

Простейшая задача вариационного исчисления

Обозначим как $\mathcal{C}^1[a, b]$ множество всех непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ вещественных функций, расстояние между которыми определяется формулой

$$\rho(y_1, y_2) = \max_{x \in [a, b]} |y_1(x) - y_2(x)| + \max_{x \in [a, b]} |y_1'(x) - y_2'(x)| \quad \forall y_1, y_2 \in \mathcal{C}^1[a, b].$$

Заметим, что множество $\mathcal{C}^1[a, b]$ является линейным нормированным пространством с нормой

$$\langle y \rangle = \max_{x \in [a, b]} |y(x)| + \max_{x \in [a, b]} |y'(x)|. \quad (7.1.1)$$

Пусть $F(x, y, p)$ непрерывно дифференцируемая при всех $x \in [a, b]$, $y \in (-\infty, +\infty)$ и $p \in (-\infty, +\infty)$ функция.

Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (7.1.2)$$

на множестве $\mathcal{C}_{AB}^1[a, b] \subset \mathcal{C}^1[a, b]$ функций $y(x)$, удовлетворяющих условиям $y(a) = A$ и $y(b) = B$.

Проверьте самостоятельно (это будет полезно для дальнейшего), что множество $\mathcal{C}_{00}^1[a, b]$ является линейным пространством, а множество $\mathcal{C}_{AB}^1[a, b]$ при $|A| + |B| \neq 0$ – нет.

Определение
7.1.1

Будем говорить, что функционал (7.1.2) достигает на функции $y^*(x) \in C_{AB}^1[a, b]$ слабого локального минимума (максимума), если найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\forall y(x) \in C_{AB}^1[a, b] \quad \text{с} \quad \rho(y(x), y^*(x)) < \varepsilon$$

выполняется неравенство

$$J(y) \geq J(y^*) \quad (J(y) \leq J(y^*)).$$

Если неравенства строгие при $y \neq y^*$, то говорят о *строгом* экстремуме. В случае, когда неравенства удовлетворяются для всех функций $y(x) \in C_{AB}^1[a, b]$, экстремум *абсолютный*.

Задачу отыскания слабого локального экстремума при использовании нормы (7.1.1) называют *простейшей вариационной задачей* или же *задачей с закрепленными концами*.

Основным инструментом при исследовании на экстремум функционала вида (7.1.2) служит его *вариация* – функционал, являющийся аналогом производной по направлению от функции многих переменных.

Для его определения нам потребуется еще одно подмножество в пространстве $\mathcal{C}^1[a, b]$, а именно $\mathcal{C}_{00}^1[a, b]$ – множество непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций $h(x)$ таких, что $h(a) = h(b) = 0$.

Заметим, что при любом вещественном параметре α функция $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha h(x) \in \mathcal{C}_{AB}^1[a, b]$, если $h(x) \in \mathcal{C}_{00}^1[a, b]$. Это свойство дает основание называть $\alpha h(x)$ *допустимым приращением* (или, как иногда говорят, *допустимой вариацией*) $y(x)$ – аргумента исследуемого функционала (7.1.2).

Наконец, рассматривая при малых по модулю α множество значений функционала

$$J(y + \alpha h) = \int_a^b F(x, y(x) + \alpha h(x), y'(x) + \alpha h'(x)) dx, \quad (7.1.3)$$

можно делать заключения об экстремальных свойствах исходного функционала (7.1.2) в малой окрестности функции $y(x)$ (в пространстве $\mathcal{C}^1[a, b]$).

Более конкретно, величину и направление изменения $J(y + \alpha h)$ (как функции параметра α при фиксированных $y(x)$ и $h(x)$) можно оценивать числом $\left. \frac{dJ(y + \alpha h)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}$.

В сделанных предположениях (для малых по модулю значений α) функционал $J(y + \alpha h)$ является непрерывно дифференцируемой функцией α .

С другой стороны, (7.1.3) можно рассматривать как собственный интеграл, зависящий от параметра α , для которого справедлива теорема Лейбница, утверждающая, что

$$\left. \frac{dJ(y + \alpha h)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial F(x, y(x), y'(x))}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F(x, y(x), y'(x))}{\partial y'} h'(x) \right) dx. \quad (7.1.4)$$

Определение

7.1.2

Выражение

$$\left. \frac{dJ(y + \alpha h)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}$$

называется *первой вариацией* функционала $J(y)$ на функции $y(x)$ при $\forall h(x) \in C_{00}^1[a, b]$.
Первую вариацию принято обозначать $\delta J(y, h)$.

