюда находим

$$\operatorname*{res}_{z=\infty}\frac{1}{g(z)} = -c_{-1} = -e^{-i\pi/3}.$$

Для вычисления интеграла в левой части равенства (8.8) нужно выяснить, какие значения принимает функция g на λ^+_ε — верхней стороне отрезка $[\varepsilon, 2-\varepsilon]$ и на его нижней стороне λ^-_ε. Пусть γ^+_x — дуга, соединяющая точки R и $x \in \lambda^+_\varepsilon$, а γ^-_x — дуга, соединяющая R и $x \in \lambda^-_\varepsilon$. Соответствующие значения функции g будем обозначать $g(x+i0)$ и $g(x-i0)$, соответственно. Замечая, что

$$\Delta_{\gamma^+_x}\arg z^2(2-z) = 2\Delta_{\gamma^+_x}\arg z + \Delta_{\gamma^+_x}\arg(z-2) = \pi, \quad \Delta_{\gamma^-_x}\arg z^2(2-z) = -\pi,$$

получаем

$$g(x+i0) = \sqrt[3]{x^2(2-x)}e^{i2\pi/3}, \qquad g(x-i0) = \sqrt[3]{x^2(2-x)}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\lambda^+_\varepsilon}\frac{dz}{g(z)} = e^{-i2\pi/3}\int\limits_{\varepsilon}^{2-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(2-x)}}, \qquad \int\limits_{\lambda^-_\varepsilon}\frac{dz}{g(z)} = -\int\limits_{\varepsilon}^{2-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(2-x)}}.$$

Далее,

$$\left|\int\limits_{C_1^\varepsilon} \frac{dz}{g(z)}\right| \leqslant \int\limits_{C_1^\varepsilon} \frac{|dz|}{|z^2(2-z)|^{1/3}} \leqslant \frac{2\pi\varepsilon}{\varepsilon^{2/3}(2-\varepsilon)^{1/3}} \to 0,$$

$$\left|\int\limits_{C_2^\varepsilon} \frac{dz}{g(z)}\right| \leqslant \frac{2\pi\varepsilon}{(2-\varepsilon)^{2/3}\varepsilon^{1/3}} \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$. Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\partial D_\varepsilon} \frac{dz}{g(z)} = \left(e^{-i2\pi/3} - 1\right) I$$

и равенство (8.8) в пределе при $\varepsilon \to 0$ принимает вид

$$\left(e^{-i2\pi/3} - 1\right) I = -2\pi i e^{-i\pi/3}.$$

В результате получаем

$$I = \frac{2\pi i e^{-i\pi/3}}{1 - e^{-i2\pi/3}} = \frac{2\pi i}{e^{i\pi/3} - e^{-i\pi/3}} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

§ 9. Принцип аргумента и отображающие свойства голоморфных функций

Пусть функция f голоморфна в области D, за исключением изолированных особых точек, которые являются её полюсами. Если K — компактное подмножество области D, то на K может быть лишь конечное число полюсов. В противном случае нашлась бы предельная точка полюсов на K, что противоречило бы условию наличия лишь изолированных особых точек. Как было показано ранее, каждый полюс имеет конечную кратность. Пусть $b_1, \ldots, b_m$ — полюсы функции f, попадающие на K, а $q_1, \ldots, q_m$ — их кратности. Тогда $P = q_1 + \ldots + q_m$ называется *числом полюсов* функции f на множестве K *с учётом их кратности.* Если $f(z) \not\equiv 0$, то её нули также будут изолированными и иметь конечную кратность. Следовательно, на K будет расположено лишь конечное их число. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — нули функции f, попадающие на K, а $s_1, \ldots, s_n$ — их кратности. Тогда $N = s_1 + \ldots + s_n$ называется *числом нулей* функции f на множестве K *с учётом их кратности.*

Теорема 9.1. *[Принцип аргумента.] Пусть D — область, ограниченная циклом γ, и f — голоморфная на $\overline{D} = D \cup \gamma$ (т. е. в некоторой области, содержащей $\overline{D}$,) функция, за исключением изолированных особых точек, которые являются её полюсами. Допустим также, что нули и полюсы функции f не попадают на γ. Тогда число N её нулей и число P её полюсов в области D с учётом их кратности удовлетворяют соотношению*

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = J(f(\gamma), 0) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \arg f(z). \tag{9.1}$$

Доказательство. Поскольку замыкание $\overline{D}$ области D является компактным множеством, то в D содержится лишь конечное число нулей и полюсов функции f. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — её нули с кратностями $s_1, \ldots, s_n$, а $b_1, \ldots, b_m$ — её полюсы с кратностями $q_1, \ldots, q_m$, соответственно. Тогда $N = s_1 + \ldots + s_n$ и $P = q_1 + \ldots + q_m$. Рассмотрим функцию

$$g(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)^{-s_k} \prod_{k=1}^{m} (z - b_k)^{q_k} f(z).$$

Очевидно, что изолированные особые точки $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ функции g являются устранимыми. Следовательно, функция g является голоморфной и не обращается в нуль на $\overline{D}$. Из равенства

$$f(z) = (z - a_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (z - a_n)^{s_n} (z - b_1)^{-q_1} \cdot \ldots \cdot (z - b_m)^{-q_m} g(z)$$

следует, что

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{z - a_k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{q_k}{z - b_k} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Поскольку $g(z) \neq 0$ на $\overline{D}$, то функция $g'(z)/g(z)$ является голоморфной на $\overline{D}$ и по теореме Коши

$$\int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^{n} s_k J(\gamma, a_k) - \sum_{k=1}^{m} q_k J(\gamma, b_k) = N - P$$

и теорема доказана. □

На практике принцип аргумента чаще всего применяется через следующий результат.

Теорема 9.2. *[Руше] Пусть D — область, ограниченная циклом γ, а f и φ — голоморфные на $\overline{D} = D \cup \gamma$ функции, удовлетворяющие условию $|\varphi(z)| < |f(z)|$ при $z \in \gamma$. Тогда f и $f + \varphi$ имеют в D одинаковое число нулей с учётом их кратности.*

Доказательство. По условию теоремы $f(z) \neq 0$ и $f(z) + \varphi(z) \neq 0$ при $z \in \gamma$. Следовательно, функция

$$F(z) = \frac{f(z) + \varphi(z)}{f(z)}$$

является голоморфной на $\overline{D}$, за исключением, быть может, конечного числа полюсов, расположенных в D. Кроме того, F не обращается в нуль на γ. В действительности, полюсами функции F могут быть лишь нули функции f. Пусть N_1 — общее число нулей функции f, а N_2 — общее число нулей функции $f + \varphi$, в области D с учётом их кратности. Если N — общее число нулей, а

P — общее число полюсов, функции F в области D с учётом их кратности, то $N - P = N_2 - N_1$ и по принципу аргумента

$$N_2 - N_1 = J(F(\gamma), 0).$$

Однако, из равенства $F(z) = 1 + \varphi(z)/f(z)$ и условия $|\varphi(z)/f(z)| < 1$ при $z \in \gamma$ видно, что $F(\gamma)$ расположена в круге $|w - 1| < 1$. Следовательно, точка $w = 0$ расположена во внешней компоненте связности множества $\mathbb{C} \setminus F(\gamma)$ и $J(F(\gamma), 0) = 0$. Это влечёт равенство $N_1 = N_2$. $\square$

Теорема 9.3. *[Основная теорема алгебры.] Каждый многочлен n-той степени $P(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_0$ имеет в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ ровно n нулей с учётом их кратности.*

Доказательство. Пусть $f(z) = z^n$ и $\varphi(z) = c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_0$. Тогда

$$\left|\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right| = \frac{1}{|z|}\left|c_{n-1} + \frac{c_{n-2}}{z} + \ldots + \frac{c_0}{z^{n-1}}\right| \to 0$$

при $z \to \infty$. Поэтому найдётся такое $R > 0$, что $|\varphi(z)/f(z)| < 1$ при $|z| \geqslant R$. Следовательно, на окружности $\Gamma_R \colon z = Re^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, для функций f и φ выполняются условия теоремы Руше́ и функции $f(z) = z^n$ и $f(z) + \varphi(z) = P(z)$ будут иметь в круге $|z| < R$ одинаковое число нулей с учётом их кратности. Однако $z = 0$ является нулём кратности n для $f(z) = z^n$. Вне этого круга полином P в нуль не обращается, поскольку $|\varphi(z)| < |f(z)|$ при $|z| \geqslant R$. $\square$

Следующий результат является усилением теоремы об обратном отображении.

Теорема 9.4. *[О локальной структуре отображения.] Пусть f голоморфна в области D и $f(z_0) = w_0$, $z_0 \in D$. Допустим также, что функция $f(z) - w_0$ имеет в точке z_0 нуль порядка n, т. е. $f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ и $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Тогда найдутся такие окрестности $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$, $r > 0$, и $\mathcal{O}_\varrho(w_0)$, $\varrho > 0$, что для любого $w^* \in \dot{\mathcal{O}}_\varrho(w_0)$ уравнение $f(z) = w^*$ имеет в $\mathcal{O}_r(z_0)$ ровно n различных корней.*

Доказательство. Поскольку $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, то $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$. В силу изолированности нулей непостоянной голоморфной функции найдётся окрестность $\mathcal{O}_r(z_0)$, которая содержится в D вместе со своим замыканием и такая, что функции $f(z) - w_0$ и $f'(z)$ не обращаются в нуль в $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$. Пусть $\gamma = \partial\mathcal{O}_r(z_0)$ — положительно ориентированная граница круга $\mathcal{O}_r(z_0)$ и $\Gamma = f(\gamma)$ — её образ при отображении посредством f. Замечая, что Γ не проходит через точку w_0, выберем число $\varrho > 0$ меньше, чем расстояние от w_0 до Γ. Фиксируем произвольно w^* из $\dot{\mathcal{O}}_\varrho(w_0)$. Из условия выбора ϱ следует, что

$$|w_0 - w^*| < |f(z) - w_0|$$

для всех $z \in \gamma$. Но тогда по теореме Руше́ функции

$$f(z) - w_0 \qquad \text{и} \qquad f(z) - w^* = (f(z) - w_0) + (w_0 - w^*)$$

имеют в $\mathcal{O}_r(z_0)$ одинаковое число нулей с учётом их кратности. Однако, $f(z)-w_0$ имеет в $\mathcal{O}_r(z_0)$ один нуль $z = z_0$ порядка n. Поскольку $f'(z) \neq 0$ при $z \in \dot{\mathcal{O}}_r(z_0)$, то все нули функции $f(z)-w^*$ в окрестности $\mathcal{O}_r(z_0)$ являются простыми. Таким образом, в $\mathcal{O}_r(z_0)$ содержится ровно n точек $z_1, \ldots, z_n$, которые являются решениями уравнения $f(z) = w^*$. □

Напомним, что голоморфная в области D функция f называется однолистной в этой области, если $f(z_1) \neq f(z_2)$ при $z_1 \neq z_2$ для любой пары точек z_1, z_2 из D. Функция f называется локально однолистной в D, если для каждой точки $z_0 \in D$ найдётся окрестность $\mathcal{O}_r(z_0)$, в которой f однолистна.

Замечание 9.1. Из теоремы о локальной структуре отображения следует, что необходимым и достаточным условием локальной однолистности функции f в области D является необращение в нуль производной, т. е. условие $f'(z) \neq 0$ в D. Достаточность этого условия была доказана ранее, как следствие теоремы об обратном отображении.

Теорема 9.5. *[Принцип открытости или сохранения области.] Непостоянная голоморфная функция f переводит открытые множества в открытые, а область — в область.*

Доказательство. Пусть f голоморфна в области D и $f(D) = G$. Если $w_0 \in G$, то в D найдётся такое z_0, что $f(z_0) = w_0$. Поскольку $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$, то найдётся такое натуральное n, что $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Но тогда по теореме 9.4 найдутся окрестности $\mathcal{O}_r(z_0)$ и $\mathcal{O}_\varrho(w_0)$ такие, что $\mathcal{O}_\varrho(w_0) \subset f(\mathcal{O}_r(z_0)) \subset G$. Следовательно, G — открытое множество. Связность множества G следует из того, что при непрерывных отображениях связные множества переходят в связные. □

Теорема 9.6. *[Принцип максимума модуля.] Пусть f — непостоянная голоморфная в области D функция. Тогда максимум модуля $|f(z)|$ а также максимумы и минимумы вещественной $\mathrm{Re}\, f(z)$ и мнимой $\mathrm{Im}\, f(z)$ частей функции f не могут достигаться во внутренних точках области D.*

Доказательство. Допустим, что в точке $z_0 \in D$ достигается максимум модуля функции f, т. е. $|f(z)| \leqslant |f(z_0)|$ для всех $z \in D$. Тогда $G = f(D)$ должна содержаться в круге $|w| \leqslant |f(z_0)|$. С другой стороны, точка $w_0 = f(z_0)$ лежит на границе этого круга, а по теореме 9.5 G является открытым множеством и, следовательно, найдётся такое $\varrho > 0$, что $\mathcal{O}_\varrho(w_0) \subset G$. Однако в $\mathcal{O}_\varrho(w_0)$ найдётся точка w_1, для которой $|w_1| > |w_0|$, а в области D найдётся точка z_1, для которой $f(z_1) = w_1$, т. е. $|f(z_1)| > |f(z_0)|$. Получили противоречие предположению о максимальности $|f(z_0)|$. Аналогично устанавливаются утверждения о максимуме и минимуме вещественной и мнимой частей функции f. □

Принцип максимума модуля имеет многочисленные приложения в анализе. Например, решение задачи о том, в какой точке квадрата достигается максимум произведения четырех расстояний от точки до вершин квадрата, существенно упрощается с применением принципа максимума модуля голоморфной функции. Следующая теорема также является следствием этого принципа.

Теорема 9.7. *[Лемма Шварца.] Пусть голоморфная в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция f удовлетворяет условиям: $f(0) = 0$ и $|f(z)| \leqslant 1$ при $z \in \mathbb{D}$. Тогда для всех $z \in \mathbb{D}$ выполняется неравенство*

$$|f(z)| \leqslant |z| \tag{9.2}$$

и, кроме того,

$$|f'(0)| \leqslant 1. \tag{9.3}$$

При этом знак равенства в (9.2) при $z \neq 0$ или в (9.3) достигается лишь в случае $f(z) = e^{i\theta} z$, где $\theta \in \mathbb{R}$.

Доказательство. В силу сделанных в условии теоремы предположений функция $\varphi(z) = f(z)/z$ голоморфна в $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ и в точке $z = 0$ имеет устранимую особенность. Полагая $\varphi(0) = f'(0)$, получаем голоморфную в $\mathbb{D}$ функцию φ. При этом для каждого $r \in (0, 1)$ в силу принципа максимума модуля имеем

$$\max_{|z| \leqslant r} |\varphi(z)| = \max_{|z|=r} |\varphi(z)| = \frac{1}{r} \max_{|z|=r} |f(z)| \leqslant \frac{1}{r}.$$

Таким образом, если $z \in \mathbb{D}$ фиксировано, то для $r \in (|z|, 1)$ будет выполняться неравенство $|\varphi(z)| \leqslant 1/r$. Осуществляя в этом неравенстве предельный переход при $r \to 1$, получаем $|\varphi(z)| \leqslant 1$. Это эквивалентно неравенству $|f(z)| \leqslant |z|$. Кроме того, $|\varphi(0)| = |f'(0)| \leqslant 1$.

Допустим теперь, что для $z_0 \neq 0$ из $\mathbb{D}$ выполняется равенство $|f(z_0)| = |z_0|$. Это означало бы, что $|\varphi(z_0)| = 1$. Но тогда в силу принципа максимума модуля $\varphi(z) \equiv e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, или, что эквивалентно, $f(z) \equiv e^{i\theta} z$. В случае равенства в (9.3) выполнялось бы равенство $|\varphi(0)| = 1$ и мы снова приходим к виду функции $f(z) \equiv e^{i\theta} z$. $\square$

Конформность.

