Интеграл Фурье

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на любом промежутке вещественной оси, кусочно-непрерывная $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ и имеет при любом вещественном x односторонние производные.

Тогда, по аналогии с определением тригонометрического ряда Фурье, заменив операцию суммирования интегрированием, ей можно поставить в соответствие функцию $\Upsilon(x)$, являющуюся несобственным интегралом, зависящим от параметра $x \in (0, +\infty)$, вида

$$Y(x) = \int_0^{+\infty} \big(a(u)\cos xu + b(u)\sin xu \big) du\,, \tag{3}$$

где $a(u) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos ut\,dt$ и $b(u) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin ut\,dt$.

Имеет место

Теорема 1. В точке x будет верно равенство

$$Y(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Функции $a(u)$ и $b(u)$ могут рассматриваться (по аналогии с последовательностями $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$, которые являются дискретным спектром периодической функции) как *непрерывные* спектры *непериодической* функции $f(x)$.

А сама функция $Y(x)$, называемая *интегралом Фурье*, может интерпретироваться как гармоническое разложение для непериодической функции.

Связь ряда Фурье и интеграла Фурье может быть продемонстрирована более наглядно и естественно при помощи следующего предельного перехода в стандартной римановской интегральной сумме.

Как мы видели ранее, каждой абсолютно интегрируемой на отрезке $[-A, A]$ функции $f(x)$ можно поставить в соответствие, определенную на $\mathbf{R}$, $2A$-периодическую функцию $\Phi(x)$ вида

$$\Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi k x}{A} + b_k \sin \frac{\pi k x}{A} \right) , \qquad (2)$$

называемую *рядом Фурье*, где коэффициенты a_k и b_k определялись по формулам

$$a_0 = \frac{1}{A} \int_{-A}^{A} f(u)\, du , \quad a_k = \frac{1}{A} \int_{-A}^{A} f(u) \cos \frac{\pi k u}{A} du \quad \forall k \in \mathbf{N} \qquad \text{и}$$

$$b_k = \frac{1}{A} \int_{-A}^{A} f(u) \sin \frac{\pi k u}{A} du \quad \forall k \in \mathbf{N} .$$

Тогда $\forall x \in (-A, A) \quad \Phi(x) = \dfrac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$.

Сделаем следующие преобразования, исходя из формулы (1).

$$J(x,A)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi kx}{A}+b_k\sin\frac{\pi kx}{A}\right)=$$

$$=\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}f(t)\,dt+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{1}{A}\int_{-A}^{A}f(t)\cos\frac{\pi kt}{A}dt\right)\cos\frac{\pi kx}{A}+\left(\frac{1}{A}\int_{-A}^{A}f(t)\sin\frac{\pi kt}{A}dt\right)\sin\frac{\pi kx}{A}\right)=$$

$$=\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}f(t)\,dt+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{A}\int_{-A}^{A}f(t)\left(\cos\frac{\pi kt}{A}\cdot\cos\frac{\pi kx}{A}+\sin\frac{\pi kt}{A}\cdot\sin\frac{\pi kx}{A}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{A}\int_{-A}^{A}f(t)\cos\frac{\pi k}{A}(x-t)dt\,. \qquad (3)$$

Рассмотрим функцию $\Psi(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-A}^{A}f(t)\cos\omega(t-x)dt$, определенную для $\omega\in(0,A)$. Построим для нее *римановскую интегральную сумму* вида $\sigma_N=\sum\limits_{k=1}^{N}\Delta_k\Psi(\omega_k)$, в которой $\Delta_k=\frac{A}{N}$ − мелкость разбиения промежутка $(0,A]$, а $\omega_k=\frac{\pi k}{A}$ принадлежит k-му участку разбиения.

Тогда, с учетом $\lim\limits_{A\to+\infty}\frac{1}{2A}\int\limits_{-A}^{A}|f(t)|\,dt=0$, переход в (3) к пределу дает

$$\lim_{A\to+\infty}J(x,A)=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\Delta_k\Psi(\omega_k)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(x-t)dt=$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\big(a(\omega)\cos\omega x+b(\omega)\sin\omega x\big)d\omega=Y(x)\,, \qquad (4)$$

где $a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,dt$ и $b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,dt$.

Здесь важно, однако, понимать, что в этих формулах были объединены в один сразу три предельных перехода:

- переход от интегральной суммы к определенному интегралу за счет устремления мелкости разбиения к нулю;
- переход от определенного интеграла к несобственному в особой точке $+\infty$;
- переход от определенного интеграла к несобственному в особой точке $-\infty$.

При этом совместное выполнение предельных переходов первого со вторым, равно как первого с третьим вполне корректно. Но совместное выполнение второго и третьего перехода явно нарушает определение существования несобственного интеграла с несколькими особыми точками (в нем требуется существование интеграла во *всех* особых точках при *независимых* предельных переходах к каждой из них). Этот вопрос мы рассмотрим позднее.

