СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Модели экономического роста сразу стали популярны с самого момента своего возникновения, благодаря своей универсальности. Их применяли к различным объектам во всевозможных экономических структурах. В математической экономике имеются признанные во всем мире макромодели экономической динамики Харрода–Домара и Солоу, представленные как в научной, так и в учебной литературе [1–12]. На этих моделях и их модификациях сосредоточено основное внимание в данном пособии. Несмотря на то, что эти модели значительно отличаются друг от друга, их сравнительный анализ довольно содержателен. Эти модели также довольно удобны для постановок задач оптимального управления потреблением. Обилие различных обобщений этих моделей экономического роста свидетельствует о повышенной актуальности научной мысли в этом направлении.

В настоящих условиях повышенного интереса к особенностям крупномасштабных экономических явлений особенное значение приобретают точные аналитические методы, выделяющие определяющие зависимости между основными экономическими показателями. В настоящем пособии одним из основных является вариационный метод. Этим методом ищется максимум интегральной дисконтированной полезности потребления. Вариационная постановка изучаемых в настоящем пособии задач оптимизации очень удобна и вполне достаточна для полноценного и обстоятельного исследования. Сначала ограничиваемся лишь гладкими возмущениями. При этом разнообразные ограничения не дают возможности полностью довериться использованию классических вариационных методов, поэтому привлекаются элементы различных методов оптимизации. Применяются также элементы теории задач Коши для дифференциальных уравнений, а также элементы теории краевых задач.

В настоящем пособии найдены и исследованы постановки оптимизационных задач с ограничениями различного рода, которые следуют из естественных экономических условий для моделей роста. Задачи этого типа заключаются в отыскании максимума функционала, выражающего интегральную дисконтированную полезность потребления при наличии дифференциального уравнения связи. Проинтегрированы уравнения Эйлера, которые получены на основании вариационного метода. Исследованы ограничения на потребление, а также фазовые ограничения. Рассмотрены постановки задач Понтрягина и Дубовицкого–Милютина.

§ 1. Расширение математической модели Харрода–Домара

Здесь приведено точное решение задачи Коши для дифференциального уравнения модели макроэкономической динамики Харрода–Домара с переменным коэффициентом приростной капиталоемкости, являющимся функцией времени [13]. Ранее были известны решения этой задачи лишь при постоянном коэффициенте капиталоемкости прироста дохода [12].

Дифференциальное уравнение модели макроэкономической динамики Харрода–Домара с экзогенной динамикой потребления произвольного характера [12, 13] имеет вид

$$Y(t) = C(t) + BY'(t). \tag{1.1}$$

Эта модель с непрерывным временем t, описывающая динамику дохода $Y(t)$, который в силу базового уравнения различных моделей экономического роста – основного макроэкономического тождества, рассматривается как сумма потребления $C(t)$ и инвестиций $I(t)$. Под $Y(t)$ обычно понимают валовый внутренний продукт, отождествляемый с национальным доходом. Модель Р. Харрода и Е. Домара анализирует различные траектории народнохозяйственного роста в зависимости от динамики совокупного потребления $C(t)$ и общих инвестиций $I(t)$. Экономика считается закрытой, поэтому чистый экспорт равен нулю, а государственные расходы в модели не выделяются. Основная предпосылка модели роста – скорость роста дохода – пропорциональна инвестициям, которая основана на принципе акселерации дохода $Y(t)$ инвестициями [6, с. 205; 12, 13]:

$$I(t) = BY'(t),$$

где B – коэффициент капиталоемкости прироста дохода, или приростной капиталоемкости, а $\frac{1}{B}$ – предельный продукт капитала, или предельная фондоотдача на макроэкономическом уровне. До сих пор коэффициент приростной капиталоемкости считался положительным и постоянным [12, 14]:

$$B = \text{const} > 0. \tag{1.2}$$

Для случая (1.2) решение дифференциального уравнения (1.1) известно [12] и дается формулой

$$Y(t) = Y_0 e^{\frac{t-t_0}{B}} - \frac{1}{B}\int_{t_0}^{t} C(\tau) e^{\frac{t-\tau}{B}} d\tau . \qquad (1.3)$$

Здесь предполагается выполненным начальное условие

$$Y(t_0) = Y_0 > 0, \qquad (1.4)$$

которое вместе с уравнением (1.1) образует задачу Коши.

Особенность настоящего параграфа заключается в предположении, что

$$B = B(t). \qquad (1.5)$$

Как известно [13], при условиях (1.4) и (1.5) решение дифференциального уравнения (1.1) будет даваться формулой

$$Y(t) = Y_0 e^{\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{B(s)}} - e^{\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{B(s)}} \int_{t_0}^{t} \frac{C(\tau)}{B(\tau)} e^{-\int_{t_0}^{\tau}\frac{ds}{B(s)}} d\tau . \qquad (1.6)$$

Поскольку (1.1) есть линейное уравнение первого порядка с переменными коэффициентами, то формула (1.6) выводится стандартным методом [15]. В справедливости (1.6) можно убедиться и непосредственно, подставив эту формулу в уравнение (1.1) и в начальное условие (1.4). Для подстановки (1.6) в (1.1) нужно будет воспользоваться теоремой о производной интеграла по верхнему пределу [16].

Формула (1.3), очевидно, является частным случаем (1.6), если $B = \mathrm{const} > 0$ (1.2). В этом легко убедиться простой проверкой.

Полученное в настоящем параграфе точное решение задачи Коши, состоящей из дифференциального уравнения модели макроэкономической динамики Харрода–Домара (1.1) и начального условия (1.4), дающееся формулой (1.6), является новым. Экономическая убедительность предположения (1.2), а значит, и формулы (1.6) будет следовать из сравнительного анализа модели Харрода–Домара с моделью Солоу. Экономически это можно объяснить усиливающейся динамичностью технического прогресса и быстрой сменяемостью современных экономических условий.

§ 2. Математическая модель Солоу

В этом параграфе рассматривается модель Солоу [3, 4] (см. также [6–11]). Отметим, что способы изложения этой модели довольно разнообразны [6–11].

В модели Солоу средняя фондовооруженность, или капиталовооруженность k, удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка, которое, как мы покажем в дальнейшем, будет получено из уравнения баланса для фондов:

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho f(k),\ k(0) = k_0 > 0, \tag{2.1}$$

и начальному условию

$$k(0) = k_0 > 0. \tag{2.2}$$

Уравнение (2.1) и условие (2.2) являются задачей Коши.

Здесь $k = \dfrac{K}{L}$, где K – фонды; а L – трудовые ресурсы, или число занятых; время t измеряется в годах, ρ – норма накопления (доля валовых инвестиций в валовом внутреннем продукте). Аналогично [7] норму накопления будем считать постоянной: $\rho = \text{const}$, $0 < \rho < 1$;

$$f(k) = \frac{F(K, L)}{L} = F(k, 1), \tag{2.3}$$

где $F(K, L)$ – неоклассическая производственная функция [7, 8, 17]. При этом $\lambda = \mu + \nu$, где μ – доля выбывших за год основных производственных фондов, которую мы также аналогично [7] считаем постоянной: $\mu = \text{const}$, а ν – годовой темп прироста числа занятых (темп прироста трудовых ресурсов), то есть

$$\frac{1}{L}\frac{dL}{dt} = \nu\ . \tag{2.4}$$

На μ и ν накладываются ограничения:

$0 < \mu < 1$, $-1 < \nu < 1$,.

Уравнение баланса для фондов будет иметь вид

$$\frac{dK}{dt} = \rho Y - \mu K, \tag{2.5}$$

и тогда для капиталовооруженности мы можем записать цепочку равенств

$$\frac{dk}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{K_t' L - K L_t'}{L^2} = \frac{K_t'}{L} - K\frac{L_t'}{L^2} = \frac{\rho Y - \mu K}{L} - \nu\frac{K}{L},$$

откуда и следует уравнение (2.1).

Исследования переходного режима [7, 8] проводились, когда производственная функция $F(K,L)$ является функцией Кобба–Дугласа [7, 8, 14]. Действительно, при такой производственной функции $f(k)$ получается умноженной на константу степенной функцией [7, 8], и уравнение (2.1) после несложной замены решается в элементарных функциях.

Дифференциальное уравнение задачи Коши (2.1) имеет стационарное решение $k = k_*$, где k_* является положительным корнем уравнения

$$\rho f(k) - \lambda k = 0. \tag{2.6}$$

Предполагается, что k_0 и k_* находятся на рассматриваемом промежутке фондовооруженности. Рассматривая $k \neq k_*$ из дифференциального уравнения (2.1) получим

$$\frac{dk}{\rho f(k) - \lambda k} = dt.$$

Интегрируя последнее уравнение с учетом начального условия задачи Коши (2.2), получаем следующее интегральное уравнение:

$$\int_{k_0}^{k} \frac{ds}{\rho f(s) - \lambda s} = t. \tag{2.7}$$

Полученное уравнение определяет функцию $k = k(t)$.

Отметим, что для получения уравнения (2.7) нужно, чтобы подынтегральная функция левой части уравнения (2.7), то есть

$$\frac{1}{\rho f(k) - \lambda k},$$

была бы интегрируема на рассматриваемом промежутке. Достаточные условия для этого могут быть сформулированы по-разному. Можно накладывать условия на функцию $f(k)$, как это сделано в [11], а можно накладывать условия на неоклассическую производственную функцию $F(K,L)$ и пользоваться при этом равенством (2.3).

