ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ НА ЭКСТРЕМУМ

В начале рассмотрим случай поиска локального минимума функции *двух* переменных, поскольку уже для $n = 2$ все существенные отличия от одномерной задачи можно легко продемонстрировать.

Пусть дана дважды непрерывно дифференцируемая в некоторой области $\Omega \subseteq E^2$ с ОНБ функция $f(x, y)$. Выясним, при каких условиях эта функция имеет в точке $\left\| \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix} \right\| \in \Omega$ локальный минимум. Дадим

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(x, y)$ имеет в точке $\left\| \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix} \right\|$ *строгий локальный минимум*, если существует $\overset{\circ}{U}_\varepsilon$ - проколотая окрестность, такая, что для *любой* точки $\left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon$ выполнено неравенство

$$f(x, y) > f(x^*, y^*) . \tag{1}$$

Понятно, что проверить выполнение условия определения 1 для всех точек окрестности $\overset{\circ}{U}_{\varepsilon}$ невозможно. Поэтому необходимо получить условия существования экстремума, проверка которых практически реализуема.

В некоторых случаях, удается преобразовать запись функции $f(x,y)$ к виду, в котором выполнение неравенства (1) очевидно или легко проверяется. Например, функцию $f(x,y)=x^4-x^2y+y^2$ можно записать так:

$$f(x,y)=x^4-x^2y+\frac{y^2}{4}+\frac{3y^2}{4}=\left(x^2-\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{y\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Откуда следует, что точка $\begin{Vmatrix} x^* \\ y^* \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$ есть точка локального минимума. Впрочем, подобная ситуация есть исключение, а не правило.

Более удобным способом использования определения 1 является оценка знака разности $f(x,y)-f(x^*,y^*)$ для точек окрестности $\overset{\circ}{U}_\varepsilon$ при помощи *формулы Тейлора.*

Формулу Тейлора для функции $f(x,y)$ в точке $\left\|\begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix}\right\|$, как известно, можно записать в виде

$$f(x,y)=f(x^*,y^*)+d\,f+\frac{1}{2}d^2 f+o(\rho^2)\,, \tag{2}$$

где $\rho=\sqrt{dx^2+dy^2}$, $dx=x-x^*$ и $dy=y-y^*$, а дифференциалы $d\,f$ и $d^2 f$ соответственно равны

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\,,\qquad d^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

В двух последних формулах частные производные вычислены в точке $\left\|\begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix}\right\|$.

Из (2) получаем, что

$$f(x,y)-f(x^*,y^*)=d\,f+\frac{1}{2}d^2 f+o(\rho^2)\,, \tag{3}$$

Здесь отметим, что, согласно теореме Тейлора (об остаточном члене в форе Пеано) первое слагаемое в правой части (3) в силу дважды непрерывной дифференцируемости функции $f(x,y)$, имеет порядок малости $\rho=\sqrt{dx^2+dy^2}$. Второе слагаемое в правой части - порядок малости $\rho^2=dx^2+dy^2$.

Это означает, что в достаточно малой окрестности точки $\begin{Vmatrix} x^* \\ y^* \end{Vmatrix}$ знак приращения $f(x,y)-f(x^*,y^*)$ определяется знаком величины $df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$, который может быть *любым* в силу линейной зависимости df от dx и dy .

Иначе говоря, если $\operatorname{grad} f(x,y) \neq o$ и для некоторого вектора $\begin{Vmatrix} dx \\ dy \end{Vmatrix}$ мы имеем $f(x,y) - f(x^*, y^*) > 0,$ то для вектора $(-\begin{Vmatrix} dx \\ dy \end{Vmatrix})$ мы обязательно будем иметь, что $f(x,y) - f(x^*, y^*) < 0,$ так как производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ от значений dx и dy не зависят. Значит, у непрерывно дифференцируемой функции $f(x,y)$ в точках, где $\operatorname{grad} f(x,y) \neq o$, экстремума (т.е. минимума или максимума) быть не может. Заметим, что точки, в которых $\operatorname{grad} f(x,y) = o$, принято называть *стационарными точками* для функции $f(x,y)$.

В итоге мы приходим к следующему *необходимому* условию существования экстремума:

Если непрерывно дифференцируемая функция $f(x,y)$ **имеет экстремум в точке** $\begin{Vmatrix} x^* \\ y^* \end{Vmatrix}$**, то** $\operatorname{grad} f(x^*, y^*) = o$**.**

Это необходимое условие не является достаточным. Пример: $f(x,y) = xy$. Здесь в начале координат градиент есть нулевой вектор, а экстремума нет.

