

ПОЛНОТА СИСТЕМ ФУНКЦИЙ.

Ниже мы будем использовать следующие определения и теоретические факты.

В любом конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны (по сходимости). В бесконечномерных пространствах это может не выполняться.

Линейное пространство непрерывных на $[a, b]$ функций $f(x)$ с нормой $\|f\|_{CL[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$ будем обозначать как $CL[a, b]$ или $C[a, b]$.

Линейное пространство непрерывных на $[a, b]$ функций $f(x)$ с нормой $\|f\|_{CL_1[a,b]} = \int_a^b |f(x)| dx$ будем обозначать как $CL_1[a, b]$.

Линейное пространство непрерывных на $[a, b]$ функций $f(x)$ с нормой $\|f\|_{CL_2[a,b]} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$ будем обозначать как $CL_2[a, b]$.

При этом имеют место полезные оценки:

$$\|f\|_{CL_1[a,b]} \leq (b-a) \|f\|_{CL[a,b]} \text{ и } \|f\|_{CL_2[a,b]} \leq \sqrt{b-a} \|f\|_{CL[a,b]}.$$

Можно показать, что из сходимости по норме $\|f\|_{CL_2[a,b]}$ (как иногда говорят, *сходимости в среднем квадратичном*) не следует сходимости по норме $\|f\|_{CL[a,b]}$ (*равномерная сходимость*), а из сходимости по норме $\|f\|_{CL_1[a,b]}$ (*сходимости в среднем*) не следует сходимости в среднем квадратичном.

Определение. Счетная система элементов $\{g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots\}$ в линейном нормированном пространстве L называется *полной*, если

$$\forall f(x) \in L \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \rightarrow \quad \exists k \in \mathbf{N} \quad \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}: \quad \left\| f - \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j \right\| < \varepsilon.$$

Заметим, что *отрицание* этого определения имеет вид:

$$\exists f_0(x) \in L \quad \exists \varepsilon_0 > 0 \quad \rightarrow \quad \forall k \in \mathbf{N} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}: \quad \left\| f_0 - \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j \right\| \geq \varepsilon_0.$$

Справедливы теоремы Вейерштрасса:

- 1°. Система функций $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ полна в $C[a, b]$ на любом отрезке $[a, b]$.
- 2°. Система функций $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$ полна в подпространстве непрерывных на $[-\pi, \pi]$ функций, для которых $f(-\pi) = f(\pi)$.

Полные системы можно использовать для аппроксимаций функций подходящего класса конечными многочленами с любой наперед заданной точностью.

Рассмотрим некоторые примеры *исследования систем функций на полноту* (то есть, доказательства факта наличия или отсутствия этого свойства).

Пример 01. Система нечетных полиномов Лежандра, дополненная функцией равной тождественно 1, полна в пространстве непрерывных нечетных функций на промежутке $[0,1]$.

Решение: Любую непрерывную на $[0,1]$ функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = f(0) + \varphi(x)$, где $\varphi(0) = 0$.

Функцию $\varphi(x)$, а значит и функцию $f(x) - f(0)$ можно продолжить нечетным образом на $[-1,1]$. Значит $\exists \alpha_k$ такие, что

$$\left\| f(x) - f(0) \cdot 1 - \sum_{k=1}^n \alpha_k P_{2k-1}(x) \right\| < \varepsilon \text{ на } [-1,1].,$$

откуда следует полнота системы $\{1, x, x^3, \dots, x^{2k-1}, \dots\}$ на $[0,1]$.

Пример 02. Система синусов нечетных кратных дуг неполна в пространстве непрерывных функций на промежутке $[0,1]$.

Решение: Следует из оценки :
$$\max_{x \in [0,1]} \left| 1 - \sum_{j=1}^n \lambda_j \sin(2j-1)x \right| \geq 1.$$

Задача 03. Показать, что система функций $\{x^2, x^4, x^6, \dots, x^{2n}, \dots\}$
1) не полна в $C[-1,2]$,
2) полна в $C[1,2]$.

