ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Пусть дана дважды непрерывно дифференцируемая в некоторой области $\Omega \subseteq E^2$ с ОНБ функция $f(x,y)$. Выясним, при каких условиях эта функция имеет в точке $\begin{Vmatrix} x^* \\ y^* \end{Vmatrix} \in \Omega$ локальный минимум при условии $g(x,y)=0$. Дадим

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(x,y)$ имеет в точке $\begin{Vmatrix} x^* \\ y^* \end{Vmatrix}$ *условный минимум*, если существует $\overset{\circ}{U}_\varepsilon$ - проколотая окрестность, такая, что для *любой* точки $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon$ имеет место $g(x,y)=0$ и выполнено неравенство

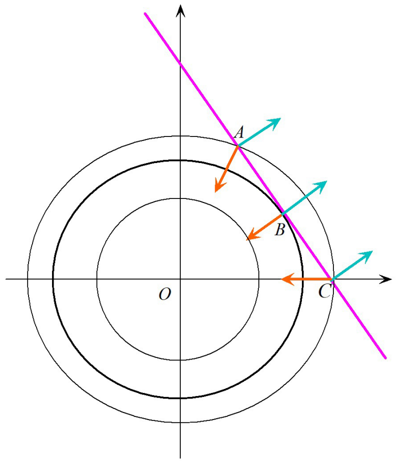
$$f(x,y) > f(x^*,y^*) . \tag{1}$$

Сначала в качестве примера рассмотрим конкретную задачу:

Пример 1. В E^2 исследовать на экстремум функцию $f(x,y) = -x^2 - y^2$ при условии $g(x,y) = x + y - 1 = 0$.

Решение: 1) Очевидно, что эту задачу можно решить методом исключения, выразив y из условия связи через x и подставив $y = 1 - x$ в целевую функцию, приходим к задаче минимизации функции $\Phi(x) = -x^2 - (1-x)^2$ без ограничений, решение которой $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$ и $f = -\frac{1}{2}$.

2) Рассмотрим вначале геометрическую интерпретацию задачи, получив необходимые условия ее решения.



На данном рисунке черным цветом показаны изолинии целевой функции $f(x,y) = -x^2 - y^2$, фиолетовым цветом - точки прямой $g(x,y) = 3x + 2y - 12 = 0$. Оранжевым цветом показаны векторы градиента целевой функции $\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{matrix} \right\|$. Наконец, голубым цветом - векторы градиента функции ограничения $\left\| \begin{matrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{matrix} \right\|$.

Очевидно, что *необходимое* условие экстремума заключается в коллинеарности векторов $\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{matrix} \right\|$ и $\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{matrix} \right\|$ на множестве точек

$$g(x, y) = 3x + 2y - 12 = 0 .$$

Иначе говоря, $\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{matrix} \right\| = -\lambda \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{matrix} \right\|$, где λ -некоторая константа.

Откуда, в силу свойства линейности операции дифференцирования, следует, что существует функция

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y),$$

в терминах которой необходимое условие существования условного экстремума в данной задаче принимает вид:

$$\begin{cases} \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial L}{\partial x} \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

3) В рассматриваемой задаче $L(x, y, \lambda) = -x^2 - y^2 + \lambda(x + y - 1)$.
Значит необходимые условия экстремума принимают вид

$$\begin{cases} -2x + \lambda = 0 \\ -2y + \lambda = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Очевидным решением этой системы является тройка чисел $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2},\ \lambda = 1$.

Сделаем обобщение данного подхода для задачи:

$$\begin{array}{l} \text{исследовать на экстремум функцию } f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{при условиях: } g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad i = [1, m]. \end{array} \tag{2}$$

при этом будем считать, что

$$m < n \text{ и } \operatorname{rg}\left\| \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(g_1, g_2, \dots, g_n)} \right\| = m .$$

Функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i = [1, m]$ непрерывно дифференцируемые.

Введем в рассмотрение функцию (называемую далее *функцией Лагранжа*) вида:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Тогда необходимые условия экстремума функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad i = [1, m].$$

имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad j = [1, n] \\ g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad i = [1, m]. \end{cases} \tag{3}$$

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ удовлетворяют (3). Тогда *достаточное* условие экстремума будет иметь формулировку

> Если квадратичная форма $d_x^2 L$ положительно (отрицательно) определена при условии $dg_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad i = [1, m]$, то задача (3) в точке $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ имеет локальный минимум (максимум).