Обратите внимание на структурное сходство формулы (7.1.4) с формулой

$$\frac{\partial F}{\partial l} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \omega_k,$$

определяющей в E^n величину производной функции $F(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ по направлению $\|l\| = \|\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\|^T$.

Необходимое условие существования слабого экстремума, используя понятие первой вариации, формулирует

Теорема

7.1.1

Если $y^*(x)$ есть решение простейшей вариационной задачи, то $\delta J(y^*, h) = 0 \quad \forall h(x) \in C_{00}^1[a, b]$.

Доказательство.

Пусть для определенности функционал $J(y)$ имеет на функции $y^*(x) \in \mathcal{C}_{AB}^1[a, b]$ слабый локальный минимум. Тогда, согласно определению 7.1.1, в $\mathcal{C}_{AB}^1[a, b]$ существует некоторая окрестность $U_\varepsilon(y^*)$ такая, что $\forall y(x) \in U_\varepsilon(y^*)$ выполнено неравенство

$$J(y(x)) \geq J(y^*(x)).$$

При этом $y(x)$ может быть представлена в виде $y^*(x) + \alpha h(x)$, где $h(x) \in \mathcal{C}_{00}^1[a, b]$. И для непрерывно дифференцируемой по параметру α функции $J(y^*(x) + \alpha h(x))$ верно неравенство

$$J(y^*(x) + \alpha h(x)) \geq J(y^*(x)) \quad \forall h(x) \in \mathcal{C}_{00}^1[a, b].$$

Значит функция $J(y^*(x) + \alpha h(x))$ имеет минимум в $\alpha = 0$ и, следовательно, ее производная

$$\left. \frac{dJ(y^* + \alpha h)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \delta J(y^*, h) = 0$$

(в силу (7.1.4) и определения 7.1.2) для любой фиксированной функции $h(x) \in \mathcal{C}_{00}^1[a, b]$.

Теорема доказана.

При использовании теоремы 7.1.1 необходимо убеждаться в равенстве нулю первой вариации $\delta J(y^*, h)$ одновременно для всех функций $h(x) \in \mathcal{C}_{00}^1[a, b]$, что может оказаться непростой задачей.

Более удобное для практического использования необходимое условие экстремума в случае простейшей вариационной задачи можно получить (следуя Лагранжу), проверив, что верна (часто называемая *основной леммой вариационного исчисления*)

Лемма **Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и**

7.1.1

$$\int_a^b f(x)h(x) dx = 0 \quad \forall h(x) \in \mathcal{C}_{00}^1[a, b],$$

то $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$.

Доказательство.

Предположим противное. Пусть $f(x) \not\equiv 0$, $x \in [a, b]$. Тогда $\exists x_0 \in [a, b]$ такое, что $f(x_0) \neq 0$. Например, пусть $f(x_0) > 0$.

В силу непрерывности $f(x)$ найдутся $x_0 \in (a, b)$ и $\Delta > 0$ такие, что

$$f(x) \geq \frac{1}{2}f(x_0) \quad \forall x \in [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta] \subseteq (a, b).$$

В $\mathcal{C}_{00}^1[a, b]$ выберем функцию $h(x) =$

$$= \begin{cases} (x - (x_0 - \Delta))^2(x - (x_0 + \Delta))^2, & x \in [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta], \\ 0, & x \notin [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta]. \end{cases}$$

Согласно интегральной теореме о среднем имеем оценку

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)h(x) dx &= \int_{x_0 - \Delta}^{x_0 + \Delta} f(x)h(x) dx = \\ &= f(\xi) \int_{x_0 - \Delta}^{x_0 + \Delta} h(x) dx \geq \frac{1}{2}f(x_0) \int_{x_0 - \Delta}^{x_0 + \Delta} h(x) dx > 0, \end{aligned}$$

где $\xi \in (x_0 - \Delta, x_0 + \Delta)$. Но это противоречит условию леммы.

Лемма доказана.

Лемма 7.1.1 позволяет получить необходимое условие простейшей вариационной задачи в следующей упрощенной форме, которую дает

Теорема 7.1.2 Пусть $F(x, y, p)$ дважды непрерывно дифференцируемая при всех $x \in [a, b]$, $y \in (-\infty, +\infty)$ и $p \in (-\infty, +\infty)$ функция. Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $y^*(x)$, $x \in [a, b]$ есть решение простейшей вариационной задачи, то она удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \quad (7.1.5)$$

Доказательство.