Решение. 1) Пусть $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^{2k+2}$.

Во множестве $C[-1,2]$ имеется функция $f_0(x) \equiv 1$, для которой существует точка $x_0 = 0 \in C[-1,2]$ такая, что

$$\max_{x \in [-1,2]} |f_0(x) - P_n(x)| \geq |f_0(x_0) - P_n(x_0)| = |1 - 0| = 1 = \varepsilon_0$$

при любом $P_n(x)$.

Тогда из отрицания определения полноты системы функций следует, что система функций $\{x^2, x^4, x^6, \dots, x^{2n}, \dots\}$ не полна в $C[-1,2]$.

2) Для произвольной функции $f(x) \in C[1,2]$ оценим величину

$$\max_{x \in [1,2]} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^{2k+2} \right| = \max_{x \in [1,2]} x^2 \cdot \left| \frac{f(x)}{x^2} - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^{2k} \right| =$$

при замене $t = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{t}$

$$= \max_{t \in [1,4]} t \cdot \left| \frac{f(\sqrt{t})}{t} - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k t^k \right| < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

поскольку $\max_{t \in [1,4]} t \leq 4$ и $\max_{t \in [1,4]} \left| \frac{f(\sqrt{t})}{t} - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k t^k \right| < \frac{\varepsilon}{4}$ по теореме Вейерштрасса

в силу непрерывности на $[1,4]$ функции $\frac{f(\sqrt{t})}{t}$.

Следовательно, по определению полноты системы функций, система $\{x^2, x^4, x^6, \dots, x^{2n}, \dots\}$ полна в $C[1,2]$.

Задача 04. Показать, что система функций $\{x, x^3, x^5, \dots, x^{2n+1}, \dots\}$
 1) не полна в $C[-4, \pi]$,
 2) полна в $C[\pi, 4]$.

Решение. 1) Пусть $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^{2k+1}$.

Во множестве $C[-4, \pi]$ имеется функция $f_0(x) \equiv 1$, для которой существует точка $x_0 = 0 \in C[-4, \pi]$ такая, что

$$\max_{x \in [-1, 2]} |f_0(x) - P_n(x)| \geq |f_0(x_0) - P_n(x_0)| = |1 - 0| = 1 = \varepsilon_0$$

при любом $P_n(x)$.

Тогда из отрицания определения полноты системы функций следует, что система функций $\{x, x^3, x^5, \dots, x^{2n+1}, \dots\}$ не полна в $C[-4, \pi]$.

2) Произвольную функцию $f(x) \in C[\pi, 4]$ непрерывно продолжим нечетным образом на $[-4, 4]$. Полученную функцию обозначим $g(x) \in C[-4, 4]$. Для нее верно равенство $g(x) = -g(-x) \quad \forall x \in [-4, 4]$.

Для $g(x)$ справедлива теорема Вейерштрасса:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists R_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \alpha_k x^k : \forall x \in [-4, 4] \mapsto |g(x) - R_n(x)| < \varepsilon.$$

Но при этом будет также верно и $\forall x \in [-4, 4] \mapsto |g(-x) - R_n(-x)| < \varepsilon$.

Заметим также, что $P_n(x) = \frac{R_n(x) - R_n(-x)}{2} \quad \forall x \in [-4, 4]$ и что из нечетности

функции $g(x)$ следует равенство $g(x) = \frac{g(x) - g(-x)}{2} \quad \forall x \in [-4, 4]$.

Оценим теперь

$$\begin{aligned} |g(x) - P_n(x)| &= \left| \frac{g(x) - g(-x)}{2} - \frac{R_n(x) - R_n(-x)}{2} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} |g(x) - R_n(x)| + \frac{1}{2} |g(-x) - R_n(-x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall x \in [-4, 4]. \end{aligned}$$

Это означает, что система функций $\{x, x^3, x^5, \dots, x^{2n+1}, \dots\}$ полна в $C[-4, 4]$, а, значит, и в $C[\pi, 4]$. Ибо, по построению, $g(x) = f(x) \quad \forall x \in [\pi, 4]$.