Рассмотрим голоморфную в области D функцию f. Допустим, что в точке $z_0 \in D$ не обращается в нуль производная $f'(z_0) \neq 0$. Тогда, как следует из теоремы о локальной структуре отображения, найдётся окрестность $\mathcal{O}_r(z_0)$, в которой f однолистна. Пусть $\gamma\colon z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, — гладкий путь (т. е. $z'(t) \neq 0$) в $\mathcal{O}_r(z_0)$, проходящий через точку z_0, т. е. $z(t_0) = z_0$ при некотором $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Его образ $\Gamma\colon w = f(z(t))$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, при отображении $w = f(z)$ также является гладким путём, проходящим через точку $w_0 = f(z_0)$. Действительно, $w'(t) = f'(t) z'(t) \neq 0$ при $t \in (\alpha, \beta)$. В частности,

$$w'(t_0) = f'(z_0) z'(t_0). \tag{9.4}$$

Исследуем значение этого равенства.

Вначале заметим, что $\Delta w = w(t) - w(t_0)$ — секущая для кривой Γ, проходящая через точку w_0, а $\Delta z = z(t) - z(t_0)$ — соответствующая секущая для кривой γ, проходящая через точку z_0. При этом $\Delta w = f'(z_0)\Delta z + o(|\Delta z|)$ и

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = |f'(z_0)|.$$

Геометрически это означает, что $|f'(z_0)|$ является коэффициентом искажения длины в точке z_0 при отображении f. Причём он не зависит от направления пути, проходящего через точку z_0, т, е. все пути в точке z_0 имеют один и тот же коэффициент искажения длины. Образно это можно сформулировать как то, что «бесконечно малая» окружность с центром в точке z_0 переходит в «бесконечно малую» окружность с центром в точке $w_0 = f(z_0)$. Таким образом, *геометрический смысл модуля производной* в точке — это коэффициент искажения длин в этой точке. Ранее мы видели, что $|f'(z_0)|^2$ является якобианом отображения $w = f(z)$, т. е. коэффициентом искажения площади.

Поскольку касательная к гладкой кривой является предельным положением секущей, то $\arg z'(t_0)$ выражает угол, который образует касательная к кривой γ в точке z_0 с положительным направлением вещественной оси. Аналогичное значение имеет $\arg w'(t_0)$ в w-плоскости. При соответствующем выборе ветви аргумента из равенства (9.4) получаем

$$\arg w'(t_0) \;=\; \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0).$$

Таким образом, *геометрический смысл* $\arg f'(z_0)$ — это угол поворота направления направления касательной к гладкой кривой γ в точке z_0 при отображении посредством f. Этот угол не зависит от выбора кривой γ, проходящей через точку z_0. Поэтому, если γ и γ^* — две кривые, проходящие через точку z_0 и пересекающиеся в этой точке под углом α, то их образы $\Gamma = f(\gamma)$ и $\Gamma^* = f(\gamma^*)$ будут пересекаться в точке w_0 под тем же углом α. Это свойство называют *консерватизмом углов* или *конформностью* отображения $w = f(z)$ в точке z_0.

Теорема 9.8. *Пусть $w = f(z)$ определена в области D и непрерывно дифференцируема в вещественном смысле. Тогда f является конформным в точке $z_0 \in D$ в том и только том случае, если она дифференцируема в комплексном смысле в этой точке и $f'(z_0) \neq 0$.*

Доказательство. Условие непрерывной дифференцируемости в вещественном смысле отображения $w = f(z)$ означает, что координатные функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, где $z = x + iy$, $w = u + iv$, имеют непрерывные частные производные. То, что из дифференцируемости f в комплексном смысле и условия $f'(z_0) \neq 0$ следует конформность (консерватизм углов) в точке z_0 было показано выше. Допустим теперь, что отображение f конформно в точке z_0. Если $\gamma\colon z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, — гладкий путь, проходящий через точку z_0, т. е. $z(t_0) = z_0$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$, то производную от функции $w = f(z(t))$ можно записать в виде

$$w'(t_0) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)y'(t_0),$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial x} \;=\; \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} \;=\; \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Выражая $x'(t)$ и $y'(t)$ через $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$, равенство для $w'(t_0)$ можно переписать в виде

$$w'(t_0) \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) z'(t_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\overline{z'(t_0)}.$$

Поскольку путь γ гладкий, то $z'(t_0) \neq 0$ и из последнего равенства получаем

$$\frac{w'(t_0)}{z'(t_0)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\overline{z'(t_0)}}{z'(t_0)}. \tag{9.5}$$

Конформность в точке z_0 отображения $w = f(z)$ означает, что $\arg\{w'(t_0)/z'(t_0)\}$ не зависит от $\arg z'(t_0)$. С другой стороны, выражение $\overline{z'(t_0)}/z'(t_0)$ принимает все значения $e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, когда меняется направление касательной $z'(t_0)$ к кривой γ в точке z_0 (при повороте γ в точке z_0). Поэтому из равенства (9.5) видно, что конформность отображения $w = f(z)$ в точке z_0 возможна лишь в случае выполнения равенства

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

которое эквивалентно условиям Коши—Римана. Кроме того, поскольку гладкие кривые преобразуются при отображении $w = f(z)$ в гладкие кривые, то выполняется условие $f'(z_0) \neq 0$. $\square$

Замечание 9.2. Из равенства (9.5) также следует, что условие независимости коэффициента искажения длины $|w'(t_0)/z'(t_0)|$ от направления пути γ влечёт одно из соотношений

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Первое из них, как было отмечено выше, эквивалентно условиям Коши—Римана. Второе соотношение выражает тот факт, что функция $\overline{f(z)}$ является дифференцируемой в комплексном смысле в точке z_0.

Конформность в расширенной комплексной плоскости.

При рассмотрении конформных отображений f областей в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ нужно распространить понятие конформности на случаи, когда область определения или область значений (или обе) отображения f содержат бесконечно удалённую точку.

Допустим вначале, что конечная точка a отображается посредством голоморфной функции f в бесконечно удалённую точку, т. е. $f(z) \to \infty$ при $z \to a$. Это означает, что $z = a$ является полюсом для функции f. Функция $g(z) = 1/f(z)$ будет иметь точку $z = a$ в качестве устранимой особой точки. Кроме того, полагая $g(a) = 0$, получаем голоморфную в окрестности точки a функцию g. Конформность отображения g (а, следовательно, и f) в точке a эквивалентна условию $g'(a) \neq 0$. Это означает, что функция f должна иметь в точке $z = a$ простой полюс. Таким образом, функция f будет однолистной и *конформной в* некоторой *окрестности полюса a* в том и только том случае, когда этот *полюс простой.*

Рассмотрим теперь случай, когда f голоморфна в окрестности бесконечно удалённой точки. Обсуждать вопрос конформности f в точке $z = \infty$ имеет смысл лишь при условии существования предела (конечного или бесконечного) функции $f(z)$ при $z \to \infty$. Допустим вначале, что этот предел конечный, т. е.

$f(z) \to w_0$ при $z \to \infty$ и $w_0 \in \mathbb{C}$. Другими словами, точка $z = \infty$ является устранимой особой точкой для функции f. Тогда функция $g(\zeta) = f(1/\zeta)$ также будет иметь в точке $\zeta = 0$ устранимую особенность. Полагая $g(0) = w_0$, мы получаем голоморфную в окрестности точки $\zeta = 0$ функцию g. Конформность функции g в точке $\zeta = 0$ эквивалентна условию $g'(0) \neq 0$. Перепишем это условие на функцию f. Поскольку

$$g'(0) = \lim_{\zeta \to 0} \frac{g(\zeta) - w_0}{\zeta} = \lim_{z \to \infty} z(f(z) - w_0) = -\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z),$$

то приходим к выводу: если $z = \infty$ является *устранимой особой точкой* для функции f, то отображение $w = f(z)$ будет однолистным и *конформным в* некоторой *окрестности бесконечно удалённой точки* в том и только том случае, если $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) \neq 0$.

Рассмотрим, наконец, случай $f(z) \to \infty$ при $z \to \infty$, т.е. когда $z = \infty$ является полюсом для функции f. В этом случае свойство конформности переносится на функцию $g(\zeta) = 1/f(1/\zeta)$ в точке $\zeta = 0$. Условие $g'(0) \neq 0$ в терминах функции f принимает вид

$$g'(0) = \lim_{\zeta \to 0} \frac{g(\zeta)}{\zeta} = \lim_{z \to \infty} \frac{z}{f(z)} \neq 0.$$

Это означает, что $z = \infty$ является простым полюсом для функции f.

§ 10. Целые и мероморфные функции

Функцию $f\colon \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, голоморфную во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, называют *целой функцией*. К целым функциям относятся полиномы, экспонента, синус, косинус и другие.

Теорема 10.1. *Пусть f — целая функция и для некоторых $M > 0$, $R > 0$ и целого неотрицательного m выполняется неравенство*

$$|f(z)| \leqslant M \cdot |z|^m$$

при $|z| > R$. Тогда f является многочленом степени не выше, чем m.

Доказательство. Поскольку f голоморфна во всей комплексной плоскости, то её ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

сходится во всей комплексной плоскости, а коэффициенты ряда можно вычислить по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz,$$

$n = 0, 1, \ldots$, где γ_r — положительно ориентированная окружность $|z| = r$. При этом значения c_n не зависят от выбора $r > 0$. Но тогда при $r > R$ будем иметь

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_r} \frac{|f(z)|}{r^{n+1}} |dz| \leqslant \frac{M r^m}{2\pi r^{n+1}} 2\pi r = M r^{m-n}.$$

Отсюда следует, что $c_n = 0$ при $n > m$, поскольку в этом случае $r^{m-n} \to 0$ при $r \to \infty$. Таким образом,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{m} c_n z^n,$$

т. е. f является полиномом степени не выше, чем m. $\square$

Следствие 10.1. *[Теорема Лиувилля.] Если целая функция ограничена, то она тождественно постоянна.*

Теорема Лиувилля имеет многочисленные приложения в различных областях анализа. В частности, с её использованием легко доказывается основная теорема алгебры о нулях полинома.

Бесконечно удалённая точка является единственной изолированной особой точкой целой функции. Характер особенности этой точки во многом определяет структуру целой функции. В частности, если $z = \infty$ является устранимой особой точкой, то целая функция по теореме Лиувилля должна быть тождественно постоянной. Если $z = \infty$ является полюсом, то разложение $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, которое одновременно является и рядом Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки, должно содержать лишь конечное число слагаемых. В этом случае f будет полиномом.

Определение 10.1. Целая функция f, у которой бесконечно удалённая точка является существенно особой точкой, называется *целой трансцендентной* функцией.

Примерами целых трансцендентных функций являются e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$. Доказанная ранее теорема Сохоцкого— Вейерштрасса говорит о сложном поведении целой трансцендентной функции в окрестности бесконечно удалённой точки: для любого $A \in \overline{\mathbb{C}}$ найдётся последовательность $z_n \to \infty$ такая, что $f(z_n) \to A$ при $n \to \infty$. Более сильный результат для целой трансцендентной функции даёт теорема Пикара.

Теорема 10.2. *[Пикара.] Пусть f — целая трансцендентная функция. Тогда в каждой окрестности бесконечно удалённой точки функция f принимает все комплексные значения, за исключением, быть может, одного.*

Другими словами, теорема Пикара утверждает, что если f — целая трансцендентная функция, то в любой окрестности бесконечно удалённой точки уравнение $f(z) = A$ для любого $A \in \mathbb{C}$, за исключением, быть может, одного, имеет бесконечно много решений. Поскольку целая функция e^z не обращается в нуль, то утверждение теоремы Пикара нельзя усилить. С другой стороны, теорема Пикара имеет другие формулировки, которые относят к так называемой большой теореме Пикара. В частности, любая функция в сколь угодно малой окрестности предельной точки её полюсов принимает все комплексные значения, за исключением, быть может, двух. Поскольку $\operatorname{tg} z \neq \pm i$, то этот результат также нельзя усилить.

Определение 10.2. Функция $f\colon \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ называется мероморфной, если она голоморфна в $\mathbb{C}$, за исключением, быть может, изолированных особых точек, являющихся полюсами.

Заметим, что целые функции составляют подкласс класса мероморфных функций. Другой важный подкласс мероморфных функций образуют рациональные функции. Отметим некоторые важные свойства рациональных функций.

Пусть $P(z) = a_m z^m + \ldots + a_0$, $a_m \neq 0$, — полином степени m и $Q(z) = b_n z^n + \ldots + b_0$, $b_n \neq 0$, — полином степени n. Допустим также, что $P(z)$ и $Q(z)$ не имеют общих множителей, а следовательно, общих нулей. Тогда наибольшее из чисел m и n будем называть *порядком* рациональной функции $P(z)/Q(z)$. Нули полинома $P(z)$ являются нулями и функции $R(z)$ с теми же кратностями, а нули полинома $Q(z)$ представляют собой полюсы функции $R(z)$ также с теми же кратностями. Кроме того, из представления

$$R(z) = \frac{z^m}{z^n}\frac{a_m + a_{m-1}/z + \ldots + a_0/z^m}{b_n + b_{n-1}/z + \ldots + b_0/z^n} = z^{m-n}R_1(z),$$

где $R_1(z) \to a_m/b_n \neq 0$ при $z \to \infty$, видно, что $z = \infty$ является нулём функции R кратности $n - m$, если $m < n$. В случае $m > n$ в точке $z = \infty$ функция R имеет полюс кратности $m - n$. Случай $m = n$ соответствует устранимой особой точке в $z = \infty$ и эта точка не является нулём функции R. Таким образом, рациональная функция имеет одинаковое число нулей и полюсов в $\overline{\mathbb{C}}$ с учётом их кратности. Это число совпадает с порядком рациональной функции.

Пусть теперь A — произвольное комплексное число. Тогда рациональная функция $R(z) - A$ имеет то же число полюсов в $\overline{\mathbb{C}}$ (они просто совпадают), что и $R(z)$. Следовательно, порядки этих рациональных функций совпадают и функция $R(z) - A$ имеет в $\overline{\mathbb{C}}$ ровно k нулей с учётом их кратности, где k — порядок рациональной функции $R(z)$. Другими словами, всякая рациональная функция $R(z)$ порядка k имеет в $\overline{\mathbb{C}}$ ровно k нулей и k полюсов, а также каждое уравнение $R(z) = A$ имеет в точности k корней.

Возвращаясь к общему классу мероморфных функций, заметим, что в каждом круге $|z| \leqslant R$ мероморфная функция может иметь лишь конечное число полюсов. В противном случае нашлась бы предельная точка полюсов. Накапливаться полюсы мероморфной функции могут лишь к бесконечно удалённой точке.

Теорема 10.3. *Пусть для мероморфной функции f бесконечно удалённая точка является полюсом или устранимой особой точкой. Тогда f — рациональная функция.*

Доказательство. По условию теоремы бесконечно удалённая точка является для f изолированной особой точкой. Поэтому найдётся такое $R > 0$, что в области $|z| > R$ других особых точек не будет. В круге $|z| \leqslant R$, как отмечалось выше, может содержаться лишь конечное число полюсов. Пусть это будут $a_1, \ldots, a_N$ и их кратности $m_1, \ldots, m_N$, соответственно. Тогда главные части лорановского разложения в окрестностях этих полюсов будут иметь вид

$$g_k(z) = c_{-m_k}^{(k)}(z - a_k)^{-m_k} + \ldots + c_{-1}^{(k)}(z - a_k)^{-1},$$

$k = 1, \ldots, N$. Если $z = \infty$ является полюсом кратности m, то главная часть ряда Лорана в окрестности бесконечно удалённой точки будет представлять собой полином $g(z) = c_1 z + \ldots + c_m z^m$. В случае, если $z = \infty$ является устранимой особой точкой, будем считать, что $g(z) \equiv 0$. Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi(z) = f(z) - g(z) - \sum_{k=1}^{N} g_k(z).$$

Она будет голоморфной в $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_N\}$, а все точки $a_1, \ldots, a_N$ и $z = \infty$ будут для φ устранимыми особыми точками. Но тогда по теореме Лиувилля $\varphi(z) \equiv c_0$, т. е. является постоянной функцией. В результате получаем

$$f(z) = c_0 + g(z) + \sum_{k=1}^{N} g_k(z),$$

т. е. f — рациональная функция. □

Замечание 10.1. Из доказательства теоремы следует также, что любая рациональная функция представима в виде суммы полинома и элементарных дробей вида $A/(z-a)^k$.

Следующий результат, известный как теорема Коши, показывает, что при определенных условиях мероморфную функцию можно представить в виде суммы ряда элементарных дробей.

