

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть дана функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ и n -мерная вектор-функция $\vec{x}(t)$, где $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$. Тогда *полная* производная функция от скалярной функции $\Phi(t) = F(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t)$ имеет вид

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial\Phi}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt}. \quad (1)$$

где

$$\Phi(\vec{t}) = F[x_1(t_1, t_2, \dots, t_k), x_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, x_n(t_1, t_2, \dots, t_k), t_1, t_2, \dots, t_k]$$

Чтобы ее не путать с *частной* производной, обычно пишут так

$$\Phi'_{t_p} = \frac{\partial\Phi}{\partial t_p} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial\Phi}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt_p} \quad \forall j \in [1, k]. \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) применимы в самом простом случае, когда формульное представление функций $F(\dots)$ и $\vec{x}(\dots)$ известно. Однако часто оказывается, что эти функции заданы *неявно*: скажем, как решения некоторых других задач.

Пусть требуется найти все частные производные для функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, значения которых для конкретной пары аргументов x и y находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} F(u, v, x, y) = 0, \\ G(u, v, x, y) = 0 \end{cases} \text{ или, более точно, } \begin{cases} F(u(x, y), v(x, y), x, y) = 0, \\ G(u(x, y), v(x, y), x, y) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Применив формулу (2), т.е. продифференцировав последовательно по x и y каждое из уравнений системы (3), получим две системы уравнений вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}, \\ \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial G}{\partial x} \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y}, \\ \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial G}{\partial y}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Предположим, что при фиксированных x и y величины $u, v, \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}, \frac{\partial G}{\partial u}, \frac{\partial G}{\partial v}, \frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial G}{\partial y}$ существуют.

Тогда системы уравнений (4) будут линейными относительно $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Заметим также, что, несмотря на линейность и совпадения вида основных матриц в системах (4), наибольшее затруднение представляет не их решение, а их составление, которое требует предварительного решения нелинейной системы (3).

Напомним наконец, что условие локального существования и дифференцируемости функций, заданных неявно, дает теорема *о системе неявно заданных функций*.

Проиллюстрируем использование формул (1) ... (4) следующими примерами.

Пример 1. Найти частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, заданных неявно

системой уравнений
$$\begin{cases} xe^{u+v} + 2uv = 1, \\ ye^{u-v} - \frac{u}{v+1} = 2x, \end{cases}$$
 в точке $\{1; 2\}$ для которой выполнены равенства $u(1, 2) = v(1, 2) = 0$. (5)

Решение: В данной задаче для системы (3) имеем

$$\begin{cases} F(u, v, x, y) = xe^{u+v} + 2uv - 1, \\ G(u, v, x, y) = ye^{u-v} - \frac{u}{v+1} - 2x. \end{cases}$$

Решать систему (3) здесь не нужно, ибо легко проверяется, что верны равенства $F(0, 0, 1, 2) = 0$ и $G(0, 0, 1, 2) = 0$.

Поэтому в точке $\{1; 2\}$ в силу (5) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} &= xe^{u+v} + 2v = 1e^0 + 0 = 1, \\ \frac{\partial F}{\partial v} &= xe^{u+v} + 2u = 1e^0 + 0 = 1, \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= e^{u+v} = 1e^0 = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial u} &= ye^{u+v} - \frac{1}{v+1} = 2e^0 - \frac{1}{0+1} = 1, \\ \frac{\partial G}{\partial v} &= -ye^{u-v} + \frac{u}{(v+1)^2} = -2e^0 + \frac{0}{(0+1)^2} = -2, \\ \frac{\partial G}{\partial x} &= -2, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = e^{u-v} = e^0 = 1.\end{aligned}$$

А системы (4) будут

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = -1, \\ \frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial v}{\partial x} = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} - 2\frac{\partial v}{\partial y} = -1. \end{cases}$$

Из них, получим $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{3}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{3}$, что и является решением задачи.