Чтобы убедиться, что константа интегрирования в уравнении (2.7) подобрана правильно, то есть из интегрального уравнения (2.7) следует задача Коши (2.1), (2.2) достаточно сначала положить в (2.7) $k = k_0$ и получить начальное условие (2.2), а затем продифференцировать обе части (2.7) по времени, пользуясь тем, что $k = k(t)$, применив формулу дифференцирования интеграла по верхнему пределу [16], и получить уравнение (2.1).

Для выполнения основного условия переходного режима модели Солоу [7, 8]

$$k_\infty = \lim_{t \to +\infty} k(t) = k_*, \tag{2.8}$$

нужно, чтобы уравнение (2.6) имело один положительный корень k_* на рассматриваемом промежутке фондовооруженности и несобственный интеграл

$$\int_{k_0}^{k_*} \frac{ds}{\rho f(\mathrm{s}) - \lambda s} \tag{2.9}$$

был расходящимся. Это следует из предельного перехода при $t \to +\infty$ в уравнении (2.7) с учетом (2.8).

Эти условия: существование единственного положительного корня $k_* \neq k_0$ уравнения (2.6) на рассматриваемом промежутке фондовооруженности, который включает в себя и k_0, и расходимость несобственного интеграла (2.9), суть условия, которые должны быть наложены на гладкую функцию произвольного характера $f(k)$, индуцируемую (2.3) неоклассической производственной функцией $F(K,L)$ для существования переходного режима в модели Солоу.

Отметим, что если известно решение задачи Коши (2.1), (2.2), то легко находятся все эндогенные переменные, поскольку

$$Y = F(K,L) = C + I\,, \tag{2.10}$$

где конечный продукт Y используется на непроизводительное потребление C и инвестиции I.

Остановимся подробнее на модели Солоу с производственной функцией Кобба–Дугласа [7, 8, 14]:

$$F(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha},\ A = \text{const} > 0,\ 0 < \alpha < 1. \tag{2.11}$$

Подставляя (2.11) в формулу (2.3), получим

$$f(k) = \frac{F(K,L)}{L} = F(k,1) = Ak^{\alpha}. \tag{2.12}$$

С учетом (2.12) уравнение (2.1) упростится

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho A k^{\alpha}. \tag{2.13}$$

Уравнение (2.13) является уравнением Бернулли [15], решив его с учетом начального условия (2.2) при дополнительном условии

$$\lambda = \text{const}, \tag{2.14}$$

будем иметь

$$k(t) = e^{-\lambda t}\left[\frac{\rho A}{\lambda}e^{\lambda(1-\alpha)t} - \frac{\rho A}{\lambda} + k_0^{\,1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{2.15}$$

Найдем капиталоемкость прироста дохода для (2.15), то есть для капиталовооруженности модели экономического роста Солоу для производственной функции Кобба–Дугласа (2.11) при дополнительном условии (2.14).

Основываясь на основной предпосылке модели Харрода–Домара, определения нормы накопления модели Солоу и формулы баланса (2.10), справедливой для обеих моделей, имеем

$$I(t) = BY'(t) = \rho Y. \tag{2.16}$$

Исходя из (2.16) и вспоминая, что капиталоемкость прироста дохода согласно нашему предположению зависит от времени, мы выражаем $Y'(t)$:

$$Y'(t) = \frac{\rho}{B(t)} Y(t). \qquad (2.17)$$

Интегрируя (2.17), получим

$$Y(t) = e^{\rho \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{B(s)}},$$

где

$$\rho \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{B(s)}$$

– показатель роста дохода. Выражая теперь капиталоемкость прироста дохода из (2.16), будем иметь

$$B(t) = \frac{I(t)}{Y'(t)} = \frac{\rho F(K,L)}{\frac{d}{dt}\left[F(K,L)\right]} = \frac{\rho k}{(\nu - \alpha\nu - \alpha\mu)k + \alpha\rho A k^{\alpha}}. \qquad (2.18)$$

Для получения формулы (2.18) воспользуемся сначала формулами (2.16) и (2.10):

$$B(t) = \frac{I(t)}{Y'(t)} = \frac{\rho Y(t)}{Y'(t)} = \frac{\rho F(K,L)}{\frac{d}{dt}\left[F(K,L)\right]}.$$

Применим к правой части последней формулы равенства (2.11):

$$B(t) = \frac{\rho A K^{\alpha} L^{1-\alpha}}{A\left[\alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} \frac{dK}{dt} + (1-\alpha) K^{\alpha} L^{-\alpha} \frac{dL}{dt}\right]}.$$

Разделим числитель и знаменатель правой части последней дроби на $AK^{\alpha-1}$ и умножим их же на L^{α}:

$$B(t) = \frac{\rho K L}{\alpha L \frac{dK}{dt} + (1-\alpha) K \frac{dL}{dt}}.$$

Применим теперь к правой части последнего равенства формулы (2.4) и (2.5):

$$B(t) = \frac{\rho KL}{\alpha L(\rho Y - \mu K) + \nu(1-\alpha)KL}.$$

Снова применяем к правой части последней формулы левое равенство (2.10) и формулу для производственной функции Кобба–Дугласа (2.11):

$$B(t) = \frac{\rho KL}{\alpha L(\rho AK^{\alpha} L^{1-\alpha} - \mu K) + \nu(1-\alpha)KL}.$$

Упрощая правую часть последнего, получим

$$B(t) = \frac{\rho KL}{\alpha\rho AK^{\alpha} L^{2-\alpha} - \mu KL + (\nu - \alpha\nu)KL}.$$

Разделим правую часть последнего равенства на L^2:

$$B(t) = \frac{\rho(K/L)}{\alpha\rho A(K/L)^{\alpha} + (\nu - \alpha\mu - \alpha\nu)(K/L)}.$$

Применяя к правой части последнего определение капиталовооруженности $k = \dfrac{K}{L}$, получаем правую часть формулы (2.18).

Формула (2.18) показывает, что наше предположение первого параграфа, а именно непостоянство капиталоемкости прироста дохода по времени, оправдано [18, 19].

Уравнение (2.13) можно рассматривать и в более общем случае, то есть без ограничения (2.14), предполагая, что

$$\lambda \neq \mathrm{const}, \qquad (2.19)$$

а является интегрируемой функцией времени $\lambda = \lambda(t)$. Это возможно, поскольку годовой темп прироста числа занятых (темп прироста трудовых ресурсов), то есть (2.4), не является постоянным.

Уравнение (2.13) является уравнением Бернулли [15], решив его с учетом начального условия (2.2) при дополнительном условии (2.19), будем иметь

$$k(t)=e^{-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau}\left[\rho A(1-\alpha)\int_0^t e^{(1-\alpha)\int_0^s \lambda(\tau)d\tau} ds + k_0^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \qquad (2.20)$$

Простой проверкой можно убедиться, что из (2.20) при (2.14) получается формула (2.15). То есть (2.20) является прямым обобщением (2.15).

§ 3. Оптимальное управление потреблением в расширенной модели Харрода–Домара

В расширении модели Харрода–Домара формула (1.6) определяет доход через потребление. Возникает вопрос: откуда брать потребление? Для определения потребления можно поставить задачу оптимального управления.

Задачу оптимального управления в самом общем виде ставим, как задачу максимизации интегральной дисконтированной полезности потребления [20, 21]:

$$\int_{t_0}^{t_1} u\left(C\left(t\right)\right)\exp(-\delta t)dt \Rightarrow \max, \qquad (3.1)$$

где $\delta > 0$ – коэффициент дисконтирования. Здесь мы воспользовались аналогией с задачами оптимального управления потреблением в экономике домашнего хозяйства [22–24]. Следуя [22–24], считаем, что полезность потребления оценивается функцией $u(C)$, которая описывает постоянное отвращение к риску по Эрроу–Пратту:

$$a=-\frac{u''(C)C}{u'(C)}\geq 0. \qquad (3.2)$$

Экономический смысл (3.2) ясен из обозначения

$$g(C)=u'(C). \qquad (3.3)$$

Тогда $g(C)$ является предельной полезностью потребления. Далее, с учетом (3.2) и (3.3)

$$g'(C) = u''(C), \; E_C(g) = \frac{g'(C)}{g(C)/C} = \frac{u''(C)C}{u'(C)} = -a.$$

Здесь $E_C(g)$ – эластичность изменения переменной g по переменной C. Далее, мы предполагаем, что $g(C)$ – функция монотонно невозрастающая, и поэтому $a \geq 0$. Противоположное предположение возрастания $g(C)$, очевидно, связано с риском. Поэтому, случай, когда $g(C)$ не возрастает, естественно назвать отвращением к риску.