Теорема 10.4. *Пусть мероморфная функция f и последовательность замкнутых жордановых кусочно-гладких кривых Γ_n, ограничивающих области D_n, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют следующим условиям:*

(i) $0 \in D_1$ *и* $D_n \subset D_{n+1}$ *при всех* $n = 1, 2, \ldots$;

(ii) $d_n = \min\{|z|\colon\ z \in \Gamma_n\} \to \infty$ *при* $n \to \infty$;

(iii) $\sup\{l_n/d_n\colon\ n = 1, 2, \ldots\} = M < \infty$, *где* l_n — *длина кривой* Γ_n;

(iv) $\mu_n = \max\{|f(z)|\colon\ z \in \Gamma_n\} \to 0$ *при* $n \to \infty$;

(v) *каждая область* D_n, *ограниченная* Γ_n, *содержит ровно* n *полюсов функции* f, *а сами кривые* Γ_n *не содержат полюсов функции* f.

Тогда функцию f можно представить в виде суммы ряда элементарных дробей

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z), \quad g_n(z) = \sum_{k=1}^{m_n} \frac{c_k^{(n)}}{(z-a_n)^k}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

При этом

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} g_k(z) \right| \to 0$$

при $n \to \infty$ равномерно в каждом круге $|z| \leqslant R$ с удаленными из него полюсами функции f.

Доказательство. В силу условия (v) полюсы функции f можно занумеровать так, чтобы выполнялись условия: $a_1 \in D_1$ и $a_n \in D_n \setminus D_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$. Пусть также $g_n(z)$ — главная часть ряда Лорана разложения функции f в окрестности полюса a_n и для каждого $n = 1, 2, \ldots$ определим

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} g_k(z) \qquad \text{и} \qquad \varphi_n(z) = f(z) - S_n(z).$$

Заметим, что φ_n имеет в D_n лишь устранимые особые точки $a_1, \ldots, a_n$. Доопределяя её в этих точках по непрерывности, получим голоморфную в D_n функцию. Более того, φ_n будет голоморфной в замыкании области D_n, поскольку на её границе Γ_n нет полюсов функции f, а S_n голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$. В силу интегральной формулы Коши для $z \in D_n$ имеет место представление

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_n} \frac{\varphi_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_n} \frac{S_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Второй интеграл в правой части этого равенства представляет собой линейную комбинацию интегралов вида

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_n} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - a)^m} = - \operatorname*{res}_{\zeta=\infty} \frac{1}{(\zeta - z)(\zeta - a)^m} = 0,$$

поскольку $a, z \in D_n$, а подынтегральная функция имеет нуль не менее второго порядка в точке $\zeta = \infty$. Таким образом, для $z \in D_n$ имеем

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Но тогда в терминах принятых выше обозначений получаем

$$|\varphi_n(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_n} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| \leqslant \frac{l_n}{2\pi} \max_{\zeta \in \Gamma_n} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|} \leqslant \frac{l_n \mu_n}{2\pi \varrho_n(z)},$$

где $\varrho_n(z)$ — расстояние от точки z до Γ_n.

Фиксируем теперь произвольно $R > 0$. Поскольку d_n, расстояние от начала координат до контура Γ_n, стремится к бесконечности при $n \to \infty$, то найдётся такой номер N_0, что при $n \geqslant N_0$ будут выполняться неравенства $d_n > 2R$. Для z из круга $|z| \leqslant R$ и $n \geqslant N_0$ выполняется неравенство $\varrho_n(z) \geqslant d_n - R > R$ и, следовательно, в силу условий (iv) и (iii)

$$|\varphi_n(z)| \leqslant \frac{l_n \mu_n}{2\pi(d_n - R)} = \frac{\mu_n}{2\pi(1 - R/d_n)} \frac{l_n}{d_n} \leqslant \frac{M}{\pi} \mu_n \to 0$$

при $n \to \infty$ равномерно по z в круге $|z| \leqslant R$. $\square$

Разложение $\operatorname{ctg} z$ **в ряд элементарных дробей.**

Полюсы рациональной функции $\operatorname{ctg} z$ совпадают с нулями функции $\sin z$, которые мы занумеруем следующим образом:

$$a_1 = 0, \quad a_{2k} = k\pi, \quad a_{2k+1} = -k\pi, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Построим систему замкнутых кривых Γ_n как последовательность положительно ориентированных границ квадратов

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{z\colon\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2},\quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\right\},\\ D_{2k} &= \left\{z\colon\ \left(\frac{1}{2}-k\right)\pi < \operatorname{Re} z < \left(\frac{1}{2}+k\right)\pi,\quad -k\pi < \operatorname{Im} z < k\pi\right\},\\ D_{2k+1} &= \left\{z\colon\ -\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi < \operatorname{Re} z < \left(\frac{1}{2}+k\right)\pi,\right.\\ &\qquad\qquad \left. -\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi < \operatorname{Im} z < \left(\frac{1}{2}+k\right)\pi\right\}, \end{aligned}$$

$k = 1, 2, \ldots$. Заметим, что для этих кривых характеристики из условий теоремы имеют вид

$$d_{2k} = \left(k-\frac{1}{2}\right)\pi,\quad l_{2k} = 8k\pi;\quad d_{2k+1} = \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,\quad l_{2k+1} = 4\,(2k+1)\,\pi.$$

Следовательно,

$$\frac{l_{2k+1}}{d_{2k+1}} = 8,\qquad \frac{l_{2k}}{d_{2k}} = \frac{16k}{2k-1} \leqslant 16.$$

Таким образом, для последовательности кривых Γ_n, $n = 1, 2, \ldots$, выполняются условия (i) — (iii).

Далее, поскольку вертикальные стороны контуров Γ_n лежат на прямых $z = iy + \frac{\pi}{2} + m\pi$, $y \in \mathbb{R}$, m — целое, то на них выполняется неравенство

$$|\operatorname{ctg} z| = \frac{|1+e^{i2z}|}{|1-e^{i2z}|} = \frac{|1-e^{-2y}|}{|1+e^{-2y}|} \leqslant 1.$$

Горизонтальные стороны контуров Γ_n лежат на прямых $z = x + im\frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$ — целое, и на них

$$|\operatorname{ctg} z| = \frac{|e^{-m\pi}e^{i2x}+1|}{|e^{-m\pi}e^{i2x}-1|} \leqslant \frac{e^{-m\pi}+1}{|e^{-m\pi}-1|} = \left|\operatorname{cth}\frac{m\pi}{2}\right| \leqslant \operatorname{cth}\frac{\pi}{2}.$$

Это означает, что $|\operatorname{ctg} z|$ равномерно ограничен на семействе кривых Γ_n, $n = 1, 2, \ldots$. Но тогда для функции $f(z) = \operatorname{ctg} z/z$ и последовательности кривых Γ_n, $n = 1, 2, \ldots$, будут выполняться все условия теоремы. Функция f имеет полюсы в тех же точках $a_1, a_2, \ldots$, что и $\operatorname{ctg} z$. При этом только $a_1 = 0$ является полюсом второго порядка. Главной частью ряда Лорана в окрестности этой точки является $g_1(z) = 1/z^2$, поскольку

$$\frac{\operatorname{ctg} z}{z} = \frac{\cos z}{z\sin z} = \frac{1}{z^2}\,\frac{1-z^2/2!+\ldots}{1-z^2/3!+\ldots} = \frac{1}{z^2} + c_0 + \ldots.$$

Остальные полюсы a_n, $n = 2, 3, \ldots$ являются простыми и для них

$$g_n(z) = \frac{1}{z-a_n}\operatorname*{res}_{z=a_n} f(z).$$

Замечая, что

$$\operatorname*{res}_{z=a_n} f(z) = \lim_{z\to a_n} \frac{(z-a_n)\cos z}{z\sin z} = \frac{\cos a_n}{a_n}\frac{1}{(\sin z)'}\bigg|_{z=a_n} = \frac{1}{a_n},$$

получаем

$$g_{2k}(z) = \frac{1}{k\pi}\frac{1}{z-k\pi}, \quad g_{2k+1}(z) = -\frac{1}{k\pi}\frac{1}{z+k\pi}, \quad k = 1,2,\ldots.$$

В силу доказанной выше теоремы функция f имеет представление

$$\frac{\operatorname{ctg} z}{z} = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k\pi(z-k\pi)} - \frac{1}{k\pi(z+k\pi)}\right).$$

Умножая обе части равенства на z, приходим к разложению

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{k\pi(z-k\pi)} - \frac{z}{k\pi(z+k\pi)}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-k\pi} + \frac{1}{z+k\pi}\right).$$

§ 11. Элементарные конформные отображения и теорема Римана

Дробно-линейные преобразования.

Под дробно-линейным преобразованием понимается рациональная функция

$$L(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{11.1}$$

где комплексные числа a, b, c, d называются коэффициентами преобразования L и удовлетворяют условию

$$ad - bc \neq 0. \tag{11.2}$$

Условие (11.2) отвечает за невырожденность отображения L, поскольку оно эквивалентно тому, что нуль числителя и нуль знаменателя не совпадают. Нас будет интересовать L как отображение расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на себя. В связи с этим отметим, что представление (11.1) не однозначно, поскольку умножение всех коэффициентов на одно и то же ненулевое число не изменяет самого отображения $w = L(z)$.

Предложение 11.1. *Совокупность $\mathcal{M}$ всех дробно-линейных преобразований образует группу относительно операции композиции.*

Доказательство. Пусть $L_k(z) = (a_k z + b_k)/(c_k z + d_k)$, $k = 1, 2,$ — два дробно-линейных преобразования, т. е. $a_k d_k - b_k c_k \neq 0$. Тогда

$$L_1 \circ L_2(z) = L_1(L_2(z)) = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + c_2d_1)z + (c_1b_2 + d_1d_2)}.$$

Чтобы убедиться в том, что $L_1 \circ L_2$ является дробно-линейным преобразованием, нужно проверить выполнение условия (11.2) для этого отображения. Простые вычисления показывают, что

$$(a_1a_2+b_1c_2)(c_1b_2+d_1d_2)-(a_1b_2+b_1d_2)(c_1a_2+c_2d_1) = (a_1d_1-b_1c_1)(a_2d_2-b_2c_2) \neq 0,$$

поскольку условие (11.2) выполняется для L_1 и L_2.

Покажем теперь, что для каждого дробно-линейного преобразования L существует обратное L^{-1} и $L^{-1} \in \mathcal{M}$. Решая уравнение

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

относительно z, находим

$$z = L^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}.$$

Условие (11.2) для L^{-1} эквивалентно этому же условию для L. □

Отметим, что группа $\mathcal{M}$ (которую также называют группой мёбиусовых преобразований) не коммутативна. Существование обратного отображения доказывает, что дробно-линейное преобразование L осуществляет взаимно однозначное соответствие $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$. При этом $L(\infty) = a/c$ и $L(-d/c) = \infty$, если $c \neq 0$, и $L(\infty) = \infty$, если $c = 0$.

Предложение 11.2. *Каждое дробно-линейное преобразование осуществляет конформное отображение $\overline{\mathbb{C}}$ на себя.*

Доказательство. Пусть L определяется равенством (11.1) с условием (11.2) на коэффициенты. Допустим вначале, что $c \neq 0$. Тогда для любого $z \neq \infty$ и $\neq -d/c$ выполняется условие

$$L'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0,$$

которое означает конформность L в точке z. В точке $z = -d/c$ функция L имеет простой полюс и, как следует из предыдущего параграфа, является конформным в этой точке. Бесконечно удалённая точка в рассматриваемом случае является устранимой особой точкой и $L(z) \to a/c$ при $z \to \infty$. При этом

$$\lim_{z\to\infty} z\left(L(z) - \frac{a}{c}\right) = \lim_{z\to\infty} \frac{z(bc-ad)}{cz+d} = \frac{bc-ad}{c} \neq 0,$$

т. е. L конформна в точке $z = \infty$.

Если $c = 0$, то в силу (11.2) коэффициенты a и d не должны обращаться в нуль. Поэтому $L'(z) = a/d \neq 0$, что означает конформность L в конечных точках. В бесконечно удалённой точке L имеет простой полюс и также является конформным. □

Предложение 11.3. *Пусть z_1, z_2, z_3 — три различные точки в $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда существует единственное $T \in \mathcal{M}$, для которого $T(z_1) = 1$, $T(z_2) = 0$ и $T(z_3) = \infty$.*

Доказательство. В случае конечных точек, т. е. когда $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, отображение T определяется равенством

$$T(z) = \frac{z-z_2}{z-z_3} \bigg/ \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}.$$

В случае, когда одна из точек z_1, z_2 или z_3 является бесконечно удалённой, требуемое отображение получается из приведенной выше формулы соответствующим предельным переходом

$$T(z) = \begin{cases} \dfrac{z - z_2}{z - z_3}, & \text{если} \quad z_1 = \infty, \\ \dfrac{z_1 - z_3}{z - z_3}, & \text{если} \quad z_2 = \infty, \\ \dfrac{z - z_2}{z_1 - z_2}, & \text{если} \quad z_3 = \infty. \end{cases}$$

Остаётся доказать единственность отображения. Допустим, что S — дробно-линейное преобразование с теми же свойствами. Тогда дробно-линейное преобразование $L = S \circ T^{-1}$ оставляет неподвижными точки $1, 0$ и ∞. Из условия $L(\infty) = \infty$ следует, что в представлении (11.1) коэффициент c должен равняться нулю. Поэтому L должно иметь вид $L(z) = az + b$. Используя теперь условия $L(0) = 0$ и $L(1) = 1$, приходим к заключению, что $L(z) \equiv z$. Отсюда следует тождество $S(z) \equiv T(z)$. □

Определение 11.1. Под *ангармоническим отношением* четырёх различных точек z_1, z_2, z_3, z_4 в $\overline{\mathbb{C}}$ понимается образ точки z_1 при отображении её посредством дробно-линейного преобразования T, которое удовлетворяет условиям $T(z_2) = 1$, $T(z_3) = 0$, $T(z_4) = \infty$. При этом используется обозначение

$$T(z_1) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

Заметим, что если все четыре точки z_1, z_2, z_3, z_4 конечны, то

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \Big/ \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}.$$

Важность ангармонического отношения обусловлена уже тем, что оно является инвариантом при дробно-линейном преобразовании.

Теорема 11.1. *Пусть z_1, z_2, z_3, z_4 — четыре различные точки в $\overline{\mathbb{C}}$ и $L \in \mathcal{M}$. Тогда*

$$(L(z_1), L(z_2), L(z_3), L(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

Доказательство. Пусть $T(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$, т. е. $T \in \mathcal{M}$ и $T(z_2) = 1$, $T(z_3) = 0$, $T(z_4) = \infty$. Тогда $S = T \circ L^{-1}$ обладает свойством $S(L(z_2)) = 1$, $S(L(z_3)) = 0$ и $S(L(z_4)) = \infty$. По определению ангармонического отношения имеем

$$(L(z_1), L(z_2), L(z_3), L(z_4)) = S(L(z_1)) = T \circ L^{-1} \circ L(z_1) = T(z_1) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

и теорема доказана. □

Замечание 11.1. Для любых различных трёх точек z_1, z_2, z_3 в z-плоскости и различных трёх точек w_1, w_2, w_3 в w-плоскости существует единственное дробно-линейное преобразование L, для которого

$$L(z_1) = w_1, \quad L(z_2) = w_2, \quad L(z_3) = w_3.$$

Это отображение можно найти, разрешив равенство

$$(w, w_1, w_2, w_3) \;=\; (z, z_1, z_2, z_3)$$

относительно w.

Круговое свойство

При стереографической проекции каждой окружности на сфере Римана в комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ соответствует окружность или прямая. Поэтому под окружностью в $\overline{\mathbb{C}}$ в дальнейшем будем понимать окружность или прямую. Другими словами, прямая — это окружность в $\overline{\mathbb{C}}$ проходящая через бесконечно удалённую точку. Оказывается, что семейство окружностей в $\overline{\mathbb{C}}$ преобразуется посредством дробно-линейных преобразований в себя.

