Лекции для ФПМИ (ФУПМ)
Глава 29. МЕРА И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Бесов О.В.

19 апреля 2022 г.

Изложение материала в этой главе построено на основе соответствующей части из [2]. Будут использованы обозначениями и некоторые сведения из главы 18 [1].

§29.1. Мера Лебега

Везде далее под $\mathbb{R}^n$ понимается метрическое пространство, элементами которого являются наборы $x = (x_1, ..., x_n)$ из n действительных чисел с введенным расстоянием $|x-y| = \sqrt[2]{\sum_1^n (x_i - y_i)^2}$. Из всех подмножеств $\mathbb{R}^n$ будет выделена совокупность измеримых по Лебегу множеств, каждому из которых будет приписана мера, называемая мерой Лебега. Будут изучаться свойства совокупности измеримых по Лебегу множеств и свойства меры.

Определение 1. *Множество $P \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее соотношению*

$$\prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \subset P \subset \prod_{i=1}^n [b_i - a_i],$$

где $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leq b_i$ $(i = 1, ..., n)$,

называется блоком.

Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется блочным, если оно представимо в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся блоков.

Определение 2. *Непустая совокупность множеств называется кольцом множеств, если она замкнута относительно операций объединения, пересечения и разности двух произвольных множеств этой совокупности.*

Совокупность блочных множеств является кольцом множеств.

Мера блочного множества

$$A = \bigcup_{k=1}^m P_k, \qquad P_i \cap P_k = \emptyset \text{ при } i \neq k,$$

(где P_k — блоки) определяется равенством

$$\mu A = \sum_{k=1}^m \mu P_k.$$

Лемма 1 (§18.1)**.** *Пусть* A, B *— блочные множества. Тогда*

1° *(неотрицательность и монотонность меры)*

$$0 \le \mu A \le \mu B, \text{ если } A \subset B;$$

2° *(аддитивность меры)*

$$\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B, \text{ если } A \cap B = \varnothing;$$

3° *(полуаддитивность меры)*

$$\mu(A \cup B) \le \mu A + \mu B.$$

Лемма 2 (счётная ($\sigma-$)полуаддитивность меры на блочных множествах)**.** *Пусть* B *— блочное множество,* $\{B_k\}$ *— конечная или счётная система блочных множеств, и*

$$B \subset \bigcup_k B_k.$$

Тогда

$$\mu B \le \sum_k \mu B_k.$$

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое замкнутое блочное множество $B_{(\varepsilon)} \subset B$, что

$$\mu B_{(\varepsilon)} \ge \mu B - \varepsilon.$$

Для каждого B_k можно найти открытое блочное множество $\widetilde{B}_k \supset B_k$, удовлетворяющее условию

$$\mu \widetilde{B}_k \le \mu B_k + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Поскольку $B_{(\varepsilon)} \subset \bigcup_k \widetilde{B}_k$, из $\{\widetilde{B}_k\}$ можно выбрать (по лемме Гейне–Бореля) конечную систему $\widetilde{B}_{k_1}, ..., \widetilde{B}_{k_s}$, покрывающую $B_{(\varepsilon)}$. При этом в силу леммы 1 $\mu B_{(\varepsilon)} \le \sum_{i=1}^{s} \mu \widetilde{B}_{k_i}$. Следовательно,

$$\mu B \le \mu B_{(\varepsilon)} + \varepsilon \le \sum_{i=1}^{s} \mu \widetilde{B}_{k_i} + \varepsilon \le \sum_k \mu B_k + \sum_k \frac{\varepsilon}{2^k} + \varepsilon = \sum_k \mu B_k + 2\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 3 (счётная (σ-)аддитивность меры на блочных множествах)**.** *Пусть* B, B_k *— блочные множества,* $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, $B_j \cap B_k = \emptyset$ *при* $j \ne k$. *Тогда*

$$\mu B = \sum_{k=1}^{\infty} \mu B_k.$$

Доказательство. В силу монотонности и аддитивности меры блочных множеств при любом N

$$\mu B \ge \mu(\bigcup_{k=1}^{N} B_k) = \sum_{k=1}^{N} \mu B_k,$$

откуда

$$\mu B \ge \sum_{k=1}^{\infty} \mu B_k.$$

В силу леммы 2 имеет место и противоположное неравенство. Этим утверждение леммы установлено.

