ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Определение и основные свойства

В большом числе случаев формулировку физического закона, описание явления или процесса удается выполнить, используя понятие *функции многих переменных* − правила, устанавливающего *однозначное соответствие* между двумя множествами, первое из которых состоит из конечных упорядоченных наборов чисел − "векторов", а второе − состоит из чисел.

Однако в процессе развития физики выяснилось, что этого инструмента может оказаться недостаточно.

Например, при помощи функций не удается построить корректное количественное описание $\rho_M(x,r)$ − пространственной *плотности материальной точки с центром в* r *и конечной массы* M .

С физической точки зрения, из равенства $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_M(x,r)\,dx = M$ следует *неограниченное возрастание* $\rho_M(x,r)$ при неограниченном приближении x к r, что невозможно.

Об этой "теоретической неприятности" физики знали со времен Ньютона-Лейбница, но особо не расстраивались, поскольку измерить практически можно было *только интеграл от* $\rho_M(x,r)$, а "функция плотности" $\rho_M(x,r)$ для материальной точки смысла не имела.

Рассмотрим эту проблему с формальной, математической точки зрения. При этом предположим, что все используемые в записях интегралы имеют смысл, а r − произвольный фиксированный вещественный параметр.

Заметим, что, если пользоваться только понятием "функция", то решения задачи:

$$\textit{найти функцию } f(x,r) \textit{ такую, что } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,r)\varphi(x)\,dx = \varphi(r), \tag{1}$$

не существует. Попросту говоря, нет такой функции $f(x,r)$, которая "умела бы делать" то, что требует равенство (1).

Но чем тогда может в принципе являться решение этой задачи?

Равенство (1) *каждой* допустимой функции $\varphi(x)$ ставит в соответствие *единственное* число $f(\varphi(x))$. Иначе говоря, условие (1) определяет некоторую зависимость, **аргументом** которой является обычная *функция*, в то время как, **значение** этой зависимости есть *число*.

Зависимости такого вида в математике известны. Например,

- каждому из геометрических векторов можно поставить в однозначное соответствие его длину,
- каждой квадратной матрице порядка n можно поставить в соответствие ее детерминант,
- каждой, непрерывной на некотором промежутке вещественной оси можно поставить в однозначное соответствие ее определенный интеграл.

Зависимости подобного типа принято называть *функционалами*. Их можно определить, например, так:

> будем говорить, что на некотором множестве математических объектов X задан *функционал*, имеющий значения в числовом множестве Y, если задано правило, по которому *каждому* элементу из X поставлено в соответствие *единственное* число из Y.

Общепринятого единообразного обозначения для функционалов нет. Хотя достаточно часто используются функцеподобные формы записи, типа $Y(X)$. Вполне уместные, поскольку в случае, когда X есть числовое (или "векторное") множество, определения функционалов и функций совпадают.

При определении функционалов требования к свойствам множества X могут весьма широко варьироваться в зависимости от рассматриваемой задачи. Воспользуемся этой свободой при определении свойств области определения функционалов, которые могут являться решениями задач вида (1).

Эта область определения, обычно обозначаемая как D, состоит из функций $\varphi(x)$.

Не будем здесь скрывать наших, далеко идущих планов: набор требований, формулируемых ниже, позволит в перспективе строить методы решения задач существенно более серьезных, чем задача (1).

Речь идет о задачах Коши, краевых и смешанных задачах для дифференциальных уравнений *в частных производных второго порядка*, называемых обычно *уравнениями математической физики*.

Сформулируем требования как индивидуально для функций $\varphi(x)$, являющихся функциями одной вещественной переменной, так и для всей их совокупности.

1°. Пусть функции $\varphi(x) \in D$ определены на *всей* вещественной оси и имеют на $\mathbf{R}$ производную *любого* порядка;

2°. $\exists a \geq 0: \quad \forall x: \left| x \right| \geq \left| a \right| \quad \mapsto \quad \varphi(x) \equiv 0$.

Функции, удовлетворяющие условию 2°, принято называть *финитными*, а, одновременно 1° и 2°, − *основными*.

Пример 1: основной является функция-"шапочка", задаваемая формулой

$$\varphi(x)=\begin{cases} e^{-\frac{4}{4-x^2}}, \text{при} \left| x \right| < 2, \\ 0, \qquad \text{при} \left| x \right| \geq 2, \end{cases}$$ график которой показан на рис.1.