Поскольку $y^*(x)$ есть решение простейшей вариационной задачи, то $\delta J(y^*, h) = 0$ для любой $h(x) \in C_{00}^1[a, b]$. С учетом формулы (7.1.4) это дает

$$0 = \int_a^b \left(\frac{\partial F(x, y(x), y'(x))}{\partial y} h(x) + \frac{\partial F(x, y(x), y'(x))}{\partial y'} h'(x) \right) \Big|_{y=y^*} dx.$$

В условиях теоремы второе слагаемое в подынтегральной функции можно проинтегрировать по частям

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F(x, y(x), y'(x))}{\partial y'} h(x) \Big|_a^b + \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right)_{y=y^*} h(x) dx = \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right)_{y=y^*} h(x) dx, \end{aligned}$$

поскольку $h(a) = h(b) = 0$.

Из непрерывности функции

$$f(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \Big|_{y=y^*}$$

и основной леммы вариационного исчисления (лемма 7.1.1) следует, что $y^*(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера (7.1.5).

Теорема доказана.

Определение
7.1.3

Всякое решение уравнения Эйлера (7.1.5) называется *экстремалью* функционала $J(x, y, y')$. В случае, когда эта экстремаль принадлежит множеству $C_{AB}^1[a, b]$, она называется *допустимой экстремалью*.

Сделанное при выводе уравнения Эйлера предположение о непрерывности второй производной допустимой экстремали оказывается излишним, если использовать, приводимую здесь без доказательства, следующую лемму.

Лемма

7.1.2

(Дюбуа-
Реймона)

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и

$$\int_a^b f(x)h'(x) dx = 0 \quad \forall h(x) \in \mathcal{C}_{00}^1[a, b],$$

то $f(x) \equiv \text{const}$ на $[a, b]$.

Действительно, пусть

$$G(x) = \int_a^x \frac{\partial F(u, y(u), y'(u))}{\partial y} du.$$

Тогда, в силу теоремы 7.1.1 и формулы 7.1.3, имеем

$$\delta J(y^*, h) = 0 = \int_a^b \left(G'(x)h + \frac{\partial F}{\partial y'} h' \right) dx =$$

(интегрируя первое слагаемое по частям)

$$= G(x)h \Big|_a^b - \int_a^b G(x)h' dx + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} h' dx = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y'} - G'(x) \right) h' dx,$$

если учесть, что $h(x) \in \mathcal{C}_{00}^1[a, b]$.

Применив теперь утверждение леммы Дюбуа-Реймона, получаем *интегральную форму* уравнения Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y'} - \int_a^x \frac{\partial F}{\partial y} du \equiv \text{const}.$$

Откуда, окончательно следует, что

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Полученное условие экстремальности является необходимым, но не достаточным. Поэтому, в тех случаях, когда допустимая экстремаль однозначно определяется уравнением Эйлера и граничными условиями, целесообразно попытаться выполнить исследование на экстремальность непосредственно по его определению.

Использование этого метода иллюстрирует

Задача 7.1.1 Решить простейшую вариационную задачу

$$J(y) = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{1}{2}y^2 + 2y'^2 \right) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2.$$

Решение. Заметим, что

$$J(y) = \frac{1}{4} + \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y^2 + 2y'^2 \right) dx$$

и исследование на экстремальность достаточно выполнить для функционала $J(y) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y^2 + 2y'^2 \right) dx$.

Составим и решим уравнение Эйлера. Имеем

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 4y', \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 4y''.$$

Тогда, $\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \implies 4y'' - y = 0.$

Общее решение этого уравнения

$$y(x) = C_1 \exp\left(\frac{x}{2}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{x}{2}\right)$$

есть множество всех экстремалей, в том числе и допустимых. Граничные условия есть система уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\frac{1}{2}} + C_2 e^{-\frac{1}{2}} = 2. \end{cases}$$

Откуда находим, что

$$C_1 = -C_2 = \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{1}{2}},$$

и единственная *допустимая* экстремаль дается формулой

$$y^*(x) = \frac{2 \operatorname{sh} \frac{x}{2}}{\operatorname{sh} \frac{1}{2}}.$$

Иследуем найденную допустимую экстремаль на оптимальность. Пусть $h(x)$ – произвольная пробная функция из класса $C_{00}^1[0, 1]$.