Определение 3.

(J). Внешней мерой Жордана множества $E \subset \mathbb{R}^n$ называется

$$\mu^J E := \inf_{\bigcup_{i=1}^k P_i \supset E} \sum_{i=1}^k \mu P_i,$$

где нижняя грань берётся по всевозможным покрытиям множества E конечной системой блоков $\{P_i\}$.

(L). Внешней мерой Лебега множества $E \subset \mathbb{R}^n$ называется

$$\mu^L E := \inf_{\bigcup_i P_i \supset E} \sum_i \mu P_i,$$

где нижняя грань берётся по всевозможным покрытиям множества E конечной или счётной системой блоков $\{P_i\}$.

Вместо покрывающей системы блоков в этом определении можно, конечно, взять покрывающую систему блочных множеств $\{B_i\}$.

В определении $\mu^L E$ сумма $\sum_i \mu P_i$ является либо конечной суммой, либо суммой ряда.

Если B — блочное множество, то легко видеть, что $\mu^J B = \mu^L B = \mu B$.

Символом $E \Delta F := (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$ обозначается далее симметрическая разность множеств E и F.

Определение 4. *(J). Множество E называется измеримым по Жордану (J-измеримым), если для любого $\varepsilon > 0$ существует блочное множество B, такое, что*

$$\mu^J(E \Delta B) < \varepsilon.$$

Внешняя мера Жордана, рассматриваемая лишь на J-измеримых множествах, называется мерой Жордана.

(L). Множество E называется измеримым по Лебегу (L-измеримым), если для любого $\varepsilon > 0$ существует блочное множество B, такое, что

$$\mu^L(E \Delta B) < \varepsilon.$$

Внешняя мера Лебега, рассматриваемая лишь на L-измеримых множествах, называется мерой Лебега.

Упражнение. Доказать, что приведённое определение J-измеримости множества эквивалентно данному в §18.1.

Замечание 1. *Измеримое по Жордану множество является, очевидно, измеримым по Лебегу. Обратное неверно. В качестве подтверждающего примера рассмотрим при $n = 1$ множество E рациональных точек отрезка $[0, 1]$. Оно не измеримо по Жордану (пример 3 из § 18.2).*

Покажем, что E измеримо по Лебегу и имеет меру Лебега, равную нулю. Рассмотрим последовательность $\{r_k\}$, содержащую все точки этого множества (занумерованные в произвольном порядке), и покроем E объединением $\frac{\varepsilon}{2^k}$-окрестностей этих точек. Внешняя лебегова мера этого покрытия E не превосходит 2ε. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что $\mu^L E = 0$, так что мера Лебега множества E равна нулю.

Замечание 2. *Критерий измеримости по Жордану (ограниченного) множества состоит в том, что жорданова мера границы этого множества равна нулю (§18.1). Этот критерий не переносится на меру Лебега. Например, измеримое по Лебегу множество E из предыдущего замечания имеет границу $\partial E = [0,1]$, мера Лебега которой равна единице.*

В §18.2 доказано, что совокупность J-измеримых множеств образует кольцо.

Далее будем изучать лишь меру Лебега, обозначаемую символом μ. L-измеримые множества будем называть измеримыми. Будем рассматривать лишь множества, лежащие в кубе $Q = [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$. Символом $E' = Q \setminus E$ обозначим дополнение E до куба Q.