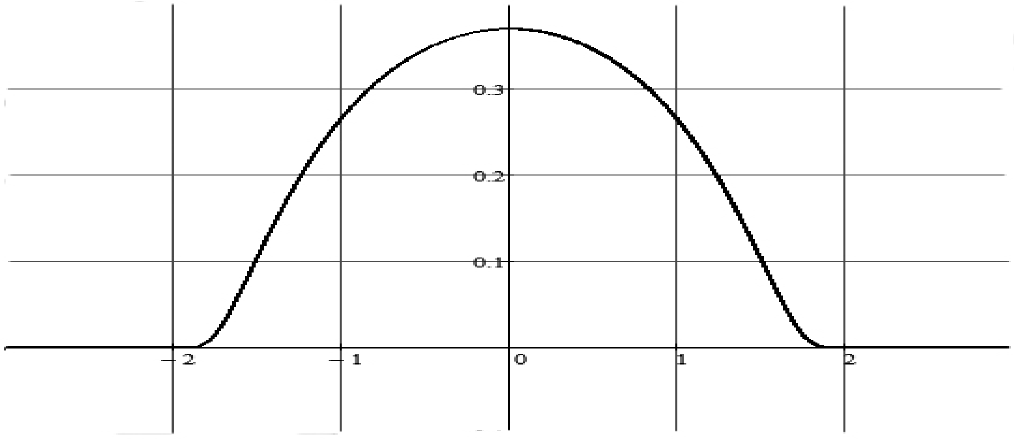


Рис. 1. Пример основной функции.

Нетрудно установить, что множество D является *линейным пространством* со стандартно введенными операциями сложения и умножения числа на элемент.

Определим теперь *сходимость* последовательности $\{\varphi_{(k)}(x)\}$ элементов в D. Символ $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_{(k)}(x)=\varphi^*(x)$ будет означать, что на множестве $\mathbf{R}$ имеет место *равномерная* по x сходимость самой последовательности, так и для последовательностей из производных *любого* порядка $\varphi_{(k)}^{(n)}(x)\rightrightarrows\varphi^{*(n)}$ $\forall n=0,1,2,\dots$.

Следует отметить, что данное определение сходимости не может быть сведено к использованию какой-либо метрики (см., например, Петрович А.Ю., Ч.3 Стр. 292-293).

Пример 2: последовательность основных функций вида $\varphi_{(k)}(x)=\dfrac{\varphi^*(x)}{n}$, где $\varphi^*(x)$ − функция-"шапочка", сходится в D к функции тождественно равной нулю на множестве всех вещественных чисел $\mathbf{R}$.

Перейдем теперь к определению функционалов в пространстве D − основных функций. Итак, мы называем *функционалом в пространстве* D правило, по которому *каждой* основной функции $\varphi(x)$ ставится в соответствие *единственное* число $\mathcal{F}(\varphi(x)) \in \mathbf{R}$.

Заметим также, что функционалы, определенные на D, можно складывать и умножать на число. В результате будут получаться новые функционалы.

Используя свойства пространства основных функций D, среди всевозможных видов функционалов можно выделить специальный класс, элементы которого мы назовем *линейными* и *непрерывными* функционалами. Приведем его определение.

Определение 1.: Функционал $\mathcal{F}(\varphi)$ называется *линейным* в D, если $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ и $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in D$ выполняется равенство

$$\mathcal{F}(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1\mathcal{F}(\varphi_1) + \lambda_2\mathcal{F}(\varphi_2) \quad .$$

Определение 2.: Функционал $\mathcal{F}(\varphi)$ называется *непрерывным* в D, если $\forall \{\varphi_{(k)}\}$ сходящейся к $\varphi^*(x)$ в D, имеет место $\lim\limits_{k\to\infty}\mathcal{F}(\varphi_{(k)}(x)) = \mathcal{F}(\varphi^*(x))$.

Теперь будем рассматривать *только* линейные и непрерывные функционалы в D, которые будем называть, следуя сложившейся традиции. *обобщенными функциями*.

Нетрудно заметить, что *в полной своей совокупности* с операциями сложения функционалов и умножения числа на функционал, обобщенные функции образуют линейное пространство. Его принято обозначать D'.