Рассматривая (3.2) как дифференциальное уравнение, поскольку потребление положительно, получим

$$\frac{a}{C} = -\frac{u''(C)}{u'(C)}.$$

Интегрируя последнее, будем иметь

$$a\int \frac{dC}{C} = \alpha \ln|C| = -\int \frac{u''(C)}{u'(C)} dC = -\ln|u'(C)| + \text{const} = \ln\left|\frac{C_0}{u'(C)}\right|.$$

Пользуясь монотонным возрастанием логарифмической функции, имеем

$$|C|^a = \left|\frac{C_0}{u'(C)}\right|.$$

Пользуясь положительностью потребления и полагая $|C_0| = \gamma > 0$ из последнего равенства, с учетом (3.3) получаем

$$C^a = \frac{\gamma}{u'(C)} = \frac{\gamma}{g(C)},$$

или, принимая во внимание также (3.3),

$$u'(C) = g(C) = \frac{\gamma}{C^a} = \gamma C^{-a}. \tag{3.4}$$

Интегрируя (3.4), имеем

$$u(C)=\begin{cases}\dfrac{\gamma C^{1-a}}{1-a}+\chi,\ a\neq 1;\\ \gamma\ln C+\chi,\ a=1;\end{cases}\quad \gamma=\mathrm{const}>0,\chi=\mathrm{const}\,. \tag{3.5}$$

Далее, выражаем потребление из уравнения (1.1) и подставляем в левую часть (3.1):

$$J(Y)=\int_{t_0}^{t_1}u(Y-B(t)Y')\exp(-\delta t)dt\,. \tag{3.6}$$

Рассматривая разность

$$J(Y+h)-J(Y)=\Delta J(Y,h)\,, \tag{3.7}$$

получим

$$\Delta J(Y,h)=\int_{t_0}^{t_1}u(Y+h-B(t)(Y'+h'))\exp(-\delta t)dt-\int_{t_0}^{t_1}u(Y-B(t)Y')\exp(-\delta t)dt\,\cdot$$

Воспользуемся теперь линейностью интеграла

$$\Delta J(Y,h)=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}[u(Y+h-B(t)(Y'+h'))-u(Y-B(t)Y')]\exp(-\delta t)dt\,. \tag{3.8}$$

Поскольку

$$u(Y+h-B(t)(Y'+h'))-u(Y-B(t)Y')=$$

$$=u(Y-B(t)Y'+h-B(t)h')-u(Y-B(t)Y')\,,$$

то, пользуясь равенством

$$Y-B(t)Y'=C(t)\,,$$

которое следует из уравнения (1.1), будем иметь

$$u(Y+h-B(t)(Y'+h'))-u(Y-B(t)Y')=$$

$$=u(C(t)+h-B(t)h')-u(C(t))\,. \tag{3.9}$$

Подставляя (3.9) в (3.8), получаем

$$\Delta J(Y,h)=\int_{t_0}^{t_1}[u(C(t)+h-B(t)h')-u(C(t))]\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt\,. \tag{3.10}$$

Разностный множитель подынтегральной функции правой части (3.10) разложим по формуле Тейлора до второго порядка включительно с остаточным членом в форме Пеано [16]:

$$u(C(t)+h-B(t)h')=u(C(t))+u'(C(t))[h-B(t)h']+$$

$$+\frac{1}{2}u''(C(t))[h-B(t)h']^2+R(t)\,. \tag{3.11}$$

В (3.6) для остаточного члена справедливо равенство

$$R(t)=\mathrm{o}[h-B(t)h']^2 \text{ при } h-B(t)h'\to 0\,. \tag{3.12}$$

Подставим теперь (3.11) и (3.12) в (3.10):

$$\Delta J(Y,h)=\int_{t_0}^{t_1}u'(C(t))[h-B(t)h']\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}u''(C(t))[h-B(t)h']^2\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt+\int_{t_0}^{t_1}R(t)e^{-\delta t}dt\,. \tag{3.13}$$

Используя интегрирование по частям, запишем цепочку равенств

$$-\int_{t_0}^{t_1}u'(C(t))B(t)h'\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt=-\int_{t_0}^{t_1}u'(C(t))B(t)\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dh=$$

$$=-u'(C(t))B(t)\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,h\Big|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}h\frac{d}{dt}[u'(C(t))B(t)\,\mathrm{e}^{-\delta t}]dt\,. \tag{3.14}$$

Заметим, что мы рассматриваем простейшую вариационную задачу, то есть задачу с закрепленными концами, поэтому помимо начального условия (1.4) имеет место и условие на правом конце:

$$Y(t_1) = Y_1 > 0\,. \tag{3.15}$$

На основании (1.4) и (3.15) для функции $h = h(t)$ справедливы равенства

$$h(t_0) = h(t_1) = 0\,. \tag{3.16}$$

На основании (3.16) первое слагаемое правой части (3.14) обращается в нуль и равенство (3.14) упростится:

$$-\int_{t_0}^{t_1} u'(C(t))B(t)h'\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} h\frac{d}{dt}[u'(C(t))B(t)\,\mathrm{e}^{-\delta t}]dt\,. \tag{3.17}$$

Благодаря (3.17) из (3.13) следует справедливость равенства

$$\Delta J(Y,h) = \int_{t_0}^{t_1} h\{u'(C(t))\,\mathrm{e}^{-\delta t} + \frac{d}{dt}[u'(C(t)B(t)\,\mathrm{e}^{-\delta t}]\}dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} u''(C(t))[h - B(t)h']^2\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt + \int_{t_0}^{t_1} R(t)\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt\,, \tag{3.18}$$

где

$$R(t) = \mathrm{o}[h - B(t)h']^2 \text{ при } h - B(t)h' \to 0\,. \tag{3.19}$$

Покажем, знак левой части (3.18) определяется первым слагаемым правой части (3.18). Для этого заменим в (3.18) h на βh, где $\beta = \mathrm{const}$:

$$\Delta J(Y,\beta h) = J(Y+\beta h) - J(Y) =$$

$$= \beta\int_{t_0}^{t_1} h\{u'(C(t))\,\mathrm{e}^{-\delta t} + \frac{d}{dt}[u'(C(t)B(t)\,\mathrm{e}^{-\delta t}]\}dt +$$

$$+\frac{1}{2}\beta^2\int_{t_0}^{t_1} u''(C(t))[h - B(t)h']^2\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt + \int_{t_0}^{t_1} \tilde{R}(t)\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt\,, \tag{3.20}$$

где

$$\tilde{R}(t) = \mathrm{o}(\beta^2[h - B(t)h']^2)\text{, при } \beta(h - B(t)h') \to 0. \qquad (3.21)$$

Если теперь $\beta \to 0$, то первое слагаемое правой части стремится к нулю как первая степень β, второе как вторая, а третье – бесконечно малая более высокого порядка, чем два. Поэтому знак левой части (3.20) должен совпадать со знаком первого слагаемого правой части (3.20). Для того чтобы в этом убедиться, достаточно разделить обе части (3.20) на положительное β. Знак от этого измениться не может. После этого деления первое слагаемое правой части (3.20) не будет зависеть от β, второе слагаемое будет умножено на первую степень β, а третье будет бесконечно малой по β более чем первой степени. Осталось только устремить $\beta \to +0$.

Предположим теперь, что первое слагаемое правой части (3.18) отлично от нуля. Тогда если мы изменим знак β, то левая часть (3.20) не меняет знак, а первое слагаемое правой части (3.20), которое определяет знак всей правой части, изменит знак. Отсюда следует, что первое слагаемое правой части (3.18) должно быть равно нулю:

$$\int_{t_0}^{t_1} h\{u'(C(t))\,\mathrm{e}^{-\delta t} + \frac{d}{dt}[u'(C(t)B(t)\,\mathrm{e}^{-\delta t}]\}dt = 0. \qquad (3.22)$$

Используя основную лемму вариационного исчисления [15] из (3.22), будем иметь уравнение Эйлера:

$$u'(C(t))e^{-\delta t} + \frac{d}{dt}[u'(C(t))B(t)e^{-\delta t}] = 0. \qquad (3.23)$$

С учетом уравнения Эйлера (3.23) представление (3.18) упростится:

$$\Delta J(Y,h) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} u''(C(t))[h - B(t)h']^2\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt + \int_{t_0}^{t_1} R(t)\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt. \qquad (3.24)$$

Для проверки реализации экстремалью, определяемой уравнением (3.23) и условиями (1.4) и (3.15), а значит, (3.16) экстремума функционала (3.1) или, что то же самое, (3.6), достаточно сделать следующее.

Сначала нужно показать, что знак левой части (3.24) определяется первым слагаемым правой части (3.24). Для этого заменим в (3.24) h на βh, где $\beta = \mathrm{const}$:

$$\Delta J(Y,\beta h)=\frac{1}{2}\beta^2\int_{t_0}^{t_1}u''(C(t))[h-B(t)h']^2\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt+\int_{t_0}^{t_1}\tilde{R}(t)\,\mathrm{e}^{-\delta t}\,dt\,. \qquad (3.25)$$

где

$$\tilde{R}(t)=\mathrm{o}(\beta^2[h-B(t)h']^2) \quad \text{при} \quad \beta(h-B(t)h')\to 0\,. \qquad (3.26)$$

Если теперь $\beta\to 0$, то первое слагаемое правой части стремится к нулю как вторая степень β, а второе – бесконечно малая более высокого порядка, чем два. Поэтому знак левой части (3.25) должен совпадать со знаком первого слагаемого правой части (3.25). Для того чтобы в этом убедиться, достаточно разделить обе части (3.25) на положительное β^2. Знак от этого измениться не может. После этого деления первое слагаемое правой части (3.25) не будет зависеть от β, а второе будет бесконечно малой по β более чем второй степени. Осталось только устремить $\beta\to +0$.

А теперь осталось лишь воспользоваться тем, что $u''(C(t))\le 0$.

Справедливость последнего неравенства следует из (3.2).