Лемма 4. *Пусть E, F — измеримые множества. Тогда их объединение, пересечение, разность и симметрическая разность, а также дополнения до Q измеримы.*

Доказательство. Докажем сначала, что объединение двух измеримых множеств E и F измеримо. Для всякого $\varepsilon > 0$ существуют такие блочные множества A,B, что

$$\mu^L(E\Delta A) < \varepsilon,\ \mu^L(F\Delta B) < \varepsilon.$$

Положим $C = A \cup B$. Тогда

$$(E \cup F)\Delta C \subset (E\Delta A) \cup (F\Delta B),$$

откуда $\mu^L((E \cup F)\Delta C) < 2\varepsilon$, что в силу произвольности $\varepsilon > 0$ доказывает измеримость $E \cup F$.

Измеримость E' равносильна измеримости E, поскольку $E'\Delta A' = E\Delta A$.

Измеримость пересечения, разности и симметрической разности двух измеримых множеств E, F следует из равенств

$$(E \cap F)' = E' \cup F', \quad E \setminus F = E \cap F', \quad E\Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E).$$

В качестве примера покажем, что $(E \cap F)' \subset E' \cup F'$:

$$x \in (E \cap F)' \Rightarrow x \notin E \cap F \Rightarrow [x \notin E \text{ или } x \notin F] \Rightarrow [x \in E' \text{или } x \in F'] \Rightarrow x \in E' \cup F.$$

Аналогично показывается, что $E' \cup F' \subset (E \cap F)'$ и доказываются последние два равенства .

Лемма 5 (счётная (σ-)полуаддитивность внешней меры Лебега)**.** *Если $E \subset \bigcup_i E_i$, где $\{E_i\}$ — конечная или счётная система множеств, то*

$$\mu^L E \le \sum_i \mu^L E_i.$$

В частности, если $E \subset F$, то $\mu^L E \le \mu^L F$.

Доказательство. По определению внешней меры для каждого E_i найдётся такое блочное множество $B_i \supset E_i$, что $\mu B_i \le \mu E_i + \frac{\varepsilon}{2^i}$, где $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно. Тогда $E \subset \bigcup_i B_i$, и в силу определения $\mu^L E$

$$\mu^L E \le \sum_i \mu B_i < \sum_i \mu E_i + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε отсюда вытекает утверждение леммы.

Лемма 6. *Для любых множеств* E, F, G, H

$$|\mu^L E - \mu^L F| \leq \mu^L(E\Delta F),$$

$$|\mu^L(E \cup F) - \mu^L(G \cup H)| \leq \mu^L(E\Delta G) + \mu^L(F\Delta H).$$

Доказательство. Так как $E \subset F \cup (E\Delta F)$, то в силу леммы 5

$$\mu^L E \leq \mu^L F + \mu^L(E\Delta F), \ \mu^L E - \mu^L F \leq \mu^L(E\Delta F).$$

Отсюда вытекает первое утверждение леммы. Второе утверждение леммы доказывается аналогично.

Эта лемма будет применяться для измеримых множеств.

Теорема 1. *(аддитивность меры). Пусть* E, F *— непересекающиеся измеримые множества. Тогда*

$$\mu(E \cup F) = \mu E + \mu F.$$

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют такие блочные множества A, B, что $\mu(E\Delta A) < \varepsilon, \ \mu(F\Delta B) < \varepsilon$. Т.к. на совокупности блочных множеств мера аддитивна, то

$$|\mu(A \cup B) - \mu A - \mu B| = \mu(A \cap B).$$

Покажем, что отсюда следует оценка

$$|\mu(E \cup F) - \mu E - \mu F| \leq 6\varepsilon.$$

В самом деле, в силу леммы 6 $|\mu A - \mu E| \leq \mu(A\Delta E) < \varepsilon, \ |\mu B - \mu F| \leq \mu(B\Delta F) < \varepsilon$,

$$|\mu(A \cup B) - \mu(E \cup F)| \leq \mu(A\Delta E) + \mu(B\Delta F) < 2\varepsilon.$$

Т.к. множества E, F не пересекаются,

$$A \cap B \subset [E \cup (A\Delta E)] \cap [F \cup (B\Delta F)] \subset \{[E \cup (A\Delta E)] \cap F\} \cup (F\Delta B) \subset$$

$$\subset (E \cap F) \cup (E\Delta A) \cup (F\Delta B) = (E\Delta A) \cup ((F\Delta B),$$

и в силу леммы 5 $\mu(A \cap B) < 2\varepsilon$.