Пример 05.

Задача: выяснит ли полной система функций $\{ 1; \cos x; \cos 2x; \dots \cos nx; \dots \}$
на $C[-2, 4]$,
на $C[2, 4]$.

Решение:

1°. Напомним: система функций $\{ 1; \cos x; \cos 2x; \dots \cos nx; \dots \}$ является *полной* на

$[a, b]$, если $\forall f(x) \forall \varepsilon > 0 \exists P_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \cos kx$ такое, что

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \alpha_k \cos kx \right| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b].$$

Отрицание этого определения звучит так:

система функций $\{ 1; \cos x; \cos 2x; \dots \cos nx; \dots \}$ не является *полной* на $[a, b]$, если

$\exists f_0(x) \exists \varepsilon_0 > 0 \exists x_0 \in [a, b]$ такие, что $\forall P_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \cos kx$

$$\left| f_0(x_0) - \sum_{k=0}^n \alpha_k \cos kx_0 \right| \geq \varepsilon_0.$$

2°. Предположим противное: данная система полна на $[-2,4]$.

Тогда, для не равной тождественно 0, *нечетной* непрерывной функции $f(x)$ найдется точка $x_0 \in (0,2)$, такая что

$$f(x_0) = A > 0 \quad \text{и} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad |f_0(x_0) - P_n(x_0)| < \varepsilon, \quad \text{где} \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \cos kx.$$

Заметим, что $P_n(x)$ есть *четная* функция по построению.

При этом $\exists x' = -x_0 \in (-2,0)$, где в силу нечетности $f(x)$ и четности $P_n(x)$, будет справедлива оценка:

$$|f_0(x') - P_n(x')| = |f_0(x_0) + P_n(x_0)| > 2A - \varepsilon,$$

из которой следует неполнота системы $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos kx, \dots\}$ на $[-2,2]$, а, значит, и на $[-2,4]$. Но, это противоречит исходному предположению.

Наконец, если $f(x) < 0 \quad \forall x \in (0,2)$, то проводим аналогичные рассуждения для непрерывной *нечетной* функции $g(x) = -f(x)$.

3°. Рассмотрим случай $C[2, 4]$.

Пусть $S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{\pi kx}{l} + b_k \sin \frac{\pi kx}{l} \right)$ частичные суммы ряда Фурье для

функции $f(x)$ $x \in [-l, l]$, а $\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1}$ – соответствующие им суммы

Фейера.

Доопределим $f(x)$ на $[-4, 4]$ четным образом, получим четную, непрерывную функцию $g(x)$ такую, что $g(x) = f(x) \quad \forall x \in [2, 4]$. Частичные суммы ряда Фурье (равно как и суммы Фейера) для функции $g(x)$ будут некоторыми линейными комбинациями функций из системы $\{1; \cos x; \cos 2x; \dots \cos nx; \dots\}$.

Воспользуемся теперь теоремой Фейера о том, что, если функция $g(x)$ непрерывна на $[-l, l]$ и $g(-l) = g(l)$, то функциональная последовательность $\{\sigma_n\}$ сходится равномерно к сумме ряда Фурье для функции $g(x)$. Из этой теоремы следует, что

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0$ такое, что $\forall m \geq N_0 \quad \sup_{x \in R} |g(x) - \sigma_m| < \varepsilon$, но тогда будет верно и

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0$ такое, что $\forall m \geq N_0 \quad \sup_{x \in [2, 4]} |f(x) - \sigma_m| < \varepsilon$. Что доказывает полноту

системы функций $\{1; \cos x; \cos 2x; \dots \cos nx; \dots\}$ на $C[2, 4]$.