Уравнение (3.23) с учетом обозначения (3.3) будет иметь вид

$$\mathrm{g}(C(t))e^{-\delta t}+\frac{d}{dt}[\mathrm{g}(C(t))B(t)e^{-\delta t}]=0\,. \qquad (3.27)$$

В уравнении (3.27) сделаем замену:

$$w=g(C(t))B(t)e^{-\delta t}, \qquad (3.28)$$

откуда

$$g\left(C(t)\right)e^{-\delta t}=\frac{w}{B(t)}\,. \qquad (3.29)$$

А теперь подставим (3.28) и (3.29) в уравнение (3.27):

$$\frac{w}{B(t)}+\frac{dw}{dt}=0\,.$$

Разделив переменные в последнем уравнении, предполагая, что (3.28) положительно, получим

$$\frac{w'}{w} = -\frac{1}{B(t)}.$$

Теперь интегрируем последнее уравнение

$$\ln|w| = -\int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{B(\tau)} + \ln|C_0|, C_0 = \text{const}\,.$$

Избавляясь от логарифмов, последнее выражение может быть преобразовано к виду

$$w = C_0 \exp\left\{-\int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{B(\tau)}\right\}. \qquad (3.30)$$

Подставим теперь (3.30) в (3.28):

$$\mathrm{g}(C(t))B(t)e^{-\delta t} = C_0 \exp\left\{-\int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{B(\tau)}\right\},$$

или, что то же самое:

$$\mathrm{g}(C(t))B(t) = C_0 \exp\left\{\delta t - \int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{B(\tau)}\right\}.$$

Тогда

$$\mathrm{g}(C(t)) = \frac{1}{B(t)} C_0 \exp\left\{\delta t - \int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{B(\tau)}\right\}. \qquad (3.31)$$

Предположим теперь существование соответствующей обратной функции, и тогда

$$C(t) = g^{-1}\left[\frac{1}{B(t)} C_0 \exp\left\{\delta t - \int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{B(\tau)}\right\}\right]. \qquad (3.32)$$

Возвращаясь снова к (3.3) из (3.31) получаем

$$C(t)=\left(u'\right)^{-1}\left[\frac{1}{B(t)}C_0\exp\left\{\delta t-\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{B(\tau)}\right\}\right]. \qquad (3.33)$$

Воспользуемся теперь формулой (3.4). Для этого гораздо удобнее использовать формулу (3.31), чем формулы (3.32) и (3.33). Итак, применим (3.4) к (3.31):

$$\frac{\gamma}{\left[C(t)\right]^{a}}=\frac{1}{B(t)}C_0\exp\left\{\delta t-\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{B(\tau)}\right\}.$$

Отсюда будем иметь

$$\left[C(t)\right]^{a}=\frac{\gamma B(t)}{C_0\exp\left\{\delta t-\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{B(\tau)}\right\}}=\frac{\gamma B(t)}{C_0}\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{B(\tau)}-\delta t\right\}.$$

А теперь из последнего выражения выражаем потребление:

$$C(t)=\left[\frac{\gamma B(t)}{C_0}\right]^{\frac{1}{a}}\exp\left\{\frac{1}{a}\left[\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{B(\tau)}-\delta t\right]\right\}. \qquad (3.34)$$

Отметим, что формула (3.34) выражает потребление при условии, когда полезность потребления удовлетворяет условию постоянного отвращения к риску по Эрроу–Пратту (3.2).

Весьма удобно воспользоваться следующей терминологией. С формой записи функционала (3.1), который нужно максимизировать, связана простейшая вариационная постановка задачи [22–24].

В соответствии со сложившейся в задачах оптимизации и управления терминологией задачу максимизации функционала (3.1) при условиях (1.4) и (3.15), уравнении связи (1.1) и добавленном ограничении

$$0<\underline{C}\le C(t)\le\overline{C}<+\infty \qquad (3.35)$$

на совокупное потребление удобно назвать задачей Понтрягина. В (3.35)) $\underline{C}$ – совокупный прожиточный минимум, а $\overline{C}$ – совокупный прожиточный максимум. Однако и задача Понтрягина может быть поставлена с дополнительным фазовым ограничением, например,

$$Y(t)\ge\text{const}.$$

Такую задачу можно назвать задачей Дубовицкого–Милютина [22–24].

В настоящем параграфе подробно рассмотрена вариационная постановка задачи оптимального управления в модели Харрода–Домара. Однако указана возможность и других постановок задач оптимального управления, а именно задач Понтрягина и Дубовицкого–Милютина. В роли управления выступает совокупное потребление. Показаны возможности вариационного метода, которые обусловлены точным решением уравнения связи, данного формулой (1.6), которое обеспечивает успех настоящего исследования.

§ 4. «Золотое правило» Солоу

Хорошо известно «золотое правило» Солоу для одноименной макромодели экономического роста с производственной функцией Кобба–Дугласа [7, 8]. Оно устанавливается следующим образом.

Преобразуем формулу (2.15):

$$k(t) = e^{-\lambda t}\left[\frac{\rho A}{\lambda}e^{\lambda(1-\alpha)t} - \frac{\rho A}{\lambda} + k_0^{\,1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} =$$

$$= \left[\frac{\rho A}{\lambda}\left(e^{\lambda(1-\alpha)t} - 1\right)e^{-\lambda(1-\alpha)t} + k_0^{\,1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} =$$

$$= \left[\frac{\rho A}{\lambda} - \frac{\rho A}{\lambda}e^{-\lambda(1-\alpha)t} + k_0^{\,1-\alpha}e^{-\lambda(1-\alpha)t}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{4.1}$$

Найдем теперь предел выражения (4.1) при $t \to +\infty$:

$$k_\infty = \lim_{t\to+\infty} k(t) = \left(\frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{4.2}$$

С другой стороны, стационарное решение уравнения (2.1), которое мы обозначаем k_* должно удовлетворять уравнению (2.6):

$$\rho f\left(k_*\right) = \lambda k_*. \tag{4.3}$$

Обращаясь к (2.12), равенство (4.3) преобразуется к виду

$$\rho A k_*^{\,\alpha} = \lambda k_*,$$

откуда

$$k_*^{1-\alpha} = \frac{\rho A}{\lambda}.$$

Выражая k_* из последнего равенства

$$k_* = \left(\frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \qquad (4.4)$$

убеждаемся в том, что

$$k_\infty = k_* \ . \qquad (4.5)$$

Итак, мы убедились в том, что при любом начальном значении k_0 фондовооруженность $k(t)$ сходится к стационарному значению для k_∞ .

Поскольку из (2.10) и (2.12)

$$f(k) = \frac{Y}{L} = \frac{F(K,L)}{L} = F(k,1) = Ak^\alpha ,$$

то и производительность труда сходится к стационарному значению $A\left(\frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$.

Поэтому и удельное потребление, то есть потребление на одного работающего, также сходится к стационарному значению:

$$c_\infty = \lim_{t\to+\infty} \frac{C(t)}{L(t)} \stackrel{(2.8)}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{(1-\rho)Y(t)}{L(t)} = (1-\rho)A\left(\frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} . \qquad (4.6)$$

Установим теперь, что предельное удельное потребление равно удельному потреблению при стационарном режиме. Для стационарного режима мы можем записать:

$$c_* = \frac{C}{L} \stackrel{(2.10)}{=} \frac{Y-I}{L} \stackrel{(2.16)}{=} \frac{Y-\rho Y}{L} = (1-\rho)\frac{Y}{L} \stackrel{(2.3)}{=} (1-\rho) f(k) \stackrel{(2.16)}{=}$$

$$\overset{(2.16)}{=}(1-\rho)Ak^{\alpha}\overset{(4.4)}{=}(1-\rho)A\left(\frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

При исследовании модели вполне разумно принять в качестве критерия успешности развития экономики величину удельного потребления. Найдем, при каком значении нормы накопления ρ предельное удельное потребление, которое равно удельному потреблению при стационарном режиме, максимально. Для этого на основании (4.6) запишем:

$$c_{\infty}=(1-\rho)A\left(\frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}=A^{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}}\lambda^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}-\rho^{1+\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)=$$

$$=A^{\frac{1}{1-\alpha}}\lambda^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}-\rho^{\frac{1}{1-\alpha}}\right).$$

Образуем новую величину

$$\hat{c}=A^{-\frac{1}{1-\alpha}}\lambda^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}c_{\infty}=\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}-\rho^{\frac{1}{1-\alpha}}, \qquad (4.7)$$

которая отличается от c_{∞} на константу. Продифференцируем теперь (4.7) по ρ:

$$\hat{c}'_{\rho}=\frac{\alpha}{1-\alpha}\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1}-\frac{1}{1-\alpha}\rho^{\frac{1}{1-\alpha}-1}=\frac{\alpha}{1-\alpha}\rho^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}-$$

$$-\frac{1}{1-\alpha}\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}=\frac{\rho^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}}{1-\alpha}(\alpha-\rho). \qquad (4.8)$$

Итак, (4.8) обращается в нуль лишь при $\rho=\alpha$. Но это лишь необходимое условие экстремума. Однако при переходе переменной ρ через α величина (4.8) меняет знак с плюса на минус. А это уже достаточное условие максимума.

Итак, оптимальная норма накопления в стационарном режиме равна коэффициенту эластичности по фондам. Это и есть «золотое правило» экономического роста. Но это справедливо для производственной функции Кобба–Дугласа (2.11). Для других производственных функций это правило, вполне возможно, будет другим [7, 25–27].

