Использование несобственных интегралов, зависящих от параметра, нередко возникает в различных прикладных математических и физических задачах.

Эйлеровы интегралы

Большое число практически важных задач приводят к необходимости использования специального класса функций, называемых *эйлеровыми интегралами*.

Определение 1. *Эйлеровым интегралом первого рода* (или *бета-функцией*) называется функция двух переменных вида

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx,\quad \alpha>0,\quad \beta>0\,.$$

. *Эйлеровым интегралом второго рода* (или *гамма-функцией*) называется функция вида

$$\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx,\quad p>0\,.\,.$$

Одним из первых, кто исследовал эти функции, был двадцатидвухлетний Леонард Эйлер, что дало повод Адриену Лежандру позднее назвать их эйлеровыми интегралами.

Со временем оказалось, что число приложений, которые так или иначе связаны с эйлеровыми интегралами, настольно велико, что целесообразно их выделение в особый класс функций.

Перечислим (без обоснования) основные свойства эйлеровых интегралов.

1) Область определения: $B(\alpha,\beta)$ существует $\forall\alpha,\beta\in(0,+\infty)$, $\Gamma(p)$ − $\forall p>0$,

2) $B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha)$ "*симметричность*",

3) $B(\alpha,\beta)=\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, выражение бета-функции через гамма-функцию,

4) $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)\quad p>0$ свойство "*понижения*",

5) $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\dfrac{\pi}{\sin\pi p}\quad p\in(0,1)$ свойство "*дополнения*".

Гамма и бета-функции являются удобным средством для вычисления некоторых интегралов, в частности многих интегралов, которые "не берутся" в элементарных функциях.

Для эйлеровых интегралов имеются компьютерные процедуры нахождения значений, и потому при вычислениях они могут использоваться наравне с элементарными функциями.

Рассмотрим некоторые примеры.

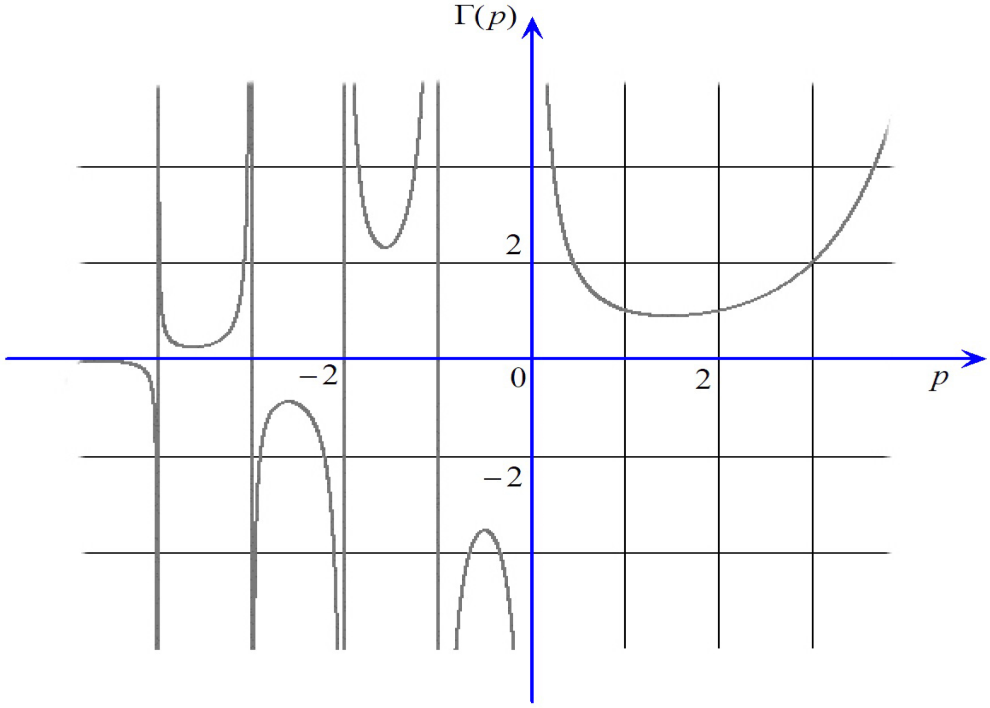
Пример 1. Формула 4) (свойство "понижения") доказывается непосредственно интегрированием "по частям". При этом оказываются верными равенства:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) =$$
$$= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \ldots = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1\cdot \Gamma(1) = n!\cdot\Gamma(1)$$

или $\Gamma(n+1) = n!$, поскольку очевидно ☺, что $\Gamma(1) = 1$.