Предложение 11.4. *Прообразом вещественной оси при отображении* $L\colon \overline{\mathbb{C}} \mapsto \overline{\mathbb{C}}$, $L \in \mathcal{M}$, *является окружность в* $\overline{\mathbb{C}}$ *(т. е. окружность или прямая).*

Доказательство. Пусть L определяется равенством (11.1) с условием (11.2) на коэффициенты. Условие $z \in L^{-1}(\mathbb{R})$ можно записать в виде равенства $\operatorname{Im} L(z) = 0$ или

$$\frac{az+b}{cz+d} - \frac{\overline{az}+\overline{b}}{\overline{cz}+\overline{d}} \;=\; 0.$$

Последнее равенство можно переписать в эквивалентном виде

$$(a\overline{c} - \overline{a}c)|z|^2 + (a\overline{d} - \overline{b}c)z + (b\overline{c} - \overline{a}d)\overline{z} + (b\overline{d} - \overline{b}d) \;=\; 0. \tag{11.3}$$

Если $a\overline{c} - \overline{a}c = 0$, то уравнение (11.3) принимает вид

$$\operatorname{Im}\{(a\overline{d} - \overline{b}c)z\} \;=\; \operatorname{Im}\{\overline{b}d\},$$

т. е. определяет в комплексной z-плоскости прямую.

Допустим теперь, что $a\overline{c} - \overline{a}c \neq 0$ Тогда уравнение (11.3) можно записать в виде

$$|z|^2 - \overline{A}z - A\overline{z} + B \;=\; 0 \qquad \text{или} \qquad |z - A|^2 \;=\; |A|^2 - B,$$

где

$$A \;=\; \frac{\overline{a}d - b\overline{c}}{a\overline{c} - \overline{a}c}, \qquad B \;=\; \frac{b\overline{d} - \overline{b}d}{a\overline{c} - \overline{a}c}.$$

Замечая также, что

$$|A|^2 - B \;=\; \frac{|ad - dc|^2}{|a\overline{c} - \overline{a}c|^2} \;>\; 0,$$

приходим к выводу о том, что уравнение (11.3) определяет окружность. □

Предложение 11.5. *Различные четыре точки* z_1, z_2, z_3, z_4 *лежат на одной окружности в* $\overline{\mathbb{C}}$ *в том и только том случае, если*

$$\operatorname{Im}(z_1, z_2, z_3, z_4) \;=\; 0.$$

Доказательство. Пусть T — дробно-линейное преобразование, удовлетворяющее условиям $T(z_2) = 1$, $T(z_3) = 0$, $T(z_4) = \infty$, а $\mathcal{C}$ — окружность в $\overline{\mathbb{C}}$, проходящая через точки z_2, z_3, z_4. В силу предыдущего предложения прообразом вещественной оси при отображении T будет окружность в $\overline{\mathbb{C}}$. Поскольку точки $1, 0$ и ∞ расположены на вещественной оси, то этим прообразом будет окружность $\mathcal{C}$. Но тогда точка z_1 будет принадлежать окружности $\mathcal{C}$ в том и только случае, если $T(z_1) \in \mathbb{R}$, т. е. $T(z_1) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ вещественно. □

Теорема 11.2. *При дробно-линейном преобразовании окружности в $\overline{\mathbb{C}}$ переходят в окружности в $\overline{\mathbb{C}}$.*

Доказательство. Пусть L — произвольное дробно-линейное преобразование и $\mathcal{C}$ — окружность в $\overline{\mathbb{C}}$. Выберем на $\mathcal{C}$ три различные точки z_1, z_2, z_3 и пусть $\mathcal{C}^*$ — окружность в w-плоскости, которая проходит через точки $L(z_1)$, $L(z_2)$, $L(z_3)$. Для любого $z \in \overline{\mathbb{C}}$ в силу инвариантности ангармонического отношения относительно дробно-линейного преобразования будет выполняться равенство

$$(L(z), L(z_1), L(z_2), L(z_3)) = (z, z_1, z_2, z_3).$$

Из предыдущего предложения следует, что $z \in \mathcal{C}$ в том и только том случае, когда правая часть последнего равенства вещественна. Аналогично, $L(z) \in \mathcal{C}^*$ в том и только том случае, когда левая часть этого же равенства вещественна. Таким образом, $z \in \mathcal{C}$ в том и только том случае, когда $L(z) \in \mathcal{C}^*$, т. е. $L(\mathcal{C}) = \mathcal{C}^*$. □

Принцип симметрии.

Если дробно-линейное преобразование (11.1) определяется вещественными коэффициентами, то оно переводит вещественную ось на себя, а пару точек z и $\bar{z}$, симметричных относительно вещественной оси, в пару точек, которые также будут симметричны относительно вещественной оси. Поскольку дробно-линейные преобразования обладают круговым свойством, то естественно ожидать, что пары точек, симметричных относительно некоторой окружности в $\overline{\mathbb{C}}$ будут переводиться дробно-линейным преобразованием в пары точек, симметричных относительно образа этой окружности.

Предложение 11.6. *Пусть z_1, z_2, z_3 — три различные точки в $\mathbb{C}$ и $\mathcal{C}$ — окружность (или прямая), проходящая через них. Тогда точки z и z^* симметричны относительно $\mathcal{C}$ в том и только том случае, если выполняется соотношение*

$$(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}. \tag{11.4}$$

Доказательство. Пусть T — дробно-линейное преобразование, которое переводит точки z_1, z_2, z_3 в $1, 0$ и ∞, соответственно. Тогда условие (11.4) эквивалентно тому, что $T(z^*) = \overline{T(z)}$, или $z^* = T^{-1}(\overline{T(z)})$. Поэтому утверждение будет доказано, если мы покажем, что равенство (11.4) влечёт симметрию точек z и z^* относительно $\mathcal{C}$. Выделим в доказательстве этого два случая.

1). Пусть $\mathcal{C}$ является прямой, т. е. проходит через бесконечно удалённую точку. Тогда отношение $(z_1 - z_2)/(z_1 - z_3)$ вещественно и условие (11.4) принимает вид

$$\frac{z^* - z_2}{z^* - z_3} = \overline{\left(\frac{z - z_2}{z - z_3}\right)}.$$

Отсюда следуют равенства

$$\arg\frac{z^*-z_2}{z^*-z_3} = -\arg\frac{z-z_2}{z-z_3}, \qquad \frac{|z^*-z_2|}{|z^*-z_3|} = \frac{|z-z_2|}{|z-z_3|},$$

которые означают подобие треугольников с вершинами z^*, z_2, z_3 и z, z_2, z_3. Поскольку эти треугольники имеют ещё и общую сторону, то они равны. Отсюда следует симметричность z^* и z относительно прямой $\mathcal{C}$, проходящей через точки z_2 и z_3.

2). Пусть теперь $\mathcal{C}$ — окружность с центром в точке a и радиуса R. Поскольку точки z_1, z_2, z_3 лежат на $\mathcal{C}$, то $|z_k - a| = R$ для $k = 1, 2, 3$. Используя это и инвариантность ангармонического отношения относительно дробно-линейных преобразований, соотношение (11.4) приводится к следующему виду

$$\begin{aligned}(z^*, z_1, z_2, z_3) &= \overline{(z, z_1, z_2, z_3)} = (\overline{z}, \overline{z_1}, \overline{z_2}, \overline{z_3}) \\ &= \left(\frac{R^2}{\overline{z}-\overline{a}}, \frac{R^2}{\overline{z_1}-\overline{a}}, \frac{R^2}{\overline{z_2}-\overline{a}}, \frac{R^2}{\overline{z_3}-\overline{a}}\right) \\ &= \left(\frac{R^2}{\overline{z}-\overline{a}}, z_1-a, z_2-a, z_3-a\right) \\ &= \left(\frac{R^2}{\overline{z}-\overline{a}}+a, z_1, z_2, z_3\right).\end{aligned}$$

Другими словами,

$$T(z^*) = T\left(\frac{R^2}{\overline{z}-\overline{a}}+a\right).$$

Поскольку T однолистно, то отсюда следует, что

$$z^* = \frac{R^2}{\overline{z}-\overline{a}}+a \qquad \text{или} \qquad z^*-a = \frac{R^2}{\overline{z}-\overline{a}}.$$

Следовательно, для z и z^* выполняются соотношения

$$\arg(z^*-a) = \arg(z-a), \qquad |z^*-a|\cdot|z-a| = R^2.$$

Первое соотношение означает, что z и z^* лежат на одном луче, выходящем из центра a окружности $\mathcal{C}$, а второе равенство показывает, что произведение расстояний от центра a до точек z и z^* равно квадрату радиуса окружности $\mathcal{C}$. Таким образом, z и z^* являются симметричными относительно $\mathcal{C}$. □

ТЕОРЕМА 11.3. *Пусть дробно-линейное преобразование L отображает окружность $\mathcal{C}$ в $\overline{\mathbb{C}}$ в окружность $\mathcal{C}'$ в $\overline{\mathbb{C}}$, т. е. $\mathcal{C}' = L(\mathcal{C})$. Тогда каждая пара точек z и z^*, симметричных относительно $\mathcal{C}$, переводится в пару точек $L(z)$ и $L(z^*)$, симметричных относительно $\mathcal{C}'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть z_1, z_2, z_3 — три различные точки на окружности $\mathcal{C}$. Тогда $L(z_1), L(z_2), L(z_3)$ расположены на $\mathcal{C}'$. Допустим теперь, что z и z^* — пара точек, симметричных относительно $\mathcal{C}$. В силу доказанного выше предложения это эквивалентно равенству

$$(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}.$$

Однако, в силу инвариантности ангармонического отношения относительно дробно-линейных преобразований, это равенство влечёт следующее

$$(L(z^*), L(z_1), L(z_2), L(z_3)) = \overline{(L(z), L(z_1), L(z_2), L(z_3))},$$

которое эквивалентно условию симметричности точек $L(z)$ и $L(z^*)$ относительно окружности $\mathcal{C}'$. $\square$

Прежде чем мы приступим к изучению других элементарных конформных отображений, сделаем некоторые общие замечания. Конформное отображение, ассоциированное с голоморфной функцией, даёт наглядное представление о ней, подобно графику в случае функции вещественного переменного. Кроме того, во многие области математики и её приложения теория функций комплексного переменного входит через конформное отображение. Одной из наиболее важных проблем, возникающих при этом, является задача отыскания конформного отображения одной области на другую. Чтобы иметь представление о разрешимости этого вопроса в рамках элементарных функций, нужно хорошо знать их отображающие свойства. Последняя цель достигается, как правило, выяснением того, как преобразуются те или иные семейства кривых. В качестве исследуемых семейств кривых часто выбирают ортогональную сетку прямых, параллельных координатным осям, или используются полярные координаты и изучаются образы концентрических окружностей и лучей, выходящих из начала координат.

Степенная функция.

Пусть $\alpha > 0$. В области $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ можно выделить регулярную ветвь логарифма и регулярную ветвь многозначной функции $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$. Выделение этих ветвей, по существу, сводится к определению в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ ветви $\arg z$. Будем считать, что ветвь $\arg z$ выделена. Тогда для $w = z^\alpha$ будут выполняться равенства

$$|w| = |z|^\alpha, \qquad \arg w = \alpha \cdot \arg z.$$

Отсюда сразу же следует, что дуги, расположенные на концентрических окружностях с центром в начале координат, переводятся в дуги этого же семейства, а лучи, выходящие из начала координат, взаимно однозначно отображаются на такие же лучи. При этом луч, выходящий из начала координат под углом θ к положительному направлению вещественной оси, переводится в луч, который в w-плоскости выходит под углом $\alpha\theta$.

Таким образом, если $0 < \alpha < 1$, то степенная функция однолистно отображает область $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ на угловой сектор раствора $\alpha\cdot 2\pi$. В случае $\alpha > 1$ степенная функция не является однолистной в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$. Однако она будет однолистной в любом угловом секторе раствора $2\pi/\alpha$. Из равенства

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d}{dz} e^{\alpha \ln z} = \alpha \frac{w}{z}$$

следует, что степенная функция определяет конформное отображение во всех точках области $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$.

Экспоненциальная функция.

Рассмотрим отображающие свойства функции $w = e^z$. Если $z = x + iy$, то $w = e^x e^{iy}$, откуда видно, что прямая $z = x + iy_0$, $-\infty < x < \infty$, взаимно однозначно отображается на луч $w = e^x e^{iy_0}$, $-\infty < x < \infty$, который выходит из начала координат и образует с положительным направлением вещественной оси угол, равный y_0. Прямые, параллельные мнимой оси, отображаются на окружности с центром в начале координат. При этом каждая точка окружности является бесконечно-кратной, поскольку функция e^z имеет период $2\pi i$. Всякая другая прямая в z-плоскости переходит в логарифмическую спираль в w-плоскости. Областью однолистности экспоненциальной функции является всякая горизонтальная полоса, имеющая ширину, не превышающую 2π. В частности, горизонтальная полоса $\{z\colon y_1 < \operatorname{Im} z < y_2\}$ при $y_2 - y_1 < 2\pi$ однолистно отображается на сектор $\{w\colon y_1 < \arg w < y_2\}$, который в случае $y_2 - y_1 = \pi$ является полуплоскостью. Поскольку

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z \neq 0,$$

то отображение, осуществляемое экспоненциальной функцией, конформно в каждой точке.

Функция Жуковского.

Рациональная функция

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

называется функцией Жуковского. Её название обусловлено тем, что эту функцию Жуковский применил для аэродинамического расчёта крыла самолета. Она имеет два простых полюса в точках $z = 0$ и $z = \infty$. Поскольку

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right),$$

то отображение, осуществляемое функцией Жуковского, конформно во всех точках расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, за исключением двух точек $z = \pm 1$. Конформность в точках $z = 0$ и $z = \infty$ следует из того, что в этих точках функция имеет простые полюсы.

Выясним теперь, каким свойством должна обладать область $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, чтобы функция Жуковского была в ней однолистна. Пусть z_1, z_2 — произвольные две точки в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Из равенства

$$\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right) - \left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right) = (z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right)$$

видно, что D является областью однолистности функции Жуковского в том и только том случае, если она не содержит пары точек z_1, z_2, для которых $z_1 z_2 = 1$. Простейшими такими областями являются внутренность и внешность единичного круга, а также верхняя и нижняя полуплоскости.

Для более полного представления о характере отображения, осуществляемого функцией Жуковского, положим $z = re^{i\theta}$ и $w = u + iv$. Другими словами, в

z-плоскости мы рассматриваем полярные координаты, а в w-плоскости декартовы. Тогда
$$u = \frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta, \qquad v = \frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta.$$
Из этих равенств следует, что окружность $|z|=r$, $r\neq 1$, переходит в эллипс с полуосями
$$a = \frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right), \qquad b = \frac{1}{2}\left|r-\frac{1}{r}\right|$$
и фокусами в точках $w=\pm 1$. Действительно,
$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2} = 1$$
и $c^2=a^2-b^2=1$ (т. е. $(-c,0),(c,0)$ — фокусы эллипса). При этом положительному обходу точкой z окружности $|z|=r$ при $r>1$ соответствует положительный обход эллипса точкой w, а в случае $r<1$ обход эллипса осуществляется в противоположном направлении. Кроме того, окружностям $|z|=r$ и $|z|=1/r$ соответствует в w-плоскости один и тот же эллипс. Единичная окружность $|z|=1$ переходит в отрезок $[-1,1]$, который обходится дважды. К этому отрезку стягиваются эллипсы, которые являются образами окружностей $|z|=r$ при $r\to 1$.

Пусть теперь $\theta\in(0,\pi/2)$ фиксировано, а r меняется от 0 до $+\infty$. Тогда для всех w, соответствующих точкам этого луча, будет выполняться равенство
$$\frac{u^2}{\cos^2\theta}-\frac{v^2}{\sin^2\theta} = 1,$$
т. е. точки w находятся на гиперболе с теми же фокусами $w=\pm1$. Легко видеть, что когда r меняется от 0 до ∞, точка w движется по правой ветви гиперболы снизу — вверх. Если изменить знак θ, т. е. взять его из интервала $(-\pi/2,0)$, то образом этого луча будет та же ветвь гиперболы, но с противоположным обходом. Лучи, выходящие из начала координат под углом $\theta\in(\pi/2,\pi)$ к положительному направлению вещественной оси, отображаются на левые ветви гипербол, которые обходятся снизу — вверх. Смена знака θ и в этом случае приводит лишь к смене направления обхода ветви гиперболы. Отметим также, что $v=\pm\operatorname{tg}\theta\cdot u$ — уравнения асимптот гиперболы.

Образом луча, соответствующего $\theta=0$, является луч $[1,\infty)$, который обходится дважды. Аналогично, образом луча, соответствующего значению $\theta=\pi$, является луч $(-\infty,-1]$, который также обходится дважды. Для лучей с направлением $\theta=\pm\pi/2$ образами является мнимая ось с противоположными обходами.

В силу конформности отображения, осуществляемого функцией Жуковского, семейство эллипсов (образов окружностей) и семейство гипербол (образов лучей) образуют ортогональную сетку в w-плоскости.