Поскольку (4.1) так же, как и (2.15), является частным случаем формулы (2.20) и функция $\lambda = \lambda(t)$, входящая в (2.20), может быть интегрируемой функцией времени произвольного характера, то в качестве этой функции можно взять кусочно-постоянную функцию [28]. Это весьма удобно для исследования зависимости «золотого правила» накопления от временных изменений годового темпа прироста числа занятых (годового темпа прироста трудовых ресурсов) благодаря простой зависимости $\lambda = \lambda(t) = \mu + \nu = \mu + \nu(t)$. Несмотря на громоздкость формулы (2.20), в случае кусочно-постоянной функции с большим количеством разрывов первого рода все интегралы правой части (2.20) на участках постоянства $\lambda = \lambda(t)$ легко возьмутся. Поэтому формула (2.20) с кусочно-постоянной $\lambda = \lambda(t)$ весьма удобна для численных исследований «золотого правила» накопления.

§ 5. Задачи оптимального управления потреблением с уравнением связи для капиталовооруженности

Выявленная моделью Солоу капиталовооруженность, или, что то же самое, фондовооруженность, является очень важной экономической характеристикой и требует внимательного изучения. Одной из целей настоящего изложения является изучение лишь уравнения связи, следующее из модели Солоу. Нас будет интересовать выработка точных постановок оптимизационных задач полезности потребления, но с уравнением связи для капиталовооруженности, которое следует из модели экономического роста Солоу. Как известно, Солоу строил свою модель на основании производственной функции Кобба–Дугласа, и это ранее уже было изложено. Однако в математических моделях широко применяются и другие производственные функции. Статистические исследования показывают, что на практике и производственная функция Кобба–Дугласа, и другие известные производственные функции описывают зависимость народнохозяйственной производительности труда от капиталовооруженности лишь приближенно. Поэтому особый интерес представляют собой постановки задач оптимизации, в которых уравнение, следующее из модели Солоу, выступает как уравнение связи для произвольного характера зависимости народнохозяйственной производительности труда от капиталовооруженности. Именно в таком виде уравнение связи, следующее из модели Солоу, является удобным инструментом для экономических исследований при работе со статистикой. Выработка и изучение таких постановок и является целью настоящего параграфа.

Основой здесь является вариационный метод, которым ищется максимизация интегральной дисконтированной полезности среднедушевого потребления.

Найдены и исследованы постановки оптимизационных задач с ограничениями различного рода, которые следуют из естественных экономических свойств, для модели роста. Задачи этого типа заключаются в отыскании максимума функционала, выражающего интегральную дисконтированную полезность среднедушевого потребления при наличии дифференциального уравнения связи. Проинтегрировано уравнение Эйлера, которое получено на основании вариационного метода. Исследованы ограничения как сверху, так и снизу на среднедушевое потребление, а также фазовое ограничение снизу на фондовооруженность. Рассмотрены постановки задачи Понтрягина и Дубовицкого–Милютина.

Предложенная методика дает богатые возможности разнообразных постановок задач оптимального управления для уравнения модели роста Солоу: задачи Понтрягина и задачи Дубовицкого–Милютина. Роль управления во всех рассмотренных в настоящей работе оптимизационных задачах играет среднедушевое потребление. Благодаря проинтегрированному уравнению Эйлера ожидаются богатые возможности получения экономических результатов.

Модель экономического роста Солоу [3, 4] стала очень популярной с самого момента своего возникновения. Однако в своих работах, ставших классическими, Роберт Солоу, во-первых, основывался на производственной функции Кобба–Дугласа [3, 4], а во-вторых, не написал в явном виде дифференциального уравнения, описывающего поведение фондовооруженности, для производственной функции более общего характера, которое появилось позже у других авторов [7, 8, 29, 30]. С моделью Солоу сравнивали и более поздние макроэкономические модели [31]. Кроме этого, эта модель, включающая дифференциальное уравнение, завоевывает популярность и в классической математике [9, 10], причем, как в научной, так и учебной литературе, и в математическом моделировании [27].

Для того чтобы по возможности разные параграфы пособия можно было читать независимо, мы здесь повторим разъяснения основных обозначений и основополагающих уравнений, хотя они будут в большинстве случаев совпадать с аналогичными понятиями второго параграфа, а различия мы оговорим особо. Обыкновенное дифференциальное уравнение модели роста макроэкономической динамики Солоу с переменными коэффициентами, которые получены на основании неоклассической производственной функции произвольного характера [7, 8], имеет вид

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho f(k). \qquad (5.1)$$

Здесь, как и во втором параграфе t – время, которое считается непрерывным и измеряется в годах, а t_0 – его начальный момент; $k = k(t)$ – фондовооруженность или капиталовооруженность; $\lambda = \mu + \nu$, где $\mu = \text{const}$ и $\mu \in (0,1)$ – доля выбывших за год основных производственных фондов, а $\nu \in (-1,1)$ – годовой темп прироста числа занятых (годовой темп прироста трудовых ресурсов); ρ как и во втором параграфе норма накопления, однако, мы отказываемся от ограничения постоянства нормы накопления и считаем, что, вообще говоря $\rho \neq \text{const}$ и неизвестной функцией времени, и $\rho = \rho(t) \in (0,1)$; $x = f(k)$ – народнохозяйственная производительность труда, а $c = c(t)$ – среднедушевое потребление [7, 8].

Напомним, что уравнение Солоу, основанное на производственной функции Кобба–Дугласа, является уравнением Бернулли, и поэтому интегрируется в квадратурах [9, 10]. Мы в настоящем пункте для общности постановки задач оптимизации отвлекаемся от производственной функции Кобба–Дугласа, и поскольку уравнение (5.1) выведено в более общих предположениях, отмечаем, что уравнение (5.1) в квадратурах не интегрируется [11, 32].

На основании статистических исследований [33, 34] можно сделать вывод, что зависимость народнохозяйственной производительности труда $x = f(k)$ от фондовооруженности $k = k(t)$ описывается производственной функцией Кобба–Дугласа или какой-нибудь еще производственной функцией [35, 36] лишь приближенно. Поэтому мы сосредоточились на исследованиях экономических и экономико-статистических моделях экономической динамики, в которых присутствует зависимость народнохозяйственной производительности труда от фондовооруженности произвольного характера. Исследования эти, на наш взгляд, важны потому, что именно оптимизация фондовооруженности является основным фактором инвестиционной привлекательности.

Для уравнения (5.1) естественно поставить задачу Коши, задав начальное условие

$$k(t_0) = k_0 \geq 0. \qquad (5.2)$$

Однако на основании аналогии с третьим параграфом мы для постановки рассматриваемой задачи добавляем конечное условие

$$k(t_1) = k_1 \geq 0 \,. \tag{5.3}$$

Задачу оптимального управления в самом общем виде ставим таким образом: найти не только фондовооруженность, но и такое среднедушевое потребление, которое максимизирует интегральную дисконтированную полезность среднедушевого потребления [37]:

$$\int_{t_0}^{t_1} u\bigl(c(t)\bigr)\exp(-\delta t)\,dt \Rightarrow \max \,, \tag{5.4}$$

где u – функция полезности, на свойствах которой мы остановимся немного позже, а δ – коэффициент дисконтирования будущей полезности [7, 8, 38, 39]. Здесь мы также воспользовались аналогией с задачами оптимального управления потреблением в экономике домашнего хозяйства [22–24]. При этом на среднедушевое потребление естественно накладываются либо ограничение

$$0 < \underline{c} \leq c(t) < +\infty \,, \tag{5.5}$$

либо

$$0 < \underline{c} \leq c(t) \leq \bar{c} < +\infty \,. \tag{5.6}$$

В (5.5) и (5.6) $\underline{c}$ – среднедушевой прожиточный минимум, а $\bar{c}$ – среднедушевой прожиточный максимум. Еще одно экономически естественное фазовое ограничение на фондовооруженность

$$k(t) \geq \mathrm{const} \geq 0 \,. \tag{5.7}$$

Остановимся на терминологии аналогично работам [40, 41]. Задачу (5.1), (5.2), (5.3), (5.4) назовем простой вариационной задачей; задачу (5.1), (5.2), (5.3), (5.4), (5.5) – задачей Понтрягина, так же как и задачу (5.1), (5.2), (5.3), (5.4), (5.6); задачу (5.1), (5.2), (5.3), (5.4), (5.7) назовем вариационной задачей с фазовым ограничением; задачу (5.1), (5.2), (5.3), (5.4), (5.5), (5.7) – задачей Дубовицкого–Милютина, так же как и задачу (5.1), (5.2), (5.3), (5.4), (5.6), (5.7).

Во всех сформулированных задачах присутствуют уравнение модели Солоу (5.1) и граничные условия (5.2), (5.3). На первый взгляд это может показаться странным, поскольку (5.1) – обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка и решение его полностью определяется постановкой задачи Коши, то есть начальным или граничным условием, что в данном случае одно и то же. Однако это рассуждение справедливо, если коэффициенты правой части уравнения (5.1) известны. В нашем же случае, т. е. в любом из случаев поставленных нами задач, коэффициенты правой части уравнения (5.1) неизвестны и определяются в ходе рассматриваемой оптимизационной постановки.