То, что функционалы принято называть функциями, нам придется проглотить. Это − не очень хорошо, конечно.

А вот, прилагательное *обобщенные* наводит на вполне законный вопрос, а что, собственно говоря, рассматриваемые нами функционалы обобщают?

Возвращаясь к задачам вида (1), получаем следующее объяснение.

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируемая на любом промежутке вещественной оси. Тогда (это теорема!) интеграл вида

$$\mathcal{G}(\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx \tag{2}$$

есть линейный и непрерывный функционал на D. То есть, функционал $\mathcal{G}(\varphi)\in D'$.

Значит, часть функционалов из D' может быть определена по формуле (2) при помощи обычных, абсолютно интегрируемых функций $f(x)$. Такие обобщенные функции будем называть *регулярными*. Все прочие − *сингулярными*.

Это и дает повод использовать термин *обобщенные* для обозначения множества D' − совокупности регулярных и сингулярных функционалов.

Итак, регулярные обобщенные функции определяются при помощи (2).

Способы же описания сингулярных обобщенных функций могут быть самыми разнообразными, хоть стихами. Рассмотрим

Пример 3: Пусть функционал $\mathcal{F}(\varphi)$ ставит в соответствие основной функции $\varphi(x)$ ее значение в точке $a \in \mathbf{R}$. Показать, что эта $\mathcal{F}(\varphi) \in D'$.

Решение: То, что $\mathcal{F}(\varphi) = \varphi(a) \in \mathbf{R}$ есть функционал на D, − очевидно. Покажем, что он линейный и непрерывный.

Имеем $\mathcal{F}(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1\varphi_1(a) + \lambda_2\varphi_2(a) = \lambda_1\mathcal{F}(\varphi_1) + \lambda_2\mathcal{F}(\varphi_2)$. Это доказывает линейность.

Если имеем $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_{(k)}(x) = \varphi^*(x)$, то по определению сходимости в D $\varphi_{(k)}^{(n)}(x) \rightrightarrows \varphi^{*(n)}$ $\forall n = 0,1,2,\ldots$ Но это значит, что $\varphi_{(k)}(a) \to \varphi^*(a)$. Откуда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty}\mathcal{F}(\varphi_{(k)}) = \lim\limits_{k\to\infty}\varphi_{(k)}(a) = \varphi^*(a) = \mathcal{F}(\varphi^*)$. Таким образом, доказана и непрерывность.

Рассмотренная в примере 3 обобщенная функция имеет специальное наименование. Ее называют − *дельта-функция Дирака* или, просто, *дельта-функция*. Ее стандартное обозначение $\delta_a(x)$.

Важным способом связи между регулярными и сингулярными обобщенными функциями является *предельный переход*, т.е., когда сингулярная обобщенная функция может быть представлена как предел последовательности регулярных функционалов в D'.

Пример 4: Покажем, что в D' для дельта-функции Дирака $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\dfrac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}=\pi\,\delta_0(x)$.

Решение: При любом положительном ε функция $f_\varepsilon(x)=\dfrac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$ будет определять $\mathcal{F}_\varepsilon(\varphi)$ − регулярную обобщенную функцию в D'. Предположим, что в силу финитности, $\exists\ 0\le A<+\infty$ такое, что все $\varphi(x)$ основные функции равны нулю вне отрезка $[-A,A]$. Тогда будут справедливы равенства

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx=\int\limits_{-A}^{+A}f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx=\int\limits_{-A}^{+A}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\,dx=$$

$$=\int\limits_{-A}^{+A}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\Big(\varphi(0)+\varphi(x)-\varphi(0)\Big)\,dx=\varepsilon\,\varphi(0)\int\limits_{-A}^{+A}\frac{dx}{x^2+\varepsilon^2}+\varepsilon\int\limits_{-A}^{+A}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx\,.$$

Для первого слагаемого имеем:

$$\varepsilon\,\varphi(0)\int\limits_{-A}^{+A}\frac{dx}{x^2+\varepsilon^2}=2\varepsilon\,\varphi(0)\int\limits_{0}^{+A}\frac{dx}{x^2+\varepsilon^2}=\frac{2\varepsilon\,\varphi(0)}{\varepsilon}\operatorname{arctg}\frac{A}{\varepsilon}=2\,\varphi(0)\operatorname{arctg}\frac{A}{\varepsilon}\to\pi\,\varphi(0)\,.$$