Из приведенных выше рассуждений видно, что функция Жуковского конформно отображает внутренность, а также и внешность, единичного круга на $\overline{\mathbb{C}}\setminus[-1,1]$. Верхняя и нижняя полуплоскости конформно отображаются на плоскость с двумя разрезами по лучам $(-\infty,-1]$ и $[1,\infty)$.

Теорема Римана и принцип соответствия границ.

Круговое свойство дробно-линейных преобразований позволяет конформно отобразить любой круг (или полуплоскость) на область, ограниченную окружностью в $\overline{\mathbb{C}}$. Оказывается, что дробно-линейными преобразованиями и исчерпываются все конформные отображения одной круговой области на другую.

Теорема 11.4. *Совокупность всех конформных (голоморфных и однолистных) отображений f единичного круга $\mathbb{D}$ на себя описываются формулой*

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \tag{11.5}$$

где $a \in \mathbb{D}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Выясним вначале вид дробно-линейного преобразования L, которое отображает $\mathbb{D}$ на себя, т. е. $L(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. При этом отображении единичная окружность $\mathbb{T}$ должна перейти в себя. Пусть $a \in \mathbb{D}$ — точка, которая переходит в начало координат $L(a) = 0$. В силу принципа симметрии точка $a^* = 1/\overline{a}$ перейдёт в бесконечно удалённую точку. Таким образом, определились нули числителя и знаменателя дробно-линейного преобразования L, а с ним и вид отображения

$$L(z) = A\frac{z-a}{z-1/\overline{a}} = \varkappa\frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

Поскольку при $z \in \mathbb{T}$

$$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| = \left|\frac{z-a}{\overline{z}-\overline{a}}\right| = 1,$$

то $|\varkappa| = 1$ или $\varkappa = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Кроме того, всякое отображение вида (11.5) осуществляет конформное отображение $\mathbb{D}$ на себя, поскольку является дробно-линейным преобразованием, которое переводит единичную окружность на себя, а точку a из $\mathbb{D}$ переводит в начало координат.

Допустим теперь, что $f\colon \mathbb{D} \mapsto \mathbb{D}$ — произвольное конформное отображение $\mathbb{D}$ на себя, и пусть $f(0) = a$, $a \in \mathbb{D}$. Рассмотрим дробно-линейное преобразование

$$L(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z},$$

которое отображает $\mathbb{D}$ на себя и переводит точку a в начало координат. Тогда $\varphi(z) = L \circ f(z)$ также конформно отображает $\mathbb{D}$ на себя и $\varphi(0) = 0$. По лемме Шварца

$$|\varphi(z)| \leqslant |z|$$

для всех $z \in \mathbb{D}$. С другой стороны, φ^{-1} также удовлетворяет условиям леммы Шварца и потому

$$|\varphi^{-1}(w)| \leqslant |w|$$

для всех $w \in \mathbb{D}$. Полагая в этом неравенстве $w = \varphi(z)$, получаем

$$|z| \leqslant |\varphi(z)|,$$

что вместе с предыдущим неравенством приводит к тождеству $|\varphi(z)| \equiv |z|$. В силу леммы Шварца тогда $\varphi(z) \equiv \varkappa z$, где $|\varkappa| = 1$. Следовательно,

$$L \circ f(z) \equiv \varkappa z \qquad \text{и} \qquad f(z) = L^{-1}(\varkappa z),$$

т. е. f является дробно-линейным преобразованием. □

Аналогично можно найти общий вид конформного отображения верхней полуплоскости на единичный круг. Снова ими будут лишь дробно-линейные преобразования. Пусть $w = L(z)$ — дробно-линейное преобразование, отображающее верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на единичный круг $|w| < 1$. Пусть $A \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} A > 0$, — точка, которая переходит в начало координат, т. е. $L(A) = 0$. Тогда, поскольку $L(\mathbb{R}) = \mathbb{T}$, то симметричная точка $\overline{A}$ должна перейти в бесконечно удалённую точку. Следовательно, L должна иметь вид

$$L(z) = \varkappa \frac{z - A}{z - \overline{A}}.$$

Поскольку $|x - A| = |x - \overline{A}|$ при $x \in \mathbb{R}$, то условие соответствия вещественной оси и единичной окружности приводит к равенству $|\varkappa| = 1$. Таким образом, общий вид конформного отображения верхней полуплоскости на единичный круг определяется формулой

$$L(z) = e^{i\theta} \frac{z - A}{z - \overline{A}},$$

где $\theta \in \mathbb{R}$ и $\operatorname{Im} A > 0$.

В геометрически ориентированной части теории аналитических функций проблема конформного отображения играет доминирующую роль. Теоремы существования и единственности позволяют определить аналитическую функцию с важными свойствами, минуя её аналитическую запись. В 1851 г. Риман объявил о фундаментальной теореме, согласно которой каждую односвязную область, отличную от всей плоскости, можно конформно отобразить на единичный круг. Однако его доказательство оказалось не лишённым недостатков, на которые обращал внимание Вейерштрасс. Около половины века понадобилось для отыскания строгого доказательства этой теоремы. Одним из первых его получил Кёбе. Заметим также, что в силу теоремы Лиувилля не существует конформного отображения всей плоскости на единичный круг.

Теорема 11.5. *[Римана.] Для всякой односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, отличной от всей комплексной плоскости, и точки $z_0 \in D$ существует единственная голоморфная в D функция f, нормированная условиями $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$, и осуществляющая конформное (взаимно однозначное) отображение области D на единичный круг $\mathbb{D}$.*

Доказательство. Единственность. Допустим, что две функции f_1 и f_2 удовлетворяют условиям теоремы. Тогда функция $\zeta = \varphi(w) = f_2 \circ f_1^{-1}(w)$ будет конформно отображать единичный круг $\mathbb{D}$ на себя и $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) > 0$. Как следует из предыдущей теоремы, φ должна определяться формулой

$$\varphi(w) = e^{i\theta} \frac{w - a}{1 - \overline{a} w}.$$

Однако, поскольку $\varphi(0) = 0$, то $a = 0$, а условие $\varphi'(0) > 0$ приводит к тождеству $\varphi(w) \equiv w$. Но тогда, подставляя $w = f_1(z)$ в равенство

$$f_2 \circ f_1^{-1}(w) \equiv w,$$

получаем $f_2(z) \equiv f_1(z)$ и единственность отображения доказана.

Доказательство существования отображения опирается на принцип компактности для локально равномерной сходимости и выходит за рамки данного курса. □

Конформное отображение осуществляет взаимно однозначное соответствие областей, т. е. открытых множеств. Вопрос о том, при каких условиях конформное отображение можно продолжить на границу области, был решен Каратеодори. Сформулируем без доказательства один из его результатов, который часто называют *принцип соответствия границ*.

Теорема 11.6. *[Каратеодори.] Пусть области D и D^* ограничены жордановыми кривыми γ и γ^*. Тогда конформное отображение f области D на область D^* можно продолжить до гомеоморфного (взаимно однозначного и непрерывного как прямого, так и обратного) отображения замкнутых областей.*

Заметим, что в силу теоремы Римана для любых двух односвязных областей, отличных от всей комплексной плоскости, существует конформное отображение одной области на другую.

§ 12. Аналитическое продолжение

Согласно теореме единственности голоморфная функция однозначно определяется её значениями в сколь угодно малой окрестности какой-либо одной точки. Во времена Ньютона считалось, что все функции только такие, а трудности видели лишь в вычислении значений там, где исходная формула её не определяла, т. е. в аналитическом продолжении. Основная логическая трудность, связанная с аналитическим продолжением, состоит в его неоднозначности. Напомним, что ранее при выделении регулярных ветвей логарифма и корня голоморфной функции f, которая не обращается в нуль в области D, мы продолжали ветвь из точки $a \in D$ посредством интегрирования $f'(z)/f(z)$ вдоль пути, соединяющего точки a и z. Для однозначности такого продолжения требовались некоторые условия на область D.

В этом параграфе мы опишем кратко понятийный аппарат, связанный с представлением об аналитической функции как о совокупности её продолжений. Здесь выделяется два подхода. Один подход Римана — геометрический, который преодолевает трудности неоднозначности функции изменением области определения. Другой подход Вейерштрасса основан на представлении функции степенным рядом. Вначале рассмотрим концепцию Вейерштрасса.

Определение 12.1. *Элементом* будем называть пару $\mathcal{F} = (U, f)$, состоящую из круга $U = \{z\colon |z - a| < R\}$ и функции f, голоморфной в этом круге. Точка a называется центром элемента, а число R — его радиусом. Элемент $\mathcal{F}$

называется *каноническим*, если U совпадает с кругом сходимости ряда Тейлора функции f с центром в точке a.

Другими словами, функцию f элемента $\mathcal{F}$ можно рассматривать как сумму степенного ряда. В дальнейшем мы будем иметь дело, в основном, с каноническими элементами, т. е. рассматривать максимальный круг сходимости степенного ряда с центром в точке a. Радиус канонического элемента можно вычислить по формуле Коши — Адамара, зная коэффициенты степенного ряда. Под равенством канонических элементов можно понимать совпадение их центров и функций в окрестности центра.

Определение 12.2. Элементы $\mathcal{F} = (U, f)$ и $\mathcal{G} = (V, g)$ являются непосредственным аналитическим продолжением друг друга, если $U \cap V \neq \varnothing$ и $f(z) = g(z)$ при $z \in U \cap V$.

Очевидно, что вместе f и g определяют голоморфную функцию в объединении кругов $U \cap V$. В силу теоремы единственности непосредственное аналитическое продолжение элементов единственно.

Определение 12.3. Элемент $\mathcal{G}$ является аналитическим продолжением элемента $\mathcal{F}$ вдоль цепочки элементов $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$, если $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_n = \mathcal{G}$ и для каждого $k = 1, \ldots, n$ элементы $\mathcal{F}_k$ и $\mathcal{F}_{k-1}$ являются непосредственным аналитическим продолжением друг друга.

Непрерывным аналогом аналитического продолжения вдоль цепочки является понятие аналитического продолжения вдоль пути.

Определение 12.4. Семейство канонических элементов $\mathcal{F}_t = (U_t, f_t)$, $t \in [0, 1]$, называется аналитическим продолжением канонического элемента $\mathcal{F}_0$ вдоль пути $\gamma\colon\ z = z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, если:

(i) центр элемента $\mathcal{F}_t$ совпадает с $z(t)$, а его радиус R_t строго положителен для всех $t \in [0, 1]$;
(ii) если для $t_0 \in [0, 1]$ и $\delta > 0$ выполняется условие $|z(t) - z(t_0)| < R_{t_0}$ при $|t - t_0| < \delta$, то $\mathcal{F}_t$ и $\mathcal{F}_{t_0}$ являются непосредственным аналитическим продолжением друг друга при $t \in [0, 1] \cap (t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0)$.

В этом случае будем говорить, что элемент $\mathcal{F}_1$ является аналитическим продолжением элемента $\mathcal{F}_0$ вдоль пути γ.

Теорема 12.1. *Если канонический элемент $\mathcal{F}_0 = (U_0, f_0)$ аналитически продолжается вдоль пути $\gamma\colon\ z = z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, то это продолжение единственно.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}_t = (U_t, f_t)$ и $\widetilde{\mathcal{F}}_t = (\widetilde{U}, \widetilde{f}_t)$ — два аналитических продолжения вдоль пути γ с радиусами R_t и $\widetilde{R}_t$, соответственно, и $\mathcal{F}_0 = \widetilde{\mathcal{F}}_0$. Рассмотрим множество

$$Q = \left\{ t \in [0, 1]\colon\ \mathcal{F}_t \neq \widetilde{\mathcal{F}}_t \right\}.$$

Если $Q = \varnothing$, то доказывать нечего. В противном случае обозначим $\tau = \inf Q$.

Допустим вначале, что $\mathcal{F}_\tau = \widetilde{\mathcal{F}}_\tau$. Поскольку $R_\tau = \widetilde{R}_\tau > 0$, то в силу непрерывности $z(t)$ найдётся такое $\delta > 0$, что $|z(t) - z(\tau)| < R_\tau$ при $|t - \tau| < \delta$. Но тогда по определению аналитического продолжения вдоль пути элементы $\mathcal{F}_t$ и $\widetilde{\mathcal{F}}_t$ будут непосредственным аналитическим продолжением элемента $\mathcal{F}_\tau$ при $t \in (\tau, \tau + \delta)$ с центром в точке $z(t)$. Следовательно, при таких значениях t канонические элементы $\mathcal{F}_t$ и $\widetilde{\mathcal{F}}_t$ совпадают, что противоречит предположению $\tau = \inf Q$.

Допустим теперь, что $\mathcal{F}_\tau \neq \widetilde{\mathcal{F}}_\tau$. Тогда $\tau > 0$ и в силу непрерывности $z(t)$ можно выбрать такое $\delta > 0$, чтобы выполнялось неравенство

$$|z(t) - z(\tau)| < \min\{R_\tau, \widetilde{R}_\tau\}$$

при $|t - \tau| < \delta$. По условию (ii) элементы $\mathcal{F}_\tau$ и $\widetilde{\mathcal{F}}_\tau$ будут непосредственным аналитическим продолжением элемента $\mathcal{F}_{t_0}$ для $t_0 \in (0, \tau)$ и $0 < \tau - t_0 < \delta$. В силу теоремы единственности для голоморфных функций $\widetilde{f}_\tau(z) \equiv f_\tau(z)$, что противоречит сделанному выше предположению. $\square$

Лемма 12.1. *Пусть $\mathcal{F}_t = (U_t, f_t)$, $t \in [0,1]$ — аналитическое продолжение канонического элемента $\mathcal{F}_0$ вдоль пути $\gamma\colon\ z = z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, с радиусами R_t. Тогда либо $R_t = \infty$ для всех t, либо функция $t \mapsto R_t$ непрерывна на $[0,1]$.*

Доказательство. Если при некотором $t_0 \in [0,1]$ радиус R_{t_0} равен $+\infty$, то f_{t_0} будет голоморфной функцией во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и все элементы $\mathcal{F}_t$ в силу условия (ii) будут непосредственным аналитическим продолжением $\mathcal{F}_{t_0}$. Но тогда $f_t(z) \equiv f_{t_0}(z)$ в $\mathbb{C}$ и $R_t = +\infty$ для всех $t \in [0,1]$.

Допустим теперь, что $R_t < \infty$ для всех t и фиксируем произвольно $t_0 \in [0,1]$. В силу непрерывности $z(t)$ найдётся $\delta > 0$ такое, что $|z(t) - z(t_0)| < R_{t_0}$ при $|t - t_0| < \delta$. Согласно условию (ii) элементы $\mathcal{F}_t$ при $|t - t_0| < \delta$ будут непосредственным аналитическим продолжением элемента $\mathcal{F}_{t_0}$. Но тогда окружности ∂U_t и ∂U_{t_0} должны иметь хотя бы одну общую точку. В противном случае (когда один из кругов компактно вкладывается в другой) нарушалось бы условие максимальности круга сходимости ряда Тейлора для функции, соответствующей вложенному кругу. Из свойств сторон треугольника, образованного точкой пересечения окружностей ∂U_t, ∂U_{t_0} и их центрами $z(t), z(t_0)$ следует неравенство

$$|R_t - R_{t_0}| \leqslant |z(t) - z(t_0)|$$

при $|t - t_0| < \delta$. Это и непрерывность функции $z(t)$ доказывает непрерывность функции $t \mapsto R_t$. $\square$

Теорема 12.2. *Если канонический элемент $\mathcal{G} = (V, g)$ является аналитическим продолжением элемента $\mathcal{F} = (U, f)$ вдоль пути $\gamma\colon\ z = z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, то $\mathcal{G}$ является также аналитическим продолжением $\mathcal{F}$ вдоль цепочки элементов. Обратно, если $\mathcal{G}$ является аналитическим продолжением $\mathcal{F}$ вдоль цепочки элементов, то существует также аналитическое продолжение вдоль пути.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}_t = (U_t, f_t)$, $t \in [0,1]$, — аналитическое продолжение элемента $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ вдоль пути γ. Если радиусы элементов продолжения R_t равны бесконечности, то $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_1 = \mathcal{G}$ являются непосредственным аналитическим продолжением друг друга. Поэтому будем считать, что $R_t < \infty$

для всех $t \in [0,1]$. В силу того, что $R_t > 0$ при всех t и $t \mapsto R_t$ — непрерывная функция на $[0,1]$, имеем

$$\min_{0\leqslant t\leqslant 1} R_t = r > 0.$$

Пусть $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ — разбиение отрезка $[0,1]$ такое, что

$$|z(t) - z(t_k)| < r$$

при всех $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда по условию (ii) элементы $\mathcal{F}_{t_k}$ и $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$ будут непосредственным аналитическим продолжением друг друга, $k = 1, \ldots, n$. Следовательно, $\mathcal{G} = \mathcal{F}_1$ является аналитическим продолжением элемента $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ вдоль цепочки элементов $\mathcal{F}_{t_0}, \mathcal{F}_{t_1}, \ldots, \mathcal{F}_{t_n}$.

