

## ФОРМУЛА ГРИНА

### Определение и свойства

Пусть  $\partial G$  есть кусочногладкий контур, являющийся границей плоской ограниченной области  $G$ .

Тогда, если функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  непрерывно дифференцируемы в  $\bar{G}$ , то справедлива *формула Грина*

$$\iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial G} P dx + Q dy$$

Направление обхода контура таково, что в процессе обхода область  $G$  остается *слева*.

Пусть  $\Gamma_{AB}$  некоторая кусочногладкая линия целиком лежащая в области  $G$ , причем  $A$  - ее начало, а  $B$  - ее конец.

Тогда значение интеграла  $\int_{\Gamma_{AB}} Pdx + Qdy$  не зависит от пути интегрирования

тогда и только тогда, когда  $\exists u(x, y)$  такая, что  $du = Pdx + Qdy$ .

В этом случае  $\int_{\Gamma_{AB}} Pdx + Qdy = u(B) - u(A)$ .

Необходимое условие независимости значения интеграла от пути интегрирования

есть  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ . А, если область  $G$  односвязная, то это условие достаточное.

Наконец, из формулы Грина следует, что площадь области  $G$

может находиться по формуле  $S = \iint_G dx dy = \frac{1}{2} \oint_{\partial G} x dy - y dx$ .

Пример 01. Вычислить  $\oint_{\partial G} (1-x^2)y dx + x(1+y^2) dy$ , где  $G: \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$ .

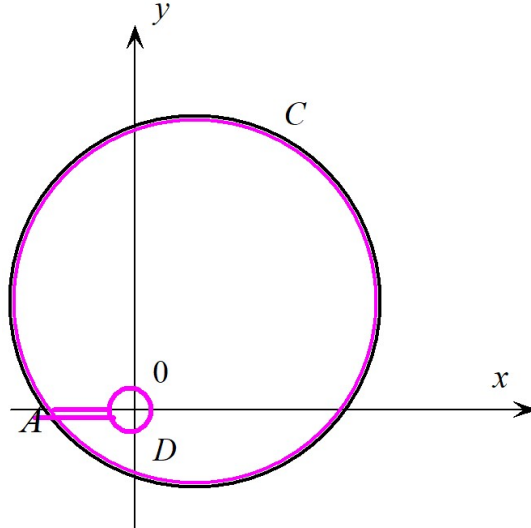
Решение: Имеем

$$\oint_{\partial G} (1-x^2)y dx + x(1+y^2) dy = \iint_G (1+y^2 - 1+x^2) dx dy = \iint_G (x^2 + y^2) dx dy$$

Перейдя к полярным координатам  $= \iint_{G^*} r^3 dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4}{2}$ .

Пример 02. Вычислить  $I_C = \oint_{\partial G} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ , где  $\partial G$  - простой контур, обходящий область, оставляя ее слева..

Решение: Имеем  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$ . Означает ли это, что  $I_C = 0$ ? Не обязательно!



Дело в том, что исходный контур интегрирования может иметь внутреннюю особую точку 0.

Если контур C не охватывает эту точку, то ответ будет  $I_C = 0$ .

Если особая точка внутри "черного" контура, то построим "лиловый" контур (как показано на рисунке)

добавив разрез и достаточно малую окружность, охватывающую особую точку.

Пусть интегралы будут равны:

$I_+$  - по верхнему берегу разреза,

$I_-$  - по нижнему берегу разреза,

$I_D$  - по маленькой окружности вокруг 0,

$I_L$  - по "лиловому контуру".

Имеем  $I_- = -I_+$ .

$I_D$  вычислим непосредственно. Пусть параметризация

маленькой окружности выбрана такой: 
$$\begin{cases} x(t) = a \cos t, \\ y(t) = a \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi),$$

где  $a$  - достаточно малое положительное число.

Тогда, учитывая, что при обходе круга  $D$ , он остается справа, получим

$$I_D = \oint_D \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_{2\pi}^0 \frac{a \cos t \cdot a \cos t - a \sin t \cdot (-a \sin t)}{a^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt = - \int_0^{2\pi} dt = -2\pi.$$

Наконец,  $I_L = 0$ , поскольку внутри "лилового" нет особых точек.

Из адитивности интеграла следует, что  $I_L = I_+ + I_D + I_- + I_C = 0$ . Тогда искомый интеграл будет равен  $I_C = 2\pi$ .

**ВЫБОР СТОРОНЫ ПОВЕРХНОСТИ  
(Система координат *правая* прямоугольная!)**

Параметризация гладкой поверхности  $S$ :  $\vec{r} = \vec{r}(u, v) \quad (u; v) \in \Omega \subseteq E^2$

или в координатах 
$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

определяет не только поверхность, но и ее сторону направлением вектора нормали  $\vec{n}$ .

Введем в рассмотрение векторы  $\vec{r}'_u$  и  $\vec{r}'_v$ . Их векторное произведение есть вектор нормали  $\vec{n} = [\vec{r}'_u, \vec{r}'_v]$ .