Для второго слагаемого в силу оценки, следующей из теоремы Лагранжа:

$$|\,\varphi(x)-\varphi(0)\,|\le|\,x\varphi'(\xi)\,|\le|\,x\,|\max_{x\in[-A,+A]}|\,\varphi'(x)\,|=C|\,x\,|$$

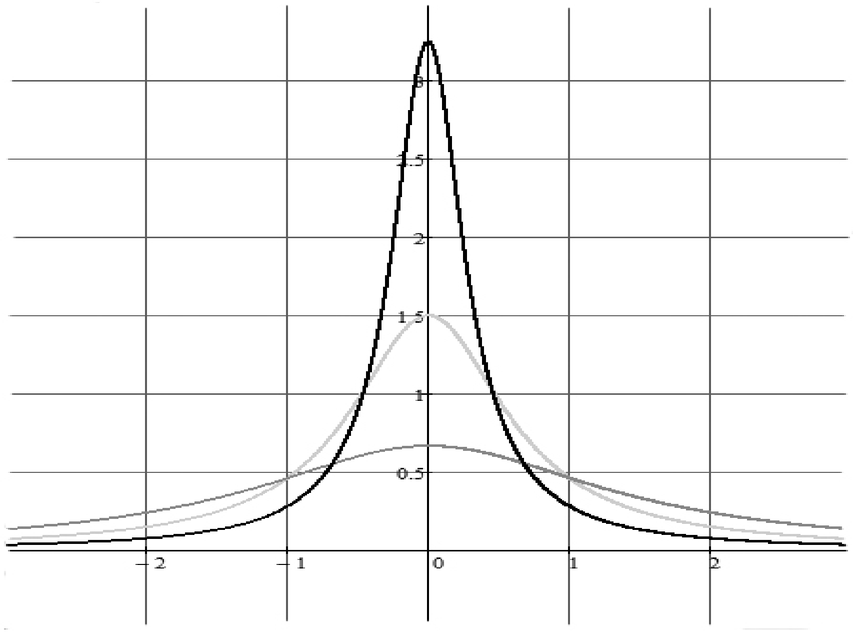
получим

$$\left|\,\varepsilon\int\limits_{-A}^{+A}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2+\varepsilon^2}\,dx\,\right|\le\varepsilon\int\limits_{-A}^{+A}\frac{|\,\varphi(x)-\varphi(0)\,|}{x^2+\varepsilon^2}\,dx\le C\varepsilon\int\limits_{-A}^{+A}\frac{|\,x\,|\,dx}{x^2+\varepsilon^2}=$$

$$=C\varepsilon\int\limits_{0}^{+A}\frac{2x\,dx}{x^2+\varepsilon^2}=C\varepsilon\ln\left(x^2+\varepsilon^2\right)\Big|_0^A=C\varepsilon\ln\left(A^2+\varepsilon^2\right)-2C\varepsilon\ln\varepsilon\underset{\varepsilon\to+0}{\to}0\,.$$

Откуда получаем $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\dfrac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}=\pi\,\delta_0(x)\,.$

На рис.2 показаны графики $f_{\varepsilon}(x)$ для различных значений ε .



Теперь обсудим, как принято записывать обобщенные функции. Заметим, что правая часть формулы (2) в регулярном случае совпадает с записью скалярного произведения, то есть $\boldsymbol{F}(\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx=(f,\varphi)$. Можно сказать, что левая скобка и идентификатор функционала "рокировались".

Данное равенство, если распространить его и на сингулярные случаи, позволяет символически обозначать *любые* обобщенные функции символом (f,φ), где f − идентификатор функционала, а φ обозначает его аргумент − основную функцию.

Заметим, что обратное переобозначение не всегда математически корректно. Например, из символически верного $(\delta_a(x),\varphi)=\varphi(a)$ не следует $(f,\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta_a(x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(a)$, поскольку $\delta_a(x)$ не функция и не имеет конкретного значения в точке x.

Тем не менее, подобные "формулы" можно иногда встретить в информационных ресурсах, где они используются для простоты при объяснениях "на пальцах".