Обратно, допустим, что элемент $\mathcal{G}$ является аналитическим продолжением элемента $\mathcal{F}$ вдоль цепочки $\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_n$. Последовательно соединяя центры $a_0, a_1, \ldots, a_n$ кругов элементов $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$, получим ломаную. На каждом звене ломаной, соединяющем точки a_{k-1} и a_k определена функция, которая является продолжением f_{k-1} в U_k. Поскольку расстояние от этого звена до границы $\partial(U_{k-1} \cup U_k)$ положительно, то радиусы сходимости ряда Тейлора рассматриваемой функции в каждой точке отрезка $[a_{k-1}, a_k]$ строго больше нуля. Таким образом, $\mathcal{G}$ является аналитическим продолжением $\mathcal{F}$ вдоль ломаной, соединяющей центры $a_0, a_1, \ldots, a_n$. □

Определение 12.5. Совокупность *всех* канонических элементов, которые получаются из одного какого-либо элемента $\mathcal{F}_0$ аналитическими продолжениями вдоль всех путей, начинающихся в центре элемента $\mathcal{F}_0$, и вдоль которых такое продолжение возможно, называют *полной аналитической* функцией, порождённой элементом $\mathcal{F}_0$.

Заметим, что это определение не зависит от выбора начального элемента. Действительно, если $\mathcal{F}$ получается из $\mathcal{F}_0$ продолжением вдоль пути γ, то $\mathcal{F}_0$ получается из $\mathcal{F}$ продолжением вдоль пути $-\gamma$. Любой элемент, который можно получить из $\mathcal{F}_0$ продолжением вдоль пути λ, можно получить из $\mathcal{F}$ продолжением вдоль пути $-\gamma + \lambda$. Две полные аналитические функции считаются равными, если они имеют хотя бы один общий элемент.

Объединение D кругов сходимости элементов, образующих полную аналитическую функцию, представляет собой область. Действительно, открытость D очевидна. Кроме того, если $a, b \in D$, то найдутся элементы с центрами в этих точках и путь γ, вдоль которого один из них продолжается в другой. Это означает, что каждые две точки из D можно соединить кривой, т. е. D связно.

Иногда под термином «аналитическая функция» (без приставки полная) понимается некоторая совокупность элементов, в которой каждая пара элементов является аналитическим продолжением друг друга вдоль некоторого пути. В этом случае также объединение кругов входящих в это семейство элементов представляет собой область.

Теорема 12.3. *[О монодромии.] Если некоторый элемент $\mathcal{F}$ аналитически продолжаем вдоль любого пути γ, расположенного в односвязной области D, то определяемая продолжениями элемента $\mathcal{F}$ вдоль таких путей аналитическая функция однозначна. Другими словами, аналитические продолжения элемента $\mathcal{F}$ не зависят от формы пути.*

Чтобы подчеркнуть тот факт, что мы рассматриваем многозначную аналитическую функцию, т. е. совокупность элементов, связанных друг с другом аналитическим продолжением, будем использовать обозначение $\mathbb{F}$. Теорема о монодромии утверждает, что совокупность $\mathbb{F}$ всех аналитических продолжений фиксированного элемента вдоль всех путей, расположенных в односвязной области D, является обычной голоморфной функцией в этой области.

Аналитическое продолжение логарифма.

Напомним, что в односвязной области D, которая не содержит точку $z = 0$, выделяется бесконечное (счётное) число регулярных ветвей функции $\ln z$. При этом ветви можно получить по формуле

$$f(z) \,=\, \ln a + \int\limits_{\gamma_z} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

где a — фиксированная точка области D, $\ln a$ — некоторое значение из $\mathrm{Ln}\{a\}$, γ_z — кусочно-гладкая кривая, соединяющая в области D точки a и z. С учётом геометрического смысла интеграла в правой части равенства эту формулу можно записать в виде

$$f(z) \,=\, \ln|z| + i[\arg a + \Delta_{\gamma_z} \arg\zeta].$$

Выбор ветви обусловлен значением $\ln a$ из $\mathrm{Ln}\{a\}$ или $\arg a$ из $\mathrm{Arg}\{a\}$. Кроме того, разложение в ряд Тейлора соответствующей ветви логарифма в окрестности точки $z = a$ имеет вид

$$f(z) \,=\, \ln a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{na^n}(z-a)^n. \tag{12.1}$$

Легко видеть также, что ряд (12.1) сходится в круге $U = \{z\colon\ |z-a| < |a|\}$ и, следовательно, $\mathcal{F} = (U, f)$ является каноническим элементом.

Обозначим через $\mathbb{L}$ совокупность всех канонических элементов $\mathcal{F} = (U, f)$ с центрами $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, у которых радиус круга U равен $|a|$ и функция f определяется по формуле (12.1) с значениями $\ln a$ из $\mathrm{Ln}\{a\}$. Покажем, что $\mathbb{L}$ представляет собой полную аналитическую функцию, которая получается аналитическим продолжением элемента $\mathcal{F}_0 = (U_0, f_0)$, где $U_0 = \{z\colon\ |z-1| < 1\}$ и

$$f_0(z) \,=\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n,$$

т. е. $\mathcal{F}_0 \in \mathbb{L}$ с центром $a = 1$ и $\ln 1 = 0$. При этом аналитическое продолжение элемента $\mathcal{F}_0$ возможно вдоль любого пути γ, выходящего из точки $z = 1$ и не проходящего через начало координат.

Пусть $\gamma\colon\ z = z(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1,$ — путь, который не проходит через начало координат и $z(0) = 1$. Для $\tau \in [0,1]$ обозначим $\gamma_\tau\colon\ z = z(t),\ 0 \leqslant t \leqslant \tau$, часть этого пути. Замечая, что при каждом $t \in [0,1]$ результат интегрирования

$$\int\limits_{\gamma_t} \frac{d\zeta}{\zeta} \,=\, \ln|z| + i\Delta_{\gamma_t} \arg\zeta \,=\, h(t)$$

является значением из $\mathrm{Ln}\{z(t)\}$, т. е. $e^{h(t)} = z(t)$, положим $U_t = \{z\colon |z - z(t)| < |z(t)|\}$ и

$$f_t(z) = h(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(z(t))^n}(z - z(t))^n.$$

Семейство канонических элементов $\mathcal{F}_t = (U_t, f_t)$, $t \in [0,1]$, содержится в $\mathbb{L}$ и является аналитическим продолжением канонического элемента $\mathcal{F}_0$. Действительно, условие (i) очевидным образом выполняется. Для проверки выполнения условия (ii) допустим, что $t_0 \in [0,1]$ и $\delta > 0$ такое, что $z(t) \in U_{t_0}$ при $|t - t_0| < \delta$. Это означает, что при таких значениях t дуга $\gamma_t - \gamma_{t_0}$ содержится в круге U_{t_0}. Поскольку f_{t_0} является регулярной ветвью функции $\ln z$ в круге U_{t_0}, то для тех t, при которых $\gamma_t - \gamma_{t_0} \subset U_{t_0}$, выполняется равенство

$$f_{t_0}(z(t)) = f_{t_0}(z(t_0)) + \int\limits_{\gamma_t - \gamma_{t_0}} \frac{d\zeta}{\zeta} = h(t_0) + (h(t) - h(t_0)) = h(t).$$

Пусть теперь $|t_1 - t_0| < \delta$. Тогда $U_{t_0} \cap U_{t_1} \neq \varnothing$ и для тех t, при которых $\gamma_t - \gamma_{t_0} \subset U_{t_0}$, $\gamma_t - \gamma_{t_1} \subset U_{t_1}$, будут выполняться равенства

$$f_{t_0}(z(t)) = h(t) = f_{t_1}(z(t)).$$

По теореме единственности $f_{t_0}(z) \equiv f_{t_1}(z)$ и элементы $\mathcal{F}_{t_0}$, $\mathcal{F}_{t_1}$ являются непосредственным аналитическим продолжением друг друга.

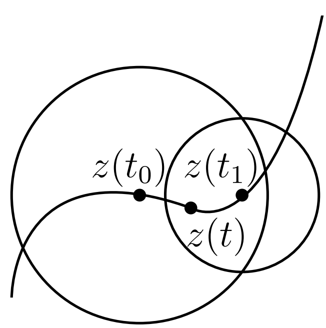

Рис. 5. Продолжение вдоль пути

В силу единственности аналитического продолжения вдоль кривой произвольное аналитическое продолжение $\mathcal{F}_t$, $t \in [0,1]$, элемента $\mathcal{F}_0 \in \mathbb{L}$ вдоль пути γ, не проходящего через начало координат, приводит к элементу $\mathcal{F}_1 \in \mathbb{L}$.

Наконец, пусть $\mathcal{F} = (U, f)$ — произвольный канонический элемент из $\mathbb{L}$ с центром в точке $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и функцией f, определяемой равенством (12.1) с некоторым значением $\ln a$ из $\mathrm{Ln}\{a\}$ и пусть $\theta = \mathrm{Im} \ln a$. Рассмотрим путь $\gamma\colon\ z = z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, который соединяет точки $z(0) = 1$ и $z(1) = a$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\Delta_\gamma \arg \zeta = \theta.$$

Тогда, определяя $\mathcal{F}_t$, $t \in [0,1]$, как и выше, получим $\mathcal{F}$ в качестве аналитического продолжения элемента $\mathcal{F}_0$ вдоль пути γ. Таким образом, мы установили, что $\mathbb{L}$ представляет собой полную аналитическую функцию логарифма.

Такое представление логарифма обладает неудобством в том, что с одним и тем же центром $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ связано бесконечно много элементов аналитической функции. Подход Римана устраняет этот недостаток путём замены области определения аналитической функции. Рассмотрим её структуру на примере логарифма. Пусть $D_0 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ и в этой односвязной области рассмотрим ветвь логарифма

$$f(z) = \ln|z| + i \arg z, \qquad -\pi < \arg z < \pi.$$

Будем считать, что у нас, кроме D_0, бесконечно много копий областей вида $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$: D_k, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Произведём «склейку» этих областей следующим образом.

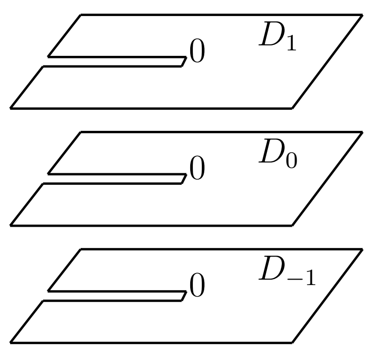

Рис. 6. Листы римановой поверхности

Верхний берег $\mathbb{R}_-$ области D_0 отождествим с нижним берегом $\mathbb{R}_-$ области D_1, а нижний берег $\mathbb{R}_-$ области D_0 отождествим с верхним берегом $\mathbb{R}_-$ области D_{-1}. Далее, верхний берег $\mathbb{R}_-$ области D_1 отождествим с нижним берегом $\mathbb{R}_-$ области D_2, а нижний берег $\mathbb{R}_-$ области D_{-1} отождествим с верхним берегом $\mathbb{R}_-$ области D_{-2}. Продолжая этот процесс, получим риманову поверхность логарифма, которая состоит из бесконечного числа листов D_k, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. На листе D_k функция $\ln z$ определена равенством

$$f(z) = \ln|z| + i \arg z, \qquad (2k-1)\pi < \arg z < (2k+1)\pi,$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Таким образом, функция $f(z)$ становится однозначной за счёт изменения области определения.

Аналогичные построения можно провести для многозначной функции $\sqrt[n]{z}$. Однако здесь получается конечно-листная поверхность. Действительно, определим на D_k функцию

$$g(z) = \sqrt[n]{|z|} \exp\left\{\frac{i}{n} \arg z\right\}, \qquad (2k-1)\pi < \arg z < (2k+1)\pi,$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$. Значения функции $g(z)$ на верхнем берегу $\mathbb{R}_-$ области D_{n-1} совпадают с значениями этой функции на нижнем берегу $\mathbb{R}_-$ области D_0. Поэтому склейка по этим берегам областей D_0 и D_{n-1} даёт n-листную риманову поверхность функции $\sqrt[n]{z}$, на которой она является однозначной.

Точки ветвления.

Многозначные аналитические функции могут иметь изолированные особые точки нового типа по сравнению с теми изолированными особыми точками голоморфных функций, которые были изучены ранее.

Если функция $\mathbb{F}$ аналитична в проколотой окрестности $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ и неоднозначна (каждая точка $z_0 \in \dot{\mathcal{O}}_r(a)$ является центром не одного элемента), то точку a называют *точкой ветвления функции* $\mathbb{F}$. Если каждая точка $z_0 \in \dot{\mathcal{O}}_r(a)$ является центром n различных элементов, то a называется *точкой ветвления алгебраического порядка n*. В случае, когда z_0 является центром бесконечного числа элементов, a называется *точкой ветвления логарифмического порядка.*

Пусть аналитическая функция $\mathbb{F}$, определена элементом $\mathcal{F} = (U, f)$ с центром в точке a и аналитически продолжается вдоль любой части пути $\gamma\colon z = z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, соединяющего точку $a = z(0)$ и точку $b = z(1)$, но не существует элемента с центром в точке b, который являлся бы аналитическим продолжением элемента $\mathcal{F}$. В этом случае точку b будем называть особой точкой функции $\mathbb{F}$. В этой терминологии можно сформулировать теорему Коши— Адамара.

Теорема 12.4. *Пусть степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ имеет ненулевой конечный радиус сходимости R. Тогда на окружности $|z-a| = R$ лежит хотя бы одна особая точка суммы этого степенного ряда.*

Доказательство. Поскольку R является радиусом сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, то $\mathcal{F}_a = (U_a, S)$, где $U_a = \{z\colon |z-a| < R\}$, $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, будет каноническим элементом. Допустим, что на $\gamma_R = \partial U_a$ нет особых точек. Тогда для каждой точки $\zeta \in \gamma_R$ найдётся элемент $\mathcal{F}_\zeta = (U_\zeta, f_\zeta)$ с центром в точке ζ и радиусом $R_\zeta > 0$, который является непосредственным аналитическим продолжением элемента $\mathcal{F}_a$. Семейство кругов U_ζ, $\zeta \in \gamma_R$, образует открытое покрытие компактного множества γ_R. В силу леммы Гейне— Бореля найдется конечное его подпокрытие $U_{\zeta_0}, U_{\zeta_1}, \ldots, U_{\zeta_n}$. Будем считать, что $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$ пронумерованы в порядке, соответствующем положительной ориентации окружности γ_R, и $\zeta_0 = \zeta_n$. В области $D = U_a \cup (\cup_{k=1}^{n} U_{\zeta_k})$ определим функцию

$$f(z) = \begin{cases} f_{\zeta_k}(z), & \text{если} \quad z \in U_{\zeta_k}, \\ S(z), & \text{если} \quad z \in U_a. \end{cases}$$

Эта функция корректно определена, поскольку в пересечении кругов U_{ζ_k} и $U_{\zeta_{k-1}}$ функции f_{ζ_k} и $f_{\zeta_{k-1}}$ совпадают по теореме единственности и в силу того, что $\mathcal{F}_{\zeta_k}$ и $\mathcal{F}_{\zeta_{k-1}}$ являются непосредственными аналитическими продолжениями $\mathcal{F}_a$ и друг друга. Таким образом, $f(z)$ является голоморфной функцией в области D, а $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ является её рядом Тейлора. Но тогда этот ряд должен сходиться в любом круге с центром в точке a и расположенном в области D. С другой стороны, круг U_a содержится в D вместе со своим замыканием, что противоречит предположению о нём, как о круге сходимости нашего степенного ряда. □

Принцип симметрии Римана— Шварца.

