

**ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ**

Пример 1. Найти  $dz(x, y)$ , если  $z = u^3 + v^3$   $u \neq v$ , а функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  определяются системой уравнений

$$\begin{cases} u + v = x, \\ u^2 + v^2 = y. \end{cases} \quad (6)$$

Решение: 1) Искомый дифференциал имеет вид  $dz(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ , поэтому задача сводится к нахождению двух частных производных, которые здесь могут быть представлены в виде:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

2) Производные  $\frac{\partial z}{\partial u} = 3u^2$  и  $\frac{\partial z}{\partial v} = 3v^2$  находятся тривиально, а для вычисления остальных четырех придется использовать системы (3) и (4).

Нелинейная система (3) вида

$$\begin{cases} F(u, v, x, y) = u + v - x = 0, \\ G(u, v, x, y) = u^2 + v^2 - y = 0, \end{cases}$$

несложно решается "школьными" методами, но тут удобнее составить две линейные системы (4). Проверьте самостоятельно, что они имеют следующий вид и решения

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v}{v-u} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u}{u-v} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2(u-v)} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2(u-v)} \end{cases}.$$

3) Таким образом, находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 3u^2 \frac{v}{v-u} + 3v^2 \frac{u}{u-v} = -3uv, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 3u^2 \frac{1}{2(u-v)} + 3v^2 \frac{1}{2(v-u)} = \frac{3}{2}(u+v).\end{aligned}$$

4) Заметим, что из (6) следует, что  $u+v=x$  и  $uv = \frac{x^2-y}{2}$ , что позволяет искомые производные записать как функции от  $x$  и  $y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3}{2}(x^2 - y) \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}x.$$

Поэтому окончательно получаем, что  $dz(x, y) = \frac{3}{2}(y - x^2) dx + \frac{3}{2}x dy$ .

5) К полученному ответу следует добавить условие, гарантирующее разрешимость системы (6). Это условие можно получить разными способами: из геометрической интерпретации системы (6) в прямоугольной системе координат  $Ouv$  или из следующих соотношений:

$$0 \leq (u - v)^2 = u^2 + v^2 - 2uv = y - 2 \frac{x^2 - y}{2} = 2y - x^2,$$

что с учетом  $u \neq v$  дает  $y > \frac{x^2}{2}$ .

Возникает естественный вопрос: можно ли за счет выбора специальной системы координат (не обязательно декартовой) упростить вид дифференциального уравнения?

Пример 2. Найти все функции  $u(x, y)$ , удовлетворяющие во внутренности правой декартовой координатной полуплоскости, уравнению вида  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 1$ . (7)

Решение: 1) Преобразуем уравнение (7), перейдя в полярную систему координат, то есть, сделав замену переменных  $\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$ , обратная к которой  $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \end{cases}$ . Заметим, что данные формулы корректны, поскольку по условию  $x > 0$ .

2) Формулы, выражающие декартовы переменные через полярные (и наоборот) у нас есть. Нужно получить в полярных координатах формулы для  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u}{\partial y}$ . Имеем по правилу (2) дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Составим системы (4) с  $F(r, \varphi, x, y) = r \cos \varphi - x$  и  $G(r, \varphi, x, y) = r \sin \varphi - y$  для производных по  $x$  и  $y$  и решим их:

$$\begin{cases} \cos \varphi \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + r(-\sin \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 1, \\ \sin \varphi \frac{\partial r}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{r} \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \varphi \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + r(-\sin \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \sin \varphi \frac{\partial r}{\partial y} + r \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \varphi \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{r} \cos \varphi \end{cases}.$$

3) Подставляем найденные выражения в полярных координатах в левую часть уравнения (7), получаем

$$\begin{aligned}x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} &= r \cos \varphi \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left( -\frac{\sin \varphi}{r} \right) \right] + r \sin \varphi \left[ \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r} \right] = \\ &= r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \frac{\partial u}{\partial r} + (-\sin \varphi \cos \varphi + \sin \varphi \cos \varphi) \frac{\partial u}{\partial \varphi} = r \frac{\partial u}{\partial r}.\end{aligned}$$

4) В итоге исходное уравнение, учетом условия  $x > 0$ , будет равносильно уравнению  $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}$ , которое проще исходного.

Решение данного уравнения означает, что мы должны найти все непрерывно дифференцируемые функции  $u(r, \varphi)$ , частная производная от которых по  $r$  равна  $\frac{1}{r}$ .

Исходя из известных правил дифференцирования, можно заключить, что  $u(r, \varphi) = \ln r + C(\varphi)$ , где  $C(\varphi)$ , есть непрерывно дифференцируемая функция одного аргумента  $\varphi$ .



5) Решение исходной задачи получаем, сделав обратный переход к переменным:  $u(r, \varphi) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + C(\operatorname{arctg} \frac{y}{x})$ , а, учитывая условие  $x > 0$  и непрерывность суперпозиции непрерывных функций, эту формулу можно записать в виде:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + D\left(\frac{y}{x}\right),$$

где  $D(s)$  произвольная непрерывно дифференцируемая функция одного аргумента.