Остановимся теперь на свойствах функции полезности и предельной полезности среднедушевого потребления, аналогично тому, как мы это делали в третьем параграфе**.**

Во всех сформулированных задачах присутствует условие (5.4). Аналогично [22–24], предполагаем, что полезность среднедушевого потребления характеризует постоянное отвращение к риску по Эрроу–Пратту:

$$\tilde{a} = -\frac{u''(c)c}{u'(c)} \geq 0\,. \tag{5.8}$$

Экономический смысл (5.8) становится ясным после введения простого обозначения, которое аналогично соответствующему обозначению пятого параграфа:

$$g(c) = u'(c)\,, \tag{5.9}$$

где $g(c)$ будет являться предельной полезностью среднедушевого потребления [37]. Для $E_c(g)$ – эластичности изменения переменной g по переменной c с учетом (7.8) можно записать:

$$g'(c) = u''(c),\ E_c(g) = \frac{g'(c)}{g(c)/c} = \frac{u''(c)c}{u'(c)} = -\tilde{a}\,. \tag{5.10}$$

Далее, мы предполагаем, что $g(c)$ – функция монотонно невозрастающая, и поэтому $\tilde{a} \geq 0$. Противоположное предположение возрастания $g(c)$, очевидно, связано с риском. Поэтому случай, когда $g(c)$ не возрастает, естественно назвать отвращением к риску.

Равенство (5.10), а именно

$$\frac{cg'(c)}{g(c)} = -\tilde{a}\,,$$

можно записать в виде, удобном для интегрирования, а именно

$$\frac{g'(c)}{g(c)} = -\frac{\tilde{a}}{c}.$$

Интегрируя последнее, предварительно домножив левую и правую части на dc, мы получим удобное для исследования выражение для предельной полезности среднедушевого потребления:

$$g(c) = \frac{\gamma}{c^{\tilde{a}}} = \gamma c^{-\tilde{a}}, \gamma = \text{const}. \qquad (5.11)$$

Проинтегрировав (5.11) по переменной c, легко получаем выражение для функции полезности среднедушевого потребления [37]:

$$u(c) = \begin{cases} \dfrac{\gamma c^{1-\tilde{a}}}{1-\tilde{a}} + \chi, \tilde{a} \neq 1; \\ \gamma \ln c + \chi, \tilde{a} = 1; \end{cases} \gamma = \text{const} > 0, \chi = \text{const}, \qquad (5.12)$$

которое обобщает аналогичные формулы в [22, 23, 24].

Опишем алгоритм решения простейшей вариационной задачи, основанный на необходимом условии.

Сразу заметим, что для среднедушевого потребления из формулы (2.3) следует выражение

$$c = c(t) = \frac{C(t)}{L(t)} = \frac{Y - I}{L} = \frac{Y - \rho Y}{L} = (1-\rho)\frac{Y}{L} = (1-\rho) f(k). \qquad (5.\ 13)$$

Из (5.13) получаем выражение

$$f(k) = \frac{c}{1-\rho}, \rho \neq 1. \qquad (5.14)$$

Подставляя (5.14) в (5.1), будем иметь

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \frac{c\rho}{1-\rho}, \rho \neq 1. \qquad (5.15)$$

Отметим, что (5.15) можно рассматривать как уравнение модели Солоу (5.1), записанное в другой форме, в правой части которого имеется среднедушевое потребление.

Выражая из (5.15) среднедушевое потребление, получим

$$c = c(t) = \frac{1-\rho}{\rho}\left[\frac{dk}{dt} + \lambda k\right],\ \rho \neq 0,\ \rho \neq 1. \tag{5.16}$$

Простейшая вариационная оптимизационная задача ставится как максимизация интегральной дисконтированной полезности среднедушевого потребления (5.4) при выполнении уравнения связи (5.1), или, что то же самое, (5.15), при справедливости граничных условий (5.2) и (5.3).

Итак, переходим к описанию алгоритма простейшей вариационной оптимизационной задачи. Необходимым условием экстремума в сформулированной нами в настоящей работе простейшей вариационной задачи является справедливость уравнения Эйлера [37]:

$$u'\left(\frac{1-\rho}{\rho}\left[\lambda k + \frac{dk}{dt}\right]\right)\frac{1-\rho}{\rho}\lambda e^{-\delta t} - \frac{d}{dt}[u'\left(\frac{1-\rho}{\rho}\left[\lambda k + \frac{dk}{dt}\right]\right)\frac{1-\rho}{\rho}e^{-\delta t}] = 0,$$

при $\rho \neq 0$, $\rho \neq 1$. Пользуясь (5.16) последнее равенство можно упростить

$$u'(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}\lambda e^{-\delta t} - \frac{d}{dt}\left[u'(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}e^{-\delta t}\right] = 0,\ \rho \neq 0,\ \rho \neq 1. \tag{5.17}$$

Принимая во внимание (5.9), мы получаем другую форму записи уравнения Эйлера, чем (5.17), через функцию предельной полезности среднедушевого потребления:

$$g(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}\lambda e^{-\delta t} - \frac{d}{dt}\left[g(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}e^{-\delta t}\right] = 0,\ \rho \neq 0,\ \rho \neq 1. \tag{5.18}$$

Подставляя (5.16) в (5.17) или в (5.18), мы можем заключить, что полученное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно неизвестной фондовооруженности $k = k(t)$ будет иметь второй порядок. Поэтому для однозначного отыскания фондовооруженности нужны оба граничных условия, как начальное (5.2), так и конечное (5.3). После того как будет найдена искомая фондовооруженность $k(t)$, мы из (5.16) находим и среднедушевое потребление $c(t)$.

Проведем проверку найденного решения простейшей вариационной задачи.

Итак, пользуясь лишь необходимым условием, мы нашли $k(t)$ и $c(t)$ и обязаны проверить, является ли найденная пара функций решением простейшей вариационной задачи оптимизации.

Уравнение (5.1) справедливо, потому что, зная $k(t)$, мы находим $c(t)$ из равенства (5.16), которое было получено из уравнения (5.15). А уравнение (5.15) эквивалентно уравнению (5.1).

Граничные условия (5.2) и (5.3) справедливы, потому что они являются составной частью краевой задачи для дифференциального уравнения Эйлера (5.18) при (5.11) и (5.16), являющегося необходимым условием простейшей вариационной задачи оптимизации.

Для того чтобы доказать выполнение условия (5.4) для интегральной дисконтированной полезности среднедушевого потребления, мы вводим обозначение

$$J(k)=\int_{t_0}^{t_1} u(c(t))\exp(-\delta t)dt .$$

Пусть $h=h(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция на $[t_0,t_1]$, такая что $h(t_0)=h(t_1)=0$. Аналогично [37] рассматриваем разность $J(k+h)-J(k)$ и получим

$$J(k+h)-J(k)=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1} h\left\{u'(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}\lambda\,\mathrm{e}^{-\delta t}-\frac{d}{dt}\left[u'(c(t)\frac{1-\rho}{\rho}\mathrm{e}^{-\delta t}\right]\right\}dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} u''(c(t))\left[\frac{1-\rho}{\rho}\left(h'+\lambda h\right)\right]^2 e^{-\delta t}dt+\int_{t_0}^{t_1} R(t)e^{-\delta t}dt . \qquad (5.19)$$

На основании (5.17), или (5.9) и (5.18) правая часть (5.19) упрощается:

$$J(k+h)-J(k)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} u''(c(t))\left[\frac{1-\rho}{\rho}\left(h'+\lambda h\right)\right]^2 \mathrm{e}^{-\delta t}\,dt+\int_{t_0}^{t_1} R(t)e^{-\delta t}dt . \qquad (5.20)$$

Исходя из правой части (5.20) важно определить, каким слагаемым правой части определяется знак. Для того чтобы установить, что знак (5.20) определяется первым слагаемым правой части, нужно сначала заменить $h = h(t)$ на $\beta h = \beta h(t)$, где β – постоянная. При этом $h' = h'(t)$ заменяется на $\beta h' = \beta h'(t)$. Сделав вышеуказанную замену в (5.20) и исследуя остаточный член, имеем

$$J(k+\beta h) - J(k) =$$

$$= \frac{\beta^2}{2}\int_{t_0}^{t_1} u''(c(t))\left[\frac{1-\rho}{\rho}\left(h' + \lambda h\right)\right]^2 \mathrm{e}^{-\delta t}\, dt +$$

$$+o\left(\beta^2\right) \quad \text{при} \quad \beta \to 0. \tag{5.21}$$

На основании (5.21) мы можем утверждать, что знак исследуемой разности совпадает со знаком первого слагаемого правой части (5.21).

Для того чтобы установить, что согласно (5.4) реализуется именно максимум, нужно, чтобы разность (5.21) была не положительна. Для этого достаточно, чтобы подынтегральная функция первого слагаемого правой части (5.21) была бы не положительна. Это будет выполнено, если $u''(c(t)) \le 0$. Последнее следует из (5.8). Таким образом, мы установили справедливость (5.1), (5.2), (5.3) и (5.4), то есть всех условий простейшей вариационной задачи.

Остановимся на интегрировании уравнения Эйлера**.**

На основании описания алгоритма простейшей вариационной задачи становится ясно, что граничные условия (5.2) и (5.3) относятся не к уравнению (5.1), а к уравнению Эйлера (5.17), которое может быть записано и в эквивалентной форме (5.18). На первый взгляд, неизвестной функцией в уравнении Эйлера (5.17) является среднедушевое потребление $c = c(t)$, но в силу выражения этого среднедушевого потребления через фондовооруженность $k = k(t)$ (5.16), это выражение получено на основании (5.1), неизвестной функцией в (5.17) будет уже фондовооруженность. Причем относительно среднедушевого потребления $c = c(t)$ уравнение (5.17) является уравнением первого порядка, а относительно фондовооруженности $k = k(t)$ **–** второго.

Именно из-за того, что уравнение Эйлера (5.17), рассматриваемое относительно фондовооруженности $k = k(t)$ как неизвестная функция, имеет второй порядок, необходимы два граничных условия (5.2) и (5.3).