Пусть теперь мы рассматриваем только точки, в которых $\operatorname{grad} f(x,y)=o$. В этом случае знак разности $f(x,y)-f(x^*,y^*)$ будет совпадать со знаком второго слагаемого в правой части (3), т.е.

$$d^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2. \qquad (4)$$

В формуле (4) значения производных вычислены в фиксированной точке $\begin{Vmatrix} x^* \\ y^* \end{Vmatrix}$ и не зависят от значений dx и dy . Для простоты записей будем обозначать эти значения так: $A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Напомним, что матрица $\begin{Vmatrix} A & B \\ B & C \end{Vmatrix}$ называется *матрицей Гессе*.

Тогда можно утверждать, что знак разности $f(x,y)-f(x^*,y^*)$ совпадает со знаком квадратичной формы

$$Adx^2+2Bdxdy+Cdy^2. \qquad (5)$$

Если квадратичная форма $Adx^2+2Bdxdy+Cdy^2$. *положительно определенная*, то в точке $\begin{Vmatrix} x^* \\ y^* \end{Vmatrix}$ функция $f(x,y)$ будет иметь *строгий локальный минимум*, а, если эта форма *отрицательно определена*, то - *строгий локальный минимум*. Наконец, если форма не имеет знаковой определенности(как строгой, так и нестрогой), то экстремума гарантировано нет. Оставшиеся возможные случаи будут требовать дополнительного исследования.

Итак, мы пришли к достаточным условиям вида:

> **Если у дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x,y)$ в *стационарной* точке квадратичная форма (5) *положительно* определена, то $f(x,y)$ имеет в этой точке *строгий локальный минимум*.**
>
> **Если у дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x,y)$ в *стационарной* точке квадратичная форма (5) *отрицательно определена*, то $f(x,y)$ имеет в этой точке *строгий локальный максимум*.**
>
> **Если у дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x,y)$ в *стационарной* точке квадратичная форма (5) не имеет *знаковой определенности*, то $f(x,y)$ не имеет в этой точке *строгого локального экстремума*.**

Заметим, что, например, *первое достаточное условие не является необходимым*. Контр-пример: $f(x,y)=x^4+y^4$. Здесь в начале координат есть строгий минимум, а строгой положительности нет.

Напомним теперь, доказываемые в курсе линейной алгебры, методы исследования квадратичной формы (5) на наличие или отсутствия знаковой неопределенности.

1) *Метод Лагранжа*. Он сводится к построению диагонального (или канонического) базиса методом выделения полных квадратов, т.е. базиса, в котором коэффициент B у квадратичной формы (5) равен нулю.

2) *Критерий Сильвестра*. Этот критерий утверждает, что для положительной опреде ленности формы (5) необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись неравенства $A > 0$ и $\det \begin{Vmatrix} A & B \\ B & C \end{Vmatrix} > 0$.

   Для отрицательной определенности формы (5) необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись неравенства $A < 0$ и $\det \begin{Vmatrix} A & B \\ B & C \end{Vmatrix} > 0$.

3) *Диагонализация матрицы квадратичной формы в евклидовом пространстве*. Этот метод основан на теореме о том, что в базисе из собственных векторов самосопряженного преобразования, имеющего в ОНБ матрицу вида $\begin{Vmatrix} A & B \\ B & C \end{Vmatrix}$, матрица такого преобразования диагональная, причем на ее главной диагонали стоят собственные значения этого преобразования.

Пример 1. В E^2 исследовать на экстремум функцию $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение: 1) Найдем вначале для бесконечно дифференцируемой функции $f(x,y)$ все ее стационарные точки, т.е. точки, подозрительные на экстремум. Эти точки находятся из *необходимого* условия

$$\operatorname{grad} f(x,y) = o \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix} \\ \\ \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \end{array} \right. .$$

2) Проверим теперь выполнение *достаточных* условий в стационарных точках. Строим матрицу Гессе $\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{Vmatrix}$.

В первой стационарной точке матрица Гессе будет $\begin{Vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{Vmatrix}$. Для нее выполняется критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы (5). Значит в точке $\begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$ у функции строгий локальный минимум.

Во второй стационарной точке матрица Гессе равна $\begin{Vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{Vmatrix}$. Для нее не выполняется достаточное условие знаковой определенности квадратичной формы (5). В точке $\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix}$ у экстремума нет, поскольку в малой окрестности начала координат $f(x,y) = -3dxdy + dx^3 + dy^3$ и при $dx = dy$ имеем $\Delta f = -3dx^2 + 2dx^3 < 0$, а при $dx = -dy$ имеем $\Delta f = 3dx^2 - 2dx^3 > 0$.