Этим нужная оценка получена и доказательство теоремы завершено.

Теорема 2. *Объединение и пересечение счётного числа измеримых множеств измеримы.*

Доказательство. Пусть $\{E_i\}$ — счётная система измеримых множеств и $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Заменив при необходимости E_i на $E_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} E_k$, можем считать, что множества E_i попарно не пересекаются. В силу леммы 4 все множества E_i измеримы. В силу теоремы 1 и монотонности внешней меры при любом конечном N

$$\sum_{i=1}^{N} \mu E_i = \mu(\bigcup_{i=1}^{N} E_i) \leq \mu^L E.$$

Поэтому ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\mu E_i$ сходится, так что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое N, что

$$\sum_{i>N}\mu E_i < \varepsilon.$$

Так как множество $F = \bigcup_{i=1}^{N} E_i$ измеримо (как объединение конечного числа измеримых множеств), то существует блочное множество B такое, что $\mu^L(F\Delta B) < \varepsilon$. Поскольку

$$E\Delta B \subset (F\Delta B) \cup (\bigcup_{i>N} E_i),$$

то $\mu^L(E\Delta B) < 2\varepsilon$, т.е. E измеримо.

Так как дополнения измеримых множеств измеримы, то утверждение теоремы относительно пересечений вытекает иэ равенства

$$\bigcap_i E_i = Q \setminus \bigcup_i (Q \setminus E_i).$$

Кольцо множеств называется $\sigma-$кольцом, если оно вместе с каждой последовательностью множеств $E_1, E_2, ...$ содержит их объединение $\bigcup_i E_i$. Из леммы 4 и доказанной теоремы следует, что совокупность измеримых множеств (содержащихся в Q) является $\sigma-$кольцом множеств.

Теорема 3 (σ-аддитивность меры Лебега)**.** *Пусть $\{E_i\}$ — последовательность попарно непересекающихся измеримых множеств и $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Тогда E измеримо и*

$$\mu E = \sum_{i=1}^{\infty}\mu E_i.$$

Доказательство. Измеримость E установлена в теореме 2.

В силу аддитивности меры

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{N} E_i) = \sum_{i=1}^{N}\mu E_i \leq \mu E, \text{ откуда } \sum_{i=1}^{\infty}\mu E_i \leq \mu E.$$

С другой стороны, из леммы 5 имеем $\mu E \leq \sum_1^{\infty}\mu E_i$. Из последних двух неравенств получаем утверждение теоремы.

Из $\sigma-$аддитивности вытекает следующее свойство меры Лебега, называемое непрерывностью.

Теорема 4 (непрерывность меры Лебега)**.** *Пусть $E_1 \supset E_2 \supset ...$ — последовательность вложенных друг в друга измеримых множеств и $E = \bigcap E_i$.*

Тогда

$$\mu E = \lim_{i\to\infty}\mu E_i.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $E = \emptyset$; общий случай сводится к этому заменой E_i на $E_i \setminus E$. Имеем при $k \in N$

$$E_k = (E_k \setminus E_{k+1}) \cup (E_{k+1} \setminus E_{k+2}) \cup ...,$$

причём множества в этом объединении попарно не пересекаются. В силу $\sigma-$аддитивности меры

$$\mu E_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i \setminus E_{i+1}).$$

Так как ряд сходится. то его остаток

$$\mu E_k = \sum_{i=k}^{\infty} \mu(E_i \setminus E_{i+1}) \to 0 \text{ при } k \to 0.$$

Следствие 1. *Если $E_1 \subset E_1 \subset ...$ — расширяющаяся последовательность измеримых множеств и $E = \bigcup_i E_i$, то*

$$\mu E = \lim_{i \to \infty} \mu E_i.$$

Для доказательства достаточно перейти от множеств E_i к их дополнениям и воспользоваться непрерывностью меры.