Введением обозначения

$$w = g(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}e^{-\delta t}, \tag{5.22}$$

уравнение Эйлера (5.18) упрощается:

$$\frac{dw}{dt} = \lambda w. \tag{5.23}$$

Предполагая в (5.23) $w \neq 0$, разделив на w обе части (5.23) и интегрируя полученное, имеем

$$\ln|w| = \int_{t_0}^{t} \lambda(s)ds + \text{const},$$

или, что то же самое,

$$w = C_0 \exp\left\{\int_{t_0}^{t} \lambda(s)ds\right\}, \; C_0 = const. \tag{5.24}$$

Принимая во внимание (5.22), из (5.24) получим

$$g(c(t))\frac{1-\rho}{\rho}e^{-\delta t} = C_0 \exp\left\{\int_{t_0}^{t} \lambda(s)ds\right\}.$$

Выражая из последнего равенства предельную полезность среднедушевого потребления, будем иметь

$$g(c(t)) = C_0 \frac{\rho}{1-\rho}\exp\left\{\delta t + \int_{t_0}^{t} \lambda(s)ds\right\}. \tag{5.25}$$

Взяв обратную функцию от предельной полезности среднедушевого потребления, определим из (5.25) само среднедушевое потребление:

$$c(t) = g^{-1}\left(C_0 \frac{\rho}{1-\rho}\exp\left\{\delta t + \int_{t_0}^{t} \lambda(s)ds\right\}\right). \tag{5.26}$$

Эквивалентное выражение для среднедушевого потребления может быть получено при помощи разрешения уравнения (5.11):

$$c(t)=\left(u'\right)^{-1}\left(C_0\frac{\rho}{1-\rho}\exp\left\{\delta t+\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\right\}\right). \qquad (5.27)$$

Для того чтобы применить формулу (5.11), лучше пользоваться формулой (5.25), а не (5.26) и (5.27). Итак, применяем (5.11) к (5.25):

$$\frac{\gamma}{\left[c(t)\right]^a}=C_0\frac{\rho}{1-\rho}\exp\left\{\delta t+\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\right\}.$$

Из последнего выражения получаем

$$\left[c(t)\right]^a=\frac{\gamma(1-\rho)}{C_0\rho}\cdot\frac{1}{\exp\left\{\delta t+\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\right\}}=$$

$$=\frac{\gamma(1-\rho)}{C_0\rho}\exp\left\{-\delta t-\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\right\}.$$

Теперь мы можем выразить удельное потребление:

$$c(t)=\left[\frac{\gamma(1-\rho)}{C_0\rho}\right]^{\frac{1}{a}}\exp\left\{\frac{1}{a}\left[-\delta t-\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\right]\right\}. \qquad (5.28)$$

Отметим, что выражение для среднедушевого потребления (5.28) получено при условии, когда полезность потребления удовлетворяет условию постоянного отвращения к риску по Эрроу–Пратту (5.8).

Если теперь (5.26) или (5.27) подставить в (5.16), мы получаем дифференциальное уравнение первого порядка, где неизвестной функцией будет уже фондовооруженность.

Рассмотрим теперь возможные переключения при использовании решений рассматриваемых задач.

При рассмотрении любой рассматриваемой в настоящей работе оптимизационной экономической задачи довольно целесообразно использовать следующий естественный подход: как начальное приближение рассмотреть простейшую вариационную задачу, а найдя ее решение, проверить, удовлетворяет ли оно дополнительным условиям (5.5), (5.6) и (5.7). Это всегда возможно сделать, т. к. эти условия являются неравенствами. Если так случится, что найденное решение простейшей вариационной задачи этим дополнительным условиям удовлетворяет, то рассматриваемая задача решена.

Однако может случиться, что полученное решение простейшей вариационной задачи может выйти за рамки какого-нибудь из неравенств (5.5), (5.6), (5.7). Поскольку мы естественно предполагаем, что условие (5.2) задано так, что в некоторой малой правой окрестности начального момента времени нужные условия удовлетворяются, то целесообразно несколько сузить рассматриваемый момент времени, то есть уменьшить t_1. Далее, в зависимости от характера поставленной задачи, можно попытаться уже при новом граничном условии, роль которого будет играть уменьшенное t_1, изменить начальные условия так, чтобы решение поставленной задачи на некотором более значительном временном промежутке удовлетворяло нужному из неравенств. Те значения времени, в которых мы изменяем начальные условия, и назовем моментами переключения рассматриваемого оптимизационного экономического процесса.

В заключении этого параграфа заметим следующее.

В настоящем параграфе наиболее подробно рассмотрена простейшая вариационная постановка оптимизационной задачи с уравнением Солоу. Однако в результате проведенных исследований получены возможности и более сложных постановок задач оптимального управления, а именно задачи Понтрягина и задачи Дубовицкого–Милютина.

Роль управления во всех рассмотренных в настоящей работе оптимизационных задачах играет среднедушевое потребление. Благодаря проинтегрированному уравнению Эйлера ожидаются богатые возможности получения экономических результатов в обобщениях модели роста Солоу [40, 41].

Заключение

Итак, мы познакомились с наиболее известными макромоделями экономической динамики – моделями экономического роста Харрода–Домара и Солоу. Надо отметить, что это были не самые первые модели экономического роста. Им предшествовали также популярные модели экономического роста, но их известность не была столь высокой [42]. В настоящее время набирают популярность более совершенные макромодели, однако, они базируются на моделях, разобранных в настоящем пособии довольно существенно [43–45].

В настоящем пособии эти модели изучены не в чистом виде и даже не так, как они изложены в учебной литературе, а с математическими доработками автора [11–13, 18–24, 37, 40, 41]. Математическая подготовка, которая необходима для понимания материала настоящего пособия, содержится в курсах обыкновенных дифференциальных уравнений и математического анализа, читаемых на кафедре высшей математики МФТИ на 1 и 2 курсах. Поэтому настоящее учебное пособие предназначено для студентов второго и последующих курсов МФТИ, а также для преподавателей и научных работников, интересующихся математической экономикой.

Модели экономического роста сразу стали популярны с самого момента своего возникновения, благодаря своей универсальности. Их применяли к различным объектам во всевозможных экономических структурах независимо от их масштабов и размеров. В математической экономике признаны во всем мире макромодели экономической динамики Харрода–Домара и Солоу, представленные как в научной, так и в учебной литературе [1–12]. Именно на этих моделях и их модификациях сосредоточено основное внимание в данном пособии. Из материалов, изложенных в настоящем пособии следует, что несмотря на значительные различия этих моделей их сравнительный анализ довольно содержателен. В настоящем пособии продемонстрировано удобство рассматриваемых моделей для постановок задач оптимального управления потреблением. Многочисленные обобщения этих моделей экономического роста свидетельствует о повышенной актуальности научной мысли в этом направлении.

В настоящих условиях повышенного интереса к особенностям крупномасштабных экономических явлений особое значение приобретают точные аналитические методы, выделяющие определяющие зависимости между основными экономическими показателями. Одним из основных методов в настоящем пособии является вариационный метод. Этим методом находится максимум интегральной дисконтированной полезности потребления. Основой для таких рассмотрений явилась аналогия с исследованиями автора по экономике домашнего хозяйства [22–24].

Вариационная постановка рассмотренных и изученных в настоящем пособии задач оптимизации весьма удобна и вполне достаточна для полноценного и обстоятельного исследования. Сначала исследование ограничивается лишь гладкими возмущениями. Однако, ограничения различного рода не дают возможности полностью довериться использованию классических вариационных методов, поэтому в настоящем пособии babe припривлекаются элементы различных методов оптимизации. Применяются также элементы теории задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, а также элементы теории краевых задач.

В настоящем учебном пособии найдены и исследованы постановки оптимизационных задач с ограничениями различного рода, которые следуют из естественных экономических условий для моделей экономического роста. Задачи этого типа заключаются в отыскании максимума функционала, выражающего интегральную дисконтированную полезность потребления при наличии дифференциального уравнения связи. Найденные на основании вариационного метода уравнения Эйлера, удалось проинтегрировать. Исследованы, как ограничения на потребление, так и фазовые ограничения. Найдены и рассмотрены постановки задач Понтрягина и Дубовицкого–Милютина.