Для иллюстрации этой интерпретации рассмотрим

Пример 6. Представить интегралом Фурье для $\tau = 10$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ при } |x| \le \tau, \\ 0, \text{ при } |x| > \tau. \end{cases}.$$

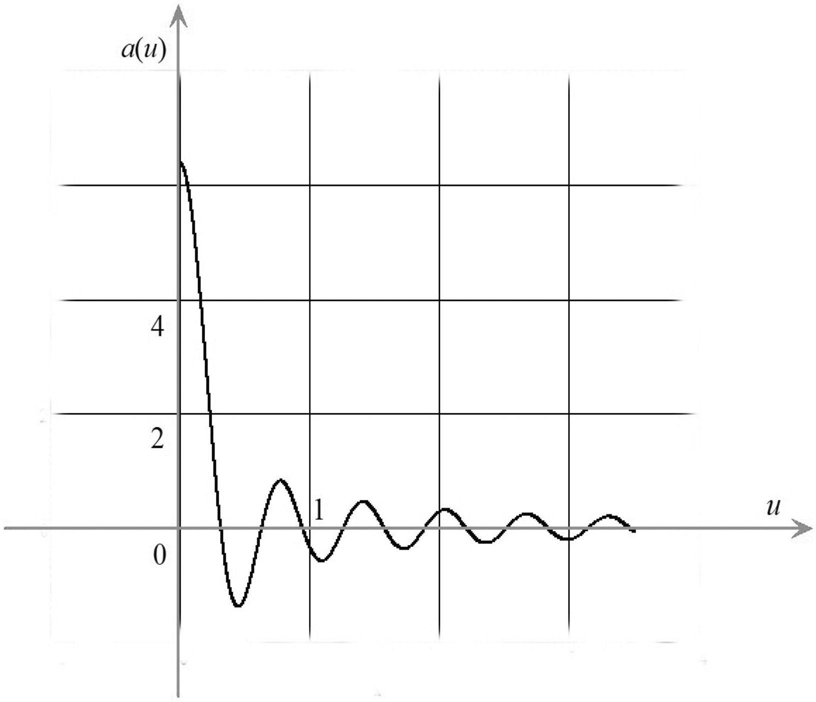
Решение: Поскольку функция $f(x)$ четная, то очевидно, что $b(u) \equiv 0$. Для $a(u)$ имеем

$$a(u) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos ut\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f(u)\cos ut\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\tau}\cos ut\,dt = \frac{2\sin\tau u}{u} \quad .$$

Следовательно, искомое представление будет

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin\tau u\cdot\cos xu}{u}\,du .$$

График непрерывной спектральной функции $a(u)$ имеет вид.



Связь ряда Фурье и интеграла Фурье

Приведем сопоставление определений и свойств ряда и интеграла Фурье для абсолютно интегрируемой функции $f(x)$.

Дано: функция $f(x)$ определена и абсолютно интегрируема на отрезке $[-A,A]$, $A>0$.	Дано: функция $f(x)$ определена, абсолютно интегрируема $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, кусочно-непрерывна на любом отрезке вещественной оси и имеет односторонние производные для каждого вещественного x.
Ей сопоставляется функция $\Phi(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi kx}{A}+b_k\sin\frac{\pi kx}{A}\right)$, (1)	Ей сопоставляется функция $Y(x)=\int\limits_0^{+\infty}\big(a(\omega)\cos\omega x+b(u)\sin\omega x\big)d\omega$ (2)
Где $a_0=\frac{1}{A}\int\limits_{-A}^{A}f(t)\,dt$, $a_k=\frac{1}{A}\int\limits_{-A}^{A}f(t)\cos\frac{\pi kt}{A}dt \quad \forall k\in\mathbf{N}$ $b_k=\frac{1}{A}\int\limits_{-A}^{A}f(t)\sin\frac{\pi kt}{A}dt \quad \forall k\in\mathbf{N}$	Где $a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,dt$ $b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,dt$
Справедливо равенство $\lim\limits_{x\to x_0}\Phi(x)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}\ \forall x_0\in(-A,A)$	Справедливо равенство $\lim\limits_{x\to x_0}Y(x)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}\ \forall x_0\in(-\infty,+\infty)$
Функция $\Phi(x)$ определена на $x\in(-\infty,+\infty)$, $2A$-*периодическая*	Функция $\Upsilon(x)$, определена на $x\in(-\infty,+\infty)$, вообще говоря, *непериодическая*
Последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$, $k\in\mathbf{N}$, называются *дискретным спектром* $f(x)$	Функции $a(\omega)$ и $b(\omega)$, $\omega\in(0,+\infty)$, называются *непрерывным спектром* функции $f(x)$.