Рассмотрим теперь специальный случай аналитического продолжения, когда области D_1 и D_2 не пересекаются, а имеют общий участок границы. Предварительно установим один результат, который иногда называют «теорема о стирании разреза».

Лемма 12.2. *Пусть область D и прямая L такие, что $D \cap L = I \neq \varnothing$. Допустим также, что функция f непрерывна в D и голоморфна на $D \setminus I$. Тогда f является голоморфной и во всей области D.*

Доказательство. Поскольку свойство голоморфности является локальным, то для доказательства леммы достаточно установить голоморфность f в точках множества I, которое представляет собой систему непересекающихся интервалов на прямой L. Пусть a — произвольная точка множества I и $\mathcal{O}_r(a) \subset D$. По предположению f непрерывна в $\mathcal{O}_r(a)$. Поэтому в силу теоремы Морера голоморфность f будет доказана, если установить равенство нулю интегралов от функции f по границе каждого треугольника, расположенного в $\mathcal{O}_r(a)$. Заметим, что прямая L пересекает круг $\mathcal{O}_r(a)$ по диаметру и делит его на два полукруга U^+ и U^-.

Пусть теперь Δ — треугольник, который вместе с замыканием содержится в $\mathcal{O}_r(a)$. Если Δ полностью содержится в U^+ или U^-, то равенство

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

следует из теоремы Коши. Пусть $\Delta^+ = \Delta \cap U^+$ и $\Delta^- = \Delta \cap U^-$. Тогда

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(z)dz = \int\limits_{\partial\Delta^+} f(z)dz + \int\limits_{\partial\Delta^-} f(z)dz.$$

Однако, интегралы в правой части равенства равны нулю по теореме Коши и лемма доказана. □

Следующий результат известен как *принцип симметрии Римана— Шварца.*

Теорема 12.5. *Пусть D — область, симметричная относительно вещественной оси, и $D^+ = \{z \in D\colon\ \operatorname{Im} z > 0\}$, $D^- = \{z \in D\colon\ \operatorname{Im} z < 0\}$, $I = D \cap \mathbb{R}$. Допустим, что f является непрерывной на $D^+ \cup I$, голоморфной в D^+ и принимает вещественные значения на I. Тогда она имеет аналитическое продолжение во всю область D, где удовлетворяет соотношению симметрии*

$$f(z) = \overline{f(\overline{z})}.$$

Доказательство. Определим в области D функцию F посредством равенств

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & \text{если} \quad z \in D^+ \cup I, \\ \overline{f(\overline{z})}, & \text{если} \quad z \in D^-. \end{cases}$$

Теорема будет доказана, если мы установим голоморфность функции F в области D. Голоморфность F в D^+ следует из её определения и предположений теоремы. Пусть $z_0 \in D^-$ и $r > 0$ такое, что $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D^-$. Тогда в $\mathcal{O}_r(z_0)$ функция F определяется по нижней формуле и

$$\lim_{z\to z_0} \frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{\overline{f(\overline{z})} - \overline{f(\overline{z_0})}}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \overline{\left(\frac{f(\overline{z})-f(\overline{z_0})}{\overline{z}-\overline{z_0}}\right)} = \overline{f'(\overline{z_0})}.$$

Таким образом, F голоморфна в $D \setminus I$.

Покажем, что F непрерывна в D. Для этого остаётся проверить непрерывность в точках на I. Пусть $x_0 \in I$ и $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности f на $D^+ \cup I$ найдётся такое $\delta > 0$, что $|f(z) - f(x_0)| < \varepsilon$ при $z \in \mathcal{O}_\delta(x_0) \cap [D^+ \cup I]$. Но тогда для $z \in \mathcal{O}_\delta(x_0) \cap D^-$ будем иметь $\overline{z} \in \mathcal{O}_\delta(x_0) \cap D^+$ и в силу вещественности значения $f(x_0)$ получаем

$$|F(z) - f(x_0)| = |\overline{f(\overline{z})} - f(x_0)| = |f(\overline{z}) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Поскольку $x_0 \in I$ и $\varepsilon > 0$ выбирались произвольно, то непрерывность F на I, а, следовательно, и в D доказана. Утверждение о голоморфности F в области D следует из леммы. □

Доказанная теорема имеет очевидные обобщения в связи с тем, что любые две окружности C_1 и C_2 в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ можно отобразить друг на друга с помощью дробно-линейного преобразования. Область D можно выбирать симметричной относительно окружности C_1, а в качестве I тогда будет выступать пересечение $C_1 \cap D$. Если функция f голоморфна в части D^+ области D, которая расположена внутри круга, ограниченного C_1, непрерывна на $D^+ \cup I$ и принимает значения $f(z) \in C_2$, когда $z \in I$, то её можно продолжить аналитически во всю область D. При этом пары точек z_1, z_2, симметричных относительно C_1, будут переходить в пары точек $f(z_1), f(z_2)$ симметричных относительно C_2. Принцип симметрии Римана—Шварца часто используется для построения конформных отображений.

§ 13. Гармонические функции и задача Дирихле

Напомним, что под гармонической в области D функцией понимается вещественнозначная дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(z) = u(x, y)$, $z = x + iy$, удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

В силу линейности оператора Лапласа линейная комбинация двух гармонических функций также является гармонической функцией. Ранее было показано, что если $f(z) = u(z) + iv(z)$ является голоморфной в области D функцией, то вещественная часть $u(z) = u(x, y)$ и мнимая часть $v(z) = v(x, y)$ представляют собой гармонические в области D функции.

Теорема 13.1. *Пусть D — односвязная область. Тогда для всякой гармонической в D функции $u(z)$ найдётся такая голоморфная в D функция $f(z)$, что $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ для всех $z \in D$.*

Доказательство. Определим в области D функцию g посредством равенства

$$g(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z),$$

$z = x + iy$. Поскольку функция $u(z) = u(x, y)$ является дважды непрерывно дифференцируемой, то комплекснозначная функция g дифференцируема в вещественном смысле. Кроме того, вещественная и мнимая части функции $g(z)$ удовлетворяют условиям Коши—Римана, что является следствием гармоничности функции $u(z)$. Следовательно, функция $g(z)$ является дифференцируемой в комплексном смысле, т. е. голоморфна в области D. В силу того, что D является односвязной областью, для функции $g(z)$ существует первообразная $f(z)$ в этой области. Используя аддитивную константу, первообразную $f(z) = U(z) + iV(z)$ можно выбрать так, чтобы для некоторой точки $z_0 \in D$ выполнялось равенство $U(z_0) = u(z_0)$. Из представления производной

$$f'(z) = U'_x(z) - iU'_y(z)$$

и равенства $f'(z) = g(z)$ следует, что у функций $U(z)$ и $u(z)$ частные производные по x и по y совпадают. Это вместе с равенством $U(z_0) = u(z_0)$ влечёт тождество $U(z) \equiv u(z)$. Таким образом,

$$u(z) = U(z) = \operatorname{Re} f(z)$$

и теорема доказана. □

Следствие 13.1. *Всякая гармоническая в произвольной области D функция $u(z) = u(x, y)$ является бесконечно дифференцируемой.*

Доказательство. Пусть z_0 — произвольная точка области D. В силу того, что D — открытое множество, найдётся $r > 0$ такое, что $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$. Поскольку круг $\mathcal{O}_r(z_0)$ представляет собой односвязную область, то найдётся голоморфная в $\mathcal{O}_r(z_0)$ функция $f(z)$, для которой $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$ при $z \in \mathcal{O}_r(z_0)$. Таким образом, бесконечная дифференцируемость функции $u(z) = u(x, y)$ (по x и по y) следует из бесконечной дифференцируемости голоморфной функции $f(z)$. □

В одномерном случае уравнение Лапласа сводится к равенству нулю второй производной. Решениями этого уравнения являются функции вида $u(x) = ax + b$. Ряд свойств гармонических функций аналогичен свойствам линейных функций.

Теорема 13.2. *[Принцип экстремума.] Непостоянная гармоническая в области D функция $u(z)$ не может достигать локального максимума или минимума во внутренней точке области.*

Доказательство. Допустим, что $u(z_0)$ является наибольшим (или наименьшим) значением функции $u(z)$ в некоторой окрестности $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$. По предыдущей теореме найдётся такая голоморфная в $\mathcal{O}_r(z_0)$ функция f, для которой $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$ при $z \in \mathcal{O}_r(z_0)$. Но тогда по принципу экстремума для вещественной части голоморфной функции $f(z) \equiv \mathrm{const}$ в $\mathcal{O}_r(z_0)$. Следовательно, и $u(z) \equiv \mathrm{const}$ в $\mathcal{O}_r(z_0)$. Чтобы распространить это на всю область D, снова рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z),$$

которая определена и голоморфна во всей области D. Однако в $\mathcal{O}_r(z_0)$ имеет место равенство $g(z) = f'(z) = 0$. По теореме единственности для голоморфных функций $g(z) \equiv 0$ в D. Следовательно, у функции $u(x, y)$ частные производные u'_x, u'_y тождественно равны нулю во всей области D. Это значит, что $u(z) \equiv \mathrm{const}$ в D и теорема доказана. □

Из принципа экстремума сразу же следуют два варианта теоремы единственности для гармонических функций. Заметим при этом, что поскольку разность двух гармонических функций также является гармонической функцией, то условие совпадения двух гармонических функций можно сформулировать в виде условий равенства нулю гармонической функции.

Теорема 13.3. *[Единственности.] Пусть $u(z)$ — гармоническая в области D функция и выполнено одно из условий:*

(i) $u(z) = 0$ *в некоторой окрестности* $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$*;*

(ii) область D ограничена, а функция $u(z)$ непрерывно продолжается в замыкание $\overline{D}$ области D и $u(z) = 0$ при $z \in \partial D$.

Тогда $u(z) \equiv 0$ в области D.

Доказательство. Допустим вначале, что выполнено условие (i). Это означает, что функция $u(z)$ достигает локального максимума (и минимума) в точке z_0. Но в силу принципа экстремума тогда гармоническая функция $u(z)$ должна быть тождественно постоянной, т. е. $u(z) \equiv 0$ в D.

Допустим теперь, что выполнено условие (ii). На ограниченном замкнутом множестве $\overline{D}$ непрерывная функция $u(z)$ должна достигать своего максимума и минимума. Однако в силу принципа экстремума максимум и минимум гармонической функции не может достигаться во внутренних точках области, если $u(z) \not\equiv \mathrm{const}$. Поскольку на границе ∂D функция $u(z)$ принимает только одно значение, равное нулю, то $u(z) \equiv 0$ в области D и теорема доказана. □

Замечание 13.1. Утверждение теоремы о том, что из условия (i) следует тождественное обращение в нуль гармонической в области D функции, называют внутренней теоремой единственности. Действительно, если две гармонические функции $u_1(z)$ и $u_2(z)$ совпадают в некоторой окрестности $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$, то их разность $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$ должна быть тождественным нулём в области D, т. е. $u_1(z) \equiv u_2(z)$ в D.

Замечание 13.2. Утверждение теоремы о том, что из условия (ii) следует тождественное обращение в нуль гармонической в области D функции, даёт теорему единственности решения задачи Дирихле. Под классической *задачей Дирихле* понимается задача отыскания гармонической в области D и непрерывной в замыкании $\overline{D}$ функции $u(z)$ по заданным граничным значениям.

Пример. В связи с различными обобщениями задачи Дирихле полезно рассмотреть следующий пример гармонической в единичном круге $\mathbb{D}$ функции, которая непрерывно продолжается во все точки единичной окружности $\mathbb{T}$, за исключением одной $\zeta = 1$. Пусть $L(z) = (1+z)/(1-z)$ — дробно-линейное преобразование единичного круга на правую полуплоскость. Точка $\zeta = 1$ переходит в бесконечно удалённую точку. Вещественная часть

$$u(z) = \operatorname{Re} L(z) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$$

является гармонической в $\mathbb{D}$ функцией и принимает нулевые значения на $\mathbb{T} \setminus \{1\}$. Из отображающих свойств $L(z)$ видно, что линиями уровня функции $u(z)$ являются окружности, которые касаются единичной окружности $\mathbb{T}$ в точке $\zeta = 1$.

Следующий результат с учётом теоремы Каратеодори позволяет редуцировать задачу Дирихле с произвольной односвязной области D, ограниченной жордановой кривой, на единичный круг.

Теорема 13.4. *[Конформная инвариантность.] Пусть $u(z)$ — гармоническая в области G функция, а $f(z)$ является голоморфной в области D и принимает значения из G, т. е. $f(D) \subset G$. Тогда $v(z) = u(f(z))$ является гармонической в области D функцией.*

Доказательство. Если $f(z) \equiv \mathrm{const}$, то и $v(z) \equiv \mathrm{const}$, т. е. является гармонической функцией. Допустим теперь, что $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$. Фиксируем произвольно точку $z_0 \in D$ и пусть $w_0 = f(z_0)$. В силу принципа открытости (или сохранения области) найдётся $\varrho > 0$ такое, что $\mathcal{O}_\varrho(w_0) \subset f(D)$. Поскольку $\mathcal{O}_\varrho(w_0)$ является односвязной областью, то найдётся голоморфная в ней функция $g(w)$, для которой $\operatorname{Re} g(w) = u(w)$ при всех $w \in \mathcal{O}_\varrho(w_0)$. В силу непрерывности f найдётся $r > 0$ такое, что $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$ и $f(\mathcal{O}_r(z_0)) \subset \mathcal{O}_\varrho(w_0)$. Но тогда в окрестности $\mathcal{O}_r(z_0)$ будет выполняться равенство $v(z) = \operatorname{Re} g(f(z))$. Таким образом, функция $v(z)$ является гармонической в окрестности $\mathcal{O}_r(z_0)$, поскольку в этой окрестности она представима как вещественная часть голоморфной функции. Поскольку z_0 выбиралось произвольно, то $v(z)$ гармонична в области D и теорема доказана. $\square$

Доказанная теорема чаще всего применяется в случае, когда f является конформным отображением. Этим объясняется её название. Гармонические функции обладают также важным свойством среднего значения, которое используется при численном моделировании.

Теорема 13.5. *[О среднем.] Пусть $u(z)$ — гармоническая в круге $\mathcal{O}_r(z_0)$ и непрерывная в замыкании $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)}$ функция. Тогда*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} u(z_0 + r\zeta)|d\zeta|,$$

где $\mathbb{T}$ — положительно ориентированная единичная окружность.

Доказательство. Вначале заметим, что в силу односвязности круга найдётся такая голоморфная в $\mathcal{O}_r(z_0)$ функция $f(z)$, что $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$ при всех $z \in \mathcal{O}_r(z_0)$. Для каждого $\varrho \in (0, r)$ применима интегральная формула Коши, согласно которой

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\varrho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta,$$

где γ_ϱ — положительно ориентированная окружность $|\zeta - z_0| = \varrho$. Используя параметризацию $\gamma_\varrho \colon \zeta = z_0 + \varrho e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, равенство выше можно переписать в виде

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + \varrho e^{i\theta}) d\theta.$$

Отделяя в обеих частях этого равенства вещественную часть, получаем

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(z_0 + \varrho e^{i\theta}) d\theta.$$

В силу непрерывности функции $u(z)$ в замкнутом круге $|z - z_0| \leqslant r$ в интеграле можно осуществить предельный переход при $\varrho \nearrow r$, что приводит к утверждению теоремы. □

Теорема 13.6. *[Формула Пуассона.] Пусть $u(z)$ — гармоническая в единичном круге $\mathbb{D}$ и непрерывная в его замыкании $\overline{\mathbb{D}}$ функция. Тогда для всех $a \in \mathbb{D}$ выполняется равенство*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1 - |a|^2}{|e^{i\theta} - a|^2} u(e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1 - |a|^2}{|\varkappa - a|^2} u(\varkappa) |d\varkappa|. \tag{13.1}$$

Доказательство. В случае $a = 0$ равенство (13.1) выражает теорему о среднем. Допустим теперь, что $a \neq 0$ и рассмотрим дробно-линейное преобразование

$$L(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a} z},$$

которое конформно отображает единичный круг $\mathbb{D}$ на себя и $L(a) = 0$. Определим функцию $v(z) = u \circ L^{-1}(z)$. В силу конформной инвариантности свойства гармоничности функция $v(z)$ также будет гармонической в $\mathbb{D}$. Кроме того, она будет непрерывна в $\overline{\mathbb{D}}$ и $v(0) = u(a)$. Поэтому, применяя теорему о среднем к функции $v(z)$, получаем

$$u(a) = v(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} u(L^{-1}(\zeta)) |d\zeta|.$$

Выполним в интеграле замену переменной

$$\varkappa = L^{-1}(\zeta), \qquad \zeta = L(\varkappa), \qquad d\zeta = L'(\varkappa) d\varkappa$$

и перепишем полученное равенство в виде

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} u(\varkappa)|L'(\varkappa)||d\varkappa| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} u(\varkappa)\frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}\varkappa|^2}|d\varkappa|.$$

Поскольку при $\varkappa \in \mathbb{T}$ имеет место равенство

$$|1-\overline{a}\varkappa| = |\overline{\varkappa}-\overline{a}| = |\varkappa - a|,$$

то полученное соотношение для $u(a)$ эквивалентно (13.1). □

Равенство (13.1) известно как формула Пуассона, которая восстанавливает гармоническую в $\mathbb{D}$ и непрерывную в $\overline{\mathbb{D}}$ функцию $u(z)$ по её значениям на границе $\mathbb{T}$. Таким образом, формула Пуассона даёт конструктивное решение классической задачи Дирихле для единичного круга $\mathbb{D}$, если известно, что решение существует. Далее мы покажем, что для любой непрерывной на $\mathbb{T}$ функции задача Дирихле разрешима. Мы докажем разрешимость даже более общей задачи, когда на границе $\mathbb{T}$ задаётся не обязательно непрерывная функция.