Откуда следует, что $\Gamma(p+1)$ может рассматриваться как *обобщение определения* факториала на любое положительное число.

Пусть теперь p вещественное, но неравное $0,-1,-2,-3,\ldots$, число. Тогда формулу 4) можно принять за <u>определение</u> *гамма-функции* на "почти всю" вещественную ось. Графическая интерпретация результата такого определения имеет следующий интересный вид:



Наконец, как вы узнаете в дальнейшем из курса ТФКП, еще более интересные и полезные результаты получаются при расширении области определения *гамма-функции* на комплексную плоскость.

Пример 2. Найти значение "неберущегося" интеграла Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Решение: Сделаем замену переменной интегрирования:

$$u = x^2, \quad 2x dx = du, \quad dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

в интеграле Пуассона, получим:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{-u}\,du = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

поскольку из 5) - свойства "дополнения" имеем

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi .$$

Следует заметить (ибо это может оказаться полезным), что *бета-функция* допускает другие формы своей записи.

Например, сделав замену

$$x = \cos^2 \varphi \text{ с } dx = -2\cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi ,$$

мы получим в итоге

$$B(\alpha,\beta) = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\alpha-1}\varphi \cdot \sin^{2\beta-1}\varphi \, d\varphi, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 .$$

А, если использовать замену

$$x = \frac{u}{u+1} \quad \text{и} \quad dx = \frac{du}{(1+u)^2} \ ,$$

то *бета-функция* может быть представлена с $u \in (0, +\infty)$ как

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha - 1} du}{(1+u)^{\alpha + \beta}} \, . \qquad (1)$$

Эйлеровы интегралы настолько хорошо исследованы, описаны и запрограммированы, что можно задачу считать решенной, если ответ выражен через *бета-* и *гамма-функции*.

Пример 3. Найти при $\alpha > -1$ и $\beta > -1$ интеграл

$$I(a,b) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x \cos^\beta x \, dx \ .$$

Решение: сделав соответствующую замену и применив представление (1), получим

$$I(a,b) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 u^{\frac{a+1}{2}} (1-u)^{\frac{b+1}{2}} du = \frac{1}{2} B\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right) \ .$$

Следующие примеры демонстрируют многообразие возможностей использования *эйлеровых интегралов*.

Пример 4. Вычислить несобственный интеграл $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$.

Решение: Этот интеграл "берущийся", поскольку он берется от дробно-рациональной функции. Применив разложение на простейшие дроби (вспоминаем письменный экзамен по МА весной на 1 курсе), из

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{6}\ln\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \ ,$$

получим (проверьте!), что $I = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Однако, подобных скучных выкладок можно избежать, если заметить, что при замене $u = x^3$ в силу формулы (1) получим

$$I = \frac{1}{3}\int\limits_0^{+\infty} \frac{du}{(u+1)\sqrt[3]{u^2}} = \frac{1}{3}\int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{3}-1}du}{(u+1)^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}} = \otimes \ .$$

Но тогда из свойств 3) и 5) вытекают равенства:

$$\otimes = \frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \ .$$

Аналогичным методом можно решить и

Пример 5. Вычислить несобственный интеграл $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{2a-1} x\, dx$ при $a \in (0,1)$.

Решение: Сделаем замену $\operatorname{tg} x = \sqrt{u}$ при $u > 0$. Тогда $dx = \frac{1}{1+u} \cdot \frac{du}{2\sqrt{u}}$ и, следовательно,

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{2a-1} x\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} u^{\frac{2a-1}{2}} \frac{1}{1+u} \cdot \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{a-1}}{(1+u)^1} du = \otimes \ .$$

Применим опять свойства 3) и 4), что даст нам окончательно

$$\otimes = \frac{1}{2} B(a, 1-a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\sin \pi a} \ .$$