Приведём некоторые замечания о совокупности измеримых по Лебегу множеств. Всякое открытое множество, принадлежащее Q, измеримо, т.к. его можно представить в виде объединения конечного или счётного числа блоков и применить теорему 2. Замкнутые множества, принадлежащие Q измеримы, т.к. являются дополнениями открытых множеств. Согласно теореме 2 измеримы все те множества, которые могут быть получены из открытых и замкнутых с помощью конечного или счётного числа операций взятия счётных сумм или пересечений. Однако, этими множествами не исчерпываются все измеримые множества.

Построение неизмеримого множества приведено в [2].

НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНЕНИЯ. 1° До сих пор рассматривались ограниченные множества, содержащиеся в кубе $Q = [0,1]^n$. Понятие $L-$измеримости распространяется на множества, и не являющиеся подмножествами Q. Представим $\mathbb{R}^n$ как объединение полуоткрытых кубов $P_m = [0,1)^n + m,\ m = (m_1, ..., m_n),\ m_i-$целые числа. Будем говорить, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо, если его пересечения $E_m = E \cap P_m$ с каждым из этих кубов измеримо. При этом положим по определению

$$\mu E = \sum_m \mu E_m.$$

Ряд, стоящий справа может и расходиться. Поэтому мера может принимать и бесконечные значения. Все свойства измеримых множеств и меры, установленные выше, переносятся и на этот случай. Нужно учитывать лишь, что объединение счётного числа измеримых множеств конечной меры может иметь бесконечную меру.

2° Введенное понятие меры Лебега в одномерном случае (n=1) опирается на понятие длины промежутка (интервала, полуинтервала, отрезка). Можно ввести понятие меры и иным, более общим способом.

Пусть F–некоторая неубывающая. непрерывная слева функция на прямой. Меру μ_F для промежутков введём следующим образом.

$$\mu_F(a,b) = F(b) - F(a+0), \quad \mu_F[a,b] = F(b+0) - F(a),$$

$$\mu_F(a,b] = F(b+0) - F(a+0), \quad \mu_F[a,b) = F(b) - F(a).$$

Так определённая функция промежутка μ_F неотрицательна и аддитивна. Применяя к ней рассуждения, аналогичные приведенным выше, можно построить меру μ_F на подмножествах прямой. Совокупность множеств, измеримых относительно данной меры, будет замкнута относительно операций взятия счётных объединений и пересечений, а мера μ_F будет σ-аддитивна. Класс множеств, измеримых относительно μ_F будет зависеть от выбора функции F. Однако при любом выборе F открытые и замкнутые множества, а следовательно, и все их счётные объединения и пересечения будут измеримы. Меры, получаемые таким образом, называются мерами Лебега–Стилтьеса. В частности, функции $F(t) = t$ отвечает обычная мера Лебега на прямой.

3° Если мера μ_F такова, что она равна 0 для любого множества, обычная мера Лебега μ которого равна 0, то мера μ_F называется абсолютно непрерывной (относительно меры μ) .Если мера μ_F целиком сосредоточена на конечном или счётном множестве точек (а это будет в том случае, когда множество значений функции F конечно или счётно), то она называется дискретной. Мера μ_F называется сингулярной, если она равна 0 для любого одноточечного множества, но имеется такое множество E лебеговой меры 0, что мера μ_F его дополнения равна 0. Можно показать, что всякая мера μ_F представима как сумма абсолютно непрерывной, дискретной и сингулярной мер.

Список литературы

[1] Бесов О.В., *Лекции по математическому анализу.* М., ФИЗМАТЛИТ, 2020.

[2] Колмогоров А.Н., Фомин С.В., *Элементы теории функций и функционального анализа.* М., НАУКА, 1976.