Интеграл Пуассона.

Пусть φ — интегрируемая (абсолютно по Риману или по Лебегу) на $\mathbb{T}$ вещественнозначная функция. Тогда для $z \in \mathbb{D}$ определён интеграл

$$P(z;\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}\varphi(e^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|\varkappa - z|^2}\varphi(\varkappa)|d\varkappa|,$$

который называется *интегралом Пуассона* с плотностью φ. Выражение

$$(1-|z|^2)/|\varkappa - z|^2$$

называют *ядром Пуассона*. Легко видеть, что для $z \in \mathbb{D}$ и $\varkappa \in \mathbb{T}$ имеет место равенство

$$\frac{1-|z|^2}{|\varkappa - z|^2} = \operatorname{Re}\frac{\varkappa + z}{\varkappa - z}.$$

Выражение $(\varkappa + z)/(\varkappa - z)$ называют *ядром Шварца* и для плотности φ определён также *интеграл Шварца*

$$S(z;\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\varkappa + z}{\varkappa - z}\varphi(\varkappa)|d\varkappa|.$$

Связь

$$\operatorname{Re} S(z;\varphi) = P(z;\varphi)$$

между интегралами Пуассона и Шварца с одной и той же плотностью позволяет использовать методы теории аналитических функций при изучении свойств интеграла Пуассона.

Теорема 13.7. *Пусть φ — интегрируемая на единичной окружности $\mathbb{T}$ вещественнозначная функция. Тогда $S(z;\varphi)$ является голоморфной в единичном* *круге $\mathbb{D}$ функцией. Кроме того, если φ обращается в нуль на некоторой открытой дуге $\gamma \subset \mathbb{T}$, то $S(z;\varphi)$ аналитически продолжается через γ во внешность единичного круга и на γ функция $S(z;\varphi)$ принимает чисто мнимые значения.*

Доказательство. Пусть z_0 — произвольная точка единичного круга $\mathbb{D}$. Выберем $r > 0$, меньшим половины расстояния от z_0 до $\mathbb{T}$. Поскольку

$$S(z;\varphi) - S(z_0;\varphi) \;=\; \frac{z - z_0}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\varkappa\varphi(\varkappa)}{(\varkappa - z)(\varkappa - z_0)} |d\varkappa|,$$

то для $z \in \dot{O}_r(z_0)$ имеет место следующее

$$\left| \frac{S(z;\varphi) - S(z_0;\varphi)}{z - z_0} - \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\varkappa\varphi(\varkappa)}{(\varkappa - z_0)^2} |d\varkappa| \right| \;=\; \frac{|z - z_0|}{\pi} \left| \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\varkappa\varphi(\varkappa)}{(\varkappa - z)(\varkappa - z_0)^2} |d\varkappa| \right|$$

$$\leqslant\; \frac{|z - z_0|}{4\pi r^3} \int\limits_{\mathbb{T}} |\varphi(\varkappa)||d\varkappa|.$$

Отсюда следует комплексная дифференцируемость функции $S(z;\varphi)$ в точке z_0. Поскольку z_0 выбиралось произвольно, то голоморфность $S(z;\varphi)$ в $\mathbb{D}$ доказана.

Пусть теперь $\varphi(\varkappa) = 0$ на открытой дуге $\gamma \subset \mathbb{T}$. Для любого $z_0 \in \gamma$ расстояние от z_0 до $\mathbb{T} \setminus \gamma$ будет положительным и поскольку в этом случае

$$S(z;\varphi) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}\setminus\gamma} \frac{\varkappa + z}{\varkappa - z} \varphi(\varkappa) |d\varkappa|,$$

то рассуждения, аналогичные проведенным в случае $z_0 \in \mathbb{D}$, приводят к непрерывности и комплексной дифференцируемости функции $S(z;\varphi)$ на дуге γ. Кроме того, поскольку

$$\operatorname{Re} \frac{\varkappa + z}{\varkappa - z} \;=\; \frac{1 - |z|^2}{|\varkappa - z|^2} \;=\; 0$$

при $z \in \gamma$ и $\varkappa \in \mathbb{T} \setminus \gamma$, то $\operatorname{Re} S(z;\varphi) = 0$ на γ. Аналитическое продолжение $S(z;\varphi)$ через дугу γ следует из принципа симметрии Римана— Шварца. Теорема доказана. $\square$

Следствие 13.2. *Для любой интегрируемой плотности φ интеграл Пуассона $P(z;\varphi)$ является гармонической в единичном круге $\mathbb{D}$ функцией, а если плотность φ обращается в нуль на некоторой открытой дуге $\gamma \subset \mathbb{T}$, то $P(z;\varphi)$ гармонически продолжается через γ во внешность единичного круга и $P(z;\varphi) = 0$ при $z \in \gamma$.*

Отметим три важных свойства интеграла Пуассона.

1. Линейность. $P(z;\varphi_1 + \varphi_2) = P(z;\varphi_1) + P(z;\varphi_2)$, $P(z;\alpha\varphi) = \alpha P(z;\varphi)$, где $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ — плотности, а α — число.

2. Монотонность. Если $\varphi(\varkappa) \geqslant 0$ для всех $\varkappa \in \mathbb{T}$, то $P(z;\varphi) \geqslant 0$ для всех $z \in \mathbb{D}$.

3. $P(z;1) \equiv 1$ и $\inf\limits_{\varkappa\in\mathbb{T}} \varphi(\varkappa) \leqslant P(z;\varphi) \leqslant \sup\limits_{\varkappa\in\mathbb{T}} \varphi(\varkappa)$.

Доказательство. Линейность является следствием свойств интеграла.

Для доказательства монотонности заметим, что ядро Пуассона

$$\frac{1-|z|^2}{|\varkappa - z|^2} \,=\, \mathrm{Re}\,\frac{\varkappa + z}{\varkappa - z}$$

представляет собой неотрицательную функцию на $\mathbb{T}$ при всех $z \in \mathbb{D}$. Поэтому, умножая ядро Пуассона на неотрицательную плотность $\varphi(\varkappa)$, получим в результате интегрирования по $\mathbb{T}$ неотрицательную функцию от z в $\mathbb{D}$.

Приступая к доказательству третьего свойства, заметим сразу же, что равенство $P(z;1) \equiv 1$ является следствием интегральной формулы Пуассона для гармонической функции $u(z) \equiv 1$. Пусть теперь

$$\alpha \,=\, \inf_{\varkappa\in\mathbb{T}} \varphi(\varkappa), \qquad \beta \,=\, \sup_{\varkappa\in\mathbb{T}} \varphi(\varkappa).$$

Тогда в силу свойств монотонности и линейности получаем

$$\alpha \,\equiv\, P(z;\alpha) \,\leqslant\, P(z;\varphi) \,\leqslant\, P(z;\beta) \,\equiv\, \beta. \qquad \square$$

Теорема 13.8. *Пусть φ — функция, интегрируемая на $\mathbb{T}$ и непрерывная в точке $\varkappa_0 \in \mathbb{T}$. Тогда*

$$\lim_{z\,\to\,\varkappa_0} P(z;\varphi) \,=\, \varphi(\varkappa_0).$$

Доказательство. Фиксируем произвольно $\varepsilon > 0$ и выберем дугу $\gamma \subset \mathbb{T}$ с центром в точке $\varkappa_0$ так, чтобы для всех $\varkappa \in \gamma$ выполнялось неравенство

$$|\varphi(\varkappa) - \varphi(\varkappa_0)| \,<\, \varepsilon/2.$$

Это можно сделать в силу непрерывности φ в точке $\varkappa_0$. Определим на $\mathbb{T}$ две плотности

$$\varphi_1(\varkappa) \,=\, \begin{cases} \varphi(\varkappa) - \varphi(\varkappa_0) & \text{при} \quad \varkappa \in \gamma, \\ 0 & \text{при} \quad \varkappa \in \mathbb{T}\setminus\gamma \end{cases}$$

и

$$\varphi_2(\varkappa) \,=\, \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \varkappa \in \gamma, \\ \varphi(\varkappa) - \varphi(\varkappa_0) & \text{при} \quad \varkappa \in \mathbb{T}\setminus\gamma. \end{cases}$$

Поскольку $P(z;\varphi(\varkappa_0)) \equiv \varphi(\varkappa_0)$, то

$$P(z;\varphi) - \varphi(\varkappa_0) \,=\, P(z;\varphi_1) + P(z;\varphi_2).$$

Заметим теперь, что $P(z;\varphi_2)$ непрерывно продолжается на дугу γ и обращается на ней в нуль. Следовательно, найдётся такое $\delta > 0$, что

$$|P(z;\varphi_2)| \,<\, \varepsilon/2 \qquad \text{при} \qquad |z - \varkappa_0| \,<\, \delta.$$

Кроме того, из свойств интеграла Пуассона следует также, что

$$|P(z;\varphi_1)| \,\leqslant\, \sup_{\varkappa\in\gamma} |\varphi(\varkappa) - \varphi(\varkappa_0)| \,\leqslant\, \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, для любого $z \in \mathbb{D}$, удовлетворяющего условию $|z - \varkappa_0| < \delta$ выполняется неравенство

$$|P(z;\varphi) - \varphi(\varkappa_0)| \,\leqslant\, |P(z;\varphi_1)| + |P(z;\varphi_2)| \,<\, \varepsilon. \qquad \square$$

Доказанная теорема показывает, что не только классическая задача Дирихле (отыскание гармонической функции, которая на границе совпадала бы с заданной непрерывной функцией) разрешима посредством конструкции интеграла Пуассона для единичного круга $\mathbb{D}$, но и более общая задача, когда заданная на $\mathbb{T}$ функция φ не является непрерывной. В частности, можно рассмотреть случай кусочно-непрерывной граничной функции φ.

Задача Дирихле для кусочно-непрерывных граничных условий.

Пусть на единичной окружности $\mathbb{T}$ определена функция φ, которая непрерывна на $\mathbb{T}$, за исключением конечного числа точек $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m$, в которых она терпит разрывы первого рода.

Задача: *найти ограниченную гармоническую в $\mathbb{D}$ функцию $u(z)$, которая непрерывно продолжается на $\overline{\mathbb{D}} \setminus K$, $K = \{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m\}$, и совпадает с φ на $\mathbb{T} \setminus K$.*

Решение этой задачи даёт интеграл Пуассона с плотностью φ, т. е. $u(z) = P(z; \varphi)$. Докажем единственность решения поставленной задачи.

Допустим, что u_1 и u_2 — два решения. Тогда $U(z) = u_1(z) - u_2(z)$ будет гармонической в $\mathbb{D}$ и непрерывной на $\overline{\mathbb{D}} \setminus K$ функцией. При этом $U(\varkappa) = 0$ при $\varkappa \in \mathbb{T} \setminus K$. Нам нужно показать, что $U(z) \equiv 0$ в $\mathbb{D}$. Пусть

$$M = \sup_{z \in \mathbb{D}} |U(z)|, \quad d = \min_{i \neq j} |\varkappa_i - \varkappa_j|, \quad \varkappa_k = e^{i\theta_k}, \quad \theta_k \in [0, 2\pi),\ k = 1, \ldots, m.$$

Фиксируем произвольно ε, $0 < \varepsilon < d/2$, и определим дуги

$$\gamma_k^\varepsilon\colon\ z(\theta) = e^{i\theta},\ \theta_k - \frac{\varepsilon}{2} < \theta < \theta_k + \frac{\varepsilon}{2}, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Рассмотрим на $\mathbb{T}$ две плотности, определяемые равенствами

$$\varphi_\varepsilon^\pm(\varkappa) = \begin{cases} \pm M & \text{при} \quad \varkappa \in \Lambda_\varepsilon = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \gamma_k^\varepsilon, \\ 0 & \text{при} \quad \varkappa \in \mathbb{T} \setminus \Lambda_\varepsilon. \end{cases}$$

Интегралы Пуассона с этими плотностями $U_\varepsilon^\pm(z) = P(z; \varphi_\varepsilon^\pm)$ представляют собой гармонические в $\mathbb{D}$ функции и удовлетворяют условиям $U_\varepsilon^+(z) \geqslant 0$, $U_\varepsilon^-(z) \leqslant 0$ при $z \in \mathbb{D}$.

В силу принципа экстремума для гармонических функций $U_\varepsilon^+(z) - U(z) \geqslant 0$, $U(z) - U_\varepsilon^-(z) \geqslant 0$ при $z \in \mathbb{D}$. Действительно, если $z_n \to \varkappa \in \mathbb{T}$ при $n \to \infty$, то

$$\varliminf_{n \to \infty} [U_\varepsilon^+(z_n) - U(z_n)] \geqslant 0.$$

Для $\varkappa \in \mathbb{T} \setminus K$ это следует из того, что $U(z_n) \to 0$ при $n \to \infty$, а $U_\varepsilon^+(z_n) \geqslant 0$ при всех n. В случае $\varkappa \in K$ это следует из того, что $U_\varepsilon^+(z_n) \to M$ при $n \to \infty$, а $U(z_n) \leqslant M$ для всех n. Следовательно, если

$$\inf_{z \in \mathbb{D}} [U_\varepsilon^+(z) - U(z)] = \alpha < 0,$$

то можно выбрать подпоследовательность $\{z_n\}$ такую, что

$$\lim_{n \to \infty} [U_\varepsilon^+(z_n) - U(z_n)] = \alpha.$$

Из этой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{z_{n_j}\}$. Её предел z^* не может принадлежать $\mathbb{T}$, поскольку

$$\lim_{j\to\infty}[U_\varepsilon^+(z_{n_j}) - U(z_{n_j})] = \alpha < 0.$$

Следовательно, $z^* \in \mathbb{D}$ и в ней достигается минимум гармонической функции $U_\varepsilon^+(z) - U(z)$, что противоречит принципу экстремума. Таким образом, $U_\varepsilon^+(z) \geqslant U(z)$ при всех $z \in \mathbb{D}$. Аналогично устанавливается, что $U_\varepsilon^-(z) \leqslant U(z)$ при $z \in \mathbb{D}$. С другой стороны, для $z \in \mathbb{D}$ имеем

$$\begin{aligned} |U_\varepsilon^\pm(z)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k^\varepsilon} \frac{1-|z|^2}{|\varkappa - z|^2}\varphi_\varepsilon^\pm(\varkappa)|d\varkappa|\right| \\ &\leqslant \frac{M}{2\pi}\frac{1+|z|}{1-|z|}\sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k^\varepsilon} |d\varkappa| = \frac{M}{2\pi}\frac{1+|z|}{1-|z|} n\varepsilon. \end{aligned}$$

Но тогда и

$$|U(z)| \leqslant \varepsilon\frac{nM}{2\pi}\frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Поскольку ε выбиралось произвольно из промежутка $(0, d/2)$, то в полученном неравенстве можно осуществить предельный переход при $\varepsilon \to 0$ и мы приходим к равенству $U(z) = 0$.

Результаты, связанные с решением задачи Дирихле в единичном круге, можно перенести с использованием теорем Римана и Каратеодори на области, ограниченные жордановыми кривыми.