Пример 03: для сферы с параметризацией

$$\begin{cases} x = R \cos u \cos v \\ y = R \sin u \cos v \\ z = R \sin v \end{cases} \quad \Omega = \begin{cases} 0 \leq u \leq 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} . \quad \text{При этом}$$

$$\vec{n} = R^2 \begin{vmatrix} \cos u \cos^2 v \\ \sin u \cos^2 v \\ \sin v \cos v \end{vmatrix} \text{ и можно показать, что } \vec{r} = k\vec{n} \text{ , где}$$

$k = R \cos v \geq 0$ . Значит, это *внешняя* нормаль.

### Направляющие косинусы

Из курса линейной алгебры известно, что в ОНБ  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  для координат вектора  $\vec{r}$  верно  $x_i = (\vec{r}, \vec{e}_i) \quad i = 1, 2, 3$ .

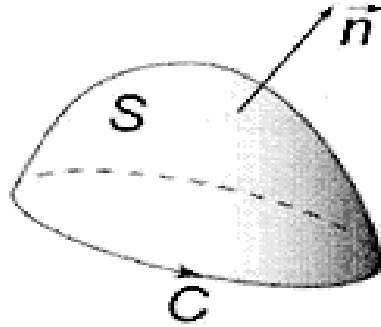
Если  $\vec{n}$  - нормированный (с единичной длиной) вектор, то  $\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix}$ , где

$\alpha, \beta, \gamma$  - углы между вектором  $\vec{n}$  и ортами  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ .



### Формула Стокса

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx$$



В формуле Стокса направление обхода контура  $C$  и направление нормали к поверхности  $S$  должны быть 'согласованы'.

Согласование означает, что наблюдатель, движущийся по направлению обхода контура так, что при направлении нормали от ног к голове, видит поверхность слева от себя.

Заметим, что при  $dz = 0$  формула Стокса превращается в формулу Грина.

Другой вариант записи формулы Стокса

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \det \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds,$$

где в первой строке стоят направляющие косинусы нормированного вектора  $\vec{n}$ , обеспечивающие согласование.

Пример 04. Вычислить  $I_C = \oint_C y dx + z dy + x dz$ , где  $C$  - окружность

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, a > 0 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right\}, \text{ ориентированная против часовой стрелки, если на}$$

нее смотреть с конца оси  $Ox$ .

Решение: 1) Поскольку поверхность  $S$  не задана, в качестве  $S$  возьмем часть плоскости  $x + y + z = 0$ , ограниченной контуром  $C$ . По правилу согласования в

нашем случае нормальный нормированный вектор  $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Наконец, векторное поле имеет вид  $\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ .

$$2) \text{ Для производных векторного поля } \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -1 \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = -1 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -1 \end{cases}$$

Поэтому, окончательно,

$$I_C = \iint_S \left( (-1) \frac{1}{\sqrt{3}} + (-1) \frac{1}{\sqrt{3}} + (-1) \frac{1}{\sqrt{3}} \right) ds = -\frac{3}{\sqrt{3}} \iint_S ds = -\pi a^2 \sqrt{3}.$$

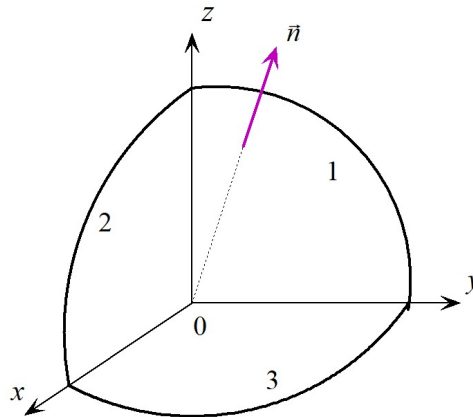
### Формула Гаусса-Остроградского

Пусть  $S$  кусочно гладкая граница замкнутой области  $V$  с непрерывно дифференцируемым векторным полем,  
тогда справедлива формула Гаусса-Остроградского

$$\oiint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz,$$

если  $S$  внешняя сторона границы  $V$ .

Пример 05. Найти  $\oiint_S x^2 y dydz + xy^2 dzdx + xyz dxdy$ , где  $S$  - часть сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, R > 0$ , находящаяся в положительном ортанте.



Решение: 1) Поскольку поверхность  $S$  незамкнутая, то замкнем ее частями координатных плоскостей 1, 2 и 3, как показано на рисунке.

2) Заметим, что на координатных плоскостях 1 и 2 поверхностный интеграл нулевой, поскольку векторное поле нулевое, т.к. здесь  $P = Q = R = 0$ .

На плоской границе 3 поверхностный интеграл также равен нулю, в силу  $\cos \alpha = \cos \beta = 0$  и  $R = 0$ .

3) Значит, можно применить формулу Гаусса-Остроградского для замкнутой области  $V$ . Имеем

$$\begin{cases} P(x, y, z) = x^2 y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = 2xy, \\ Q(x, y, z) = xy^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial y} = 2xy, \\ R(x, y, z) = xyz \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial z} = xyz. \end{cases}$$

Откуда, переходя в тройном интеграле к сферическим координатам

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \psi, \\ y = r \sin \varphi \cos \psi, \\ z = r \sin \psi, \end{cases}$$

получим

$$\begin{aligned} \iiint_V 5xy \, dx dy dz &= 5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R (r \cos \varphi \cos \psi) \cdot (r \sin \varphi \cos \psi) r^2 \cos \psi \, dr = \\ &= R^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \psi \, d\psi = \frac{1}{3} R^5. \end{aligned}$$