Помимо модернизированной модели Солоу, в настоящем пособии изучается также и «золотое правило» накопления, основанное на максимизации не интегральной дисконтированной полезности потребления, а на максимизации потребления в чистом виде. Это известное классическое исследование, которое возможно в случае производственной функции Кобба–Дугласа [3, 4. 7, 8]. Это исследование в литературе проводилось еще и при условии постоянного годового темпа прироста числа занятых (годового темпа прироста трудовых ресурсов) [7, 8]. Это исследование было успешно проведено, благодаря возможности интегрировании обыкновенного дифференциального уравнения для капиталовооруженности, или, что то же самое фондовооруженности, которое, как показано в настоящем пособии, является уравнением Бернулли. Известно, также [7, 25–27], что для других производственных функций это правило, вполне возможно, будет другим. Из материалов пособия следует, что «золотое правило» накопления может зависеть еще и от функции произвольного характера, зависящей от времени, описывающей изменения годового темпа прироста числа занятых (годового темпа прироста трудовых ресурсов) при той же самой производственной функции Кобба–Дугласа. Благодаря тому, что обыкновенное дифференциальное уравнение для капиталовооруженности (фондовооруженности) не перестает быть уравнением Бернулли и при условии переменного по времени годового темпа числа занятых (годового темпа прироста трудовых ресурсов). В настоящем пособии это обыкновенное дифференциальное уравнение проинтегрировано при интегрируемой по времени функции произвольного характера, описывающей годовой темп прироста числа занятых (годовой темп прироста трудовых ресурсов). Показано, что эта формула для капиталовооруженности (фондовооруженности), полученная в пособии является прямым обобщением известной формулы для постоянного темпа прироста числа занятых (годового темпа прироста трудовых ресурсов), то есть ранее известная формула является частным случаем формулы, полученной в пособии. Показано, что если в качестве функции, описывающей годовой темп прироста числа занятых (годовой темп прироста трудовых ресурсов) взять кусочно-постоянную функцию, то несмотря на большое количеством разрывов первого рода все интегралы правой части этой формулы на участках постоянства по времени легко возьмутся. Это обстоятельство весьма удобно для исследования зависимости «золотого правила» накопления от временных изменений годового темпа прироста числа занятых (годового темпа прироста трудовых ресурсов). Поэтому, полученная в пособии формула для капиталовооруженности (фондовооруженности) при кусочно-постоянной функции, которая описывает годовой темп прироста числа занятых (годовой темп прироста трудовых ресурсов), достаточно удобна для численных исследований «золотого правила» накопления. Более общая формула для капиталовооруженности (фондовооруженности) при интегрируемой функции произвольного характера, которая описывает годовой темп прироста числа занятых (годовой темп прироста трудовых ресурсов), также в дальнейшем будет удобна для численных исследований.

Литература

1. Harrod R.F. An Essay in Dynamic Theory // Economic Jornal. – 1939. – March (№ 49). – P. 14–33.

2. Domar E. Capital Expansion, Rate of Growth and Employment // Econometrica. – 1946. – April (V. 14, N 2) – P. 137–147.

3. Solow R.M. Contribution to the Theory of Economic Growth // The Quarterly Journal of Economics. – 1956 – February. V. 70, N 1. – P. 65–94.

4. Solow R.M. Technical Change and the Aggregate Production Function // The Review of Economics and Statistics. – 1957. – August. V. 39, N 3. – P. 312–320.

5. Хэмбург Д. Ранняя теория роста модели Домара и Харрода / Ред. Афанасьева В.С. и Энтова Р.М. – Современная экономическая мысль. – Москва : Прогресс, 1981.

6. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике: учебник. – Москва : МГУ им. М.В. Ломоносова, Издательство «ДИС», 1998. – 368 с.

7. Малыхин В И. Математика в экономике: учебное пособие. – Москва : ИНФРА–М, 2001. – 356 с.

8. Колемаев В.А. Математическая экономика: учебник для вузов. – Москва : ЮНИТИ–ДАНА, 2002. – 399 с.

9. Самаров К.Л. Экономико-математические модели. – Москва : Резольвента, 2009. – 45 с.

10. Самаров К.Л., Самарова С.С. Модель экономического роста Роберта Солоу в курсе дифференциальных уравнений // Информационно-технологический вестник. – 2014. – № 2 (02). – С. 81–84.

11. Меерсон А.Ю., Черняев А.П. Интегральный метод исследования переходного режима в модели Солоу // Экономика природопользования. 2010. № 3. С. 105–109.

12. Меерсон А.Ю., Черняев А.П. Точное решение макроэкономической модели Харрода–Домара с экзогенной динамикой объема потребления произвольного характера // Известия Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова. 2011. № 1. С. 142–147.

13. Меерсон А.Ю., Черняев А.П. Точное решение задачи Коши для дифференциального уравнения макроэкономической модели Харрода–Домара с переменным коэффициентом капиталоемкости прироста дохода // Вестник МГУП. 2013, № 3. С. 252–255.

14. Моделирование экономических процессов: учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000) / под ред. М.В. Грачевой, Л.Н. Фадеевой, Ю.Н. Черемных. – Москва : ЮНИТИ–ДАНА, 2005. –351 с.

15. Романко В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – 2-е изд. Москва : Физматлит. Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 344 с.

16. Кудрявцев Л Д. Краткий курс математического анализа: учебник для вузов. – Москва : Наука. Гл. ред. физ.- мат. лит., 1989. – 736 с.

17. Экономико-математическое моделирование: учебник под общ. ред. И.Н. Дрогобыцкого. – 2-е изд., стереотип. – Москва : Издательство «Экзамен», 2006. – 798 с.

18.. Черняев А.П. Сравнительный анализ двух математических моделей экономической динамики // Труды 61 Всероссийской научной конф. МФТИ. 2018. С. 44.

19. Черняев А.П. Сравнение двух динамических моделей экономического роста // The First International Conference «Mathematical Physics, Dynamical Systems, Infinite–Dimensional Analysic» MPhDSIDA–2019 Book of Abstracts, 17–21 June 2019, Dolgoprudny, Russia. P. 161.

20. Меерсон А.Ю., Черняев А.П. Вариационная задача оптимизации потребления макроэкономической модели Харрода–Домара с переменным коэффициентом капиталоемкости прироста дохода // Известия МГТУ «МАМИ». 2014. Т. 4. Сер. 3 «Естественные науки». С.77–80.

21. Меерсон А.Ю., Черняев А.П. Вариационная задача оптимизации потребления модели экономической динамики Харрода–Домара с переменным коэффициентом капиталоемкости прироста дохода // Труды вольного экономического общества России. Москва, 2014. Т. 186. С.502–506.

22. Дикусар В.В., Меерсон А.Ю., Черняев А.П. Задачи оптимального распределения ресурсов на примере домашних хозяйств. Москва : ВЦ РАН, 2004. 58 с.

23. Дикусар В.В., Меерсон А.Ю., Черняев А.П. Модели потребления и вопросы оптимального управления // Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа. Москва : ВЦ РАН, 2005. С. 46–61.

24. Дикусар В.В., Меерсон А.Ю., Черняев А.П. Задачи оптимального управления потреблением в домашних хозяйствах // Динамика неоднородных систем . Москва : ИСА РАН, 2005. Вып. 9. С. 212–229.

25. Петров А.А. Экономика. Модели. Вычислительный эксперимент. – Москва : Наука, 1996. – 251 с.

26. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. Москва : Энергоатомиздат, 1996. – 544 с.

27. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – Москва : Наука. Физматлит, 1997. 320 с.

28. Черняев А.П. Ряды Фурье. Интегралы, зависящие от параметра, и обобщенные функции: курс лекций. – Москва : МЗ Пресс, 2004.– 140 с.

29. Курзенев В., Матвеенко В. Экономический рост. – Санкт-Петербург : Питер, 2018. – 608 с.

30. Ромер Д. Высшая макроэкономика. – Москва : Издательский дом ВШЭ, 2014. – С. 26–32.

31. Красносельская Д.Х. Сравнительный анализ моделей экономического роста Р. Солоу и Мэнкью– Ромера–Уэйла (на примере Республики Башкартостан) // Креативная экономика. – 2013. – Т. 7. – № 9. – С. 14–23.

32. Меерсон А.Ю., Черняев А.П. Варианты постановки задач оптимизации обобщенной полезности потребления в модели Солоу с ограничениями различного рода // Фундаментальные исследования. 2018. № 7. Экономические науки. С. 121-125.

33. Ковалева Т.Ю. Статистическое изучение взаимосвязи динамики производительности труда и фондовооруженности в структурах РФ // Приволжский научный вестник. 2015. № 7 (47). С. 85–91.

34. Давыдова Г.В. Источники экономического роста // Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость. 2017. Т. 17. № 4. С. 52–64.

35. Ашманов С.А. Математические методы и модели в экономике. – Москва : Изд-во Московского ун-та, 1980. – 199 с.

36. Оленев Н.Н. Производственная функция с учетом ограничения производственных мощностей по возрасту // Труды МФТИ. 2017. Т. 9. № 3. С. 143–150.

37. Меерсон А.Ю., Черняев А.П. Вариационная задача оптимизации среднедушевого потребления модели Солоу для уравнения с переменными коэффициентами, описывающими фондовооруженность // Менеджмент и Бизнес-Администрирование. Москва, 2015. 3. С. 127–131.

38. Гуриев С.М., Поспелов И.Г. Модель общего равновесия экономики переходного периода // Математическое моделирование. 1994. Т. 6. № 2. С. 3–21.

39. Гуриев С.М. Модель формирования сбережений и спроса на деньги. 1 // Математическое моделирование. 1994. Т. 6. № 7. С. 15–40.

40. Меерсон А.Ю., Черняев А.П. Варианты постановки задач оптимизации обобщенной полезности потребления в модели Солоу с ограничениями различного рода // Фундаментальные исследования. 2018. № 7. Экономические науки. С. 121–125.

41. Меерсон А.Ю., Черняев А.П. Задачи оптимального управления среднедушевым потреблением с уравнением связи для фондовооруженности // Труды МФТИ. 2019. Т. 11. № 2. С. 27–37.
42, Ramsey F.P. A mathematical theory of saving // Economic Journal. 1928. V. 38. N 152. – P. 543–559.
43. Замулин О.А., Сонин К.И. Экономический рост 2018 года и уроки для России // Вопросы экономики. 2019. № 1. С. 11–36.
44. . Romer P. Growth Based on Increasing Returns Due to Specialization // American Economic Review. V. 77. 1987. – P. 56–62.
45. Nordhaus W. Integrated assessment models of climate change // NBER Reporter. 2017. N 3. P. 16–20.