Оценим знак приращения функционала

$$\begin{aligned} J(y^* + h) - J(y^*) &= \\ &= \int_0^1 \left(\frac{(y^* + h)^2}{2} + 2((y^*)' + h')^2 - \frac{(y^*)^2}{2} - 2((y^*)')^2 \right) dx = \\ &= \int_0^1 y^* h dx + 4 \int_0^1 (y^*)' h' dx + \int_0^1 \left(\frac{h^2}{2} + 2h'^2 \right) dx = \end{aligned}$$

(проинтегрировав второй интеграл по частям и перегруппировав слагаемые)

$$= \int_0^1 (y^* - 4(y^*)'') h dx + 4(y^*)' h \Big|_0^1 + \int_0^1 \left(\frac{h^2}{2} + 2h'^2 \right) dx \geq 0,$$

поскольку первый интеграл равен нулю в силу равенства $y^* - 4(y^*)'' = 0$, а проинтегрированная часть есть ноль по свойству пробной функции $h(0) = h(1) = 0$.

Таким образом, приходим к заключению о том, что допустимая экстремаль $y^*(x)$ доставляет исследуемому функционалу абсолютный минимум.

Решение
получено .

Допустимая экстремаль, находящаяся из уравнения Эйлера, вообще говоря, не обязательно является решением простейшей вариационной задачи. Этот факт демонстрирует

Задача Решить простейшую вариационную задачу

7.1.2

$$J(y) = \int_0^{\pi} \left(y'^2 - \frac{25}{4} y^2 \right) dx, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 2.$$

Решение. Уравнение Эйлера в данном случае имеет вид

$$y'' + \frac{25}{4}y = 0.$$

Его общее решение есть

$$y(x) = C_1 \cos \frac{5x}{2} + C_2 \sin \frac{5x}{2},$$

а допустимая экстремаль

$$y^*(x) = \cos \frac{5x}{2} + 2 \sin \frac{5x}{2}.$$

Возьмем $h(x) \in C_{00}^1[0, \pi]$ вида $h(x) = \frac{1}{k} \sin nx$, где k и n – произвольные натуральные числа. Тогда, выполнив преобразования аналогичные сделанным при решении задачи 7.1.1, получим

$$\begin{aligned} \Delta J &= J(y^* + h) - J(y^*) = \\ &= \int_0^\pi \left(h'^2 - \frac{25}{4} h^2 \right) dx = \left(n^2 - \frac{25}{4} \right) \frac{\pi}{2k^2}. \end{aligned}$$

Откуда следует, что $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\Delta J < 0 \text{ при } n = 1; 2$$

и $\Delta J > 0$ при $n \geq 3$.

Решение получено. Значит $y^*(x)$ не является решением данной вариационной задачи.

В заключение обсуждения постановки простейшей задачи вариационного исчисления обратим внимание на то, что в определении 7.1.1 в названии типа экстремума присутствует прилагательное «слабый». Возникает вопрос: какой смысл в использовании этого термина?

Ответ заключается в том, что линейное пространство, образованное функциями непрерывно дифференцируемыми на $[a, b]$ не является конечномерным. Действительно, при исследовании функционалов на экстремум необходимо иметь количественную оценку степени близости произвольной пары элементов в этом пространстве. Как известно, одним из способов построения такой оценки является введение нормы элемента (например по формуле (7.1.1), т.е. превращение рассматриваемого линейного пространства в нормированное. Однако, различные типы норм в линейных пространствах, не имеющих базиса, не эквивалентны друг другу и могут приводить при решении экстремальных задач для одного и того же функционала к различным результатам.

Поясним сказанное следующим примером. Рассмотрим как альтернативу линейному пространству непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций с нормой (7.1.1) нормированное линейное пространство функций, имеющих непрерывную производную, кроме быть может, конечного числа точек на $[a, b]$, в которых производная имеет разрыв первого рода. Норму во втором пространстве определим по формуле

$$\langle y \rangle = \max_{x \in [a, b]} |y(x)| .$$

По сложившейся исторически традицией экстремум с такой с нормой принято называть «сильным».

В качестве упражнения найдите допустимую экстремаль для задачи с условиями

$$J(y) = \int_0^1 y'^3 dx , \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1 .$$

Используя определение 7.1.1 с разными нормами, покажите, что в этой задаче на допустимой экстремали $y(x) = x$ имеется слабый экстремум, но нет сильного.

В более общем виде связь между условиями существования сильного и слабого экстремума на допустимой экстремали можно сформулировать так:

необходимое условие слабого экстремума является необходимым условием сильного, а достаточное условие сильного экстремума есть достаточное условие слабого.