Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть задана автономная система

$$\dot{x} = F(x)\,, \quad x \in \Omega \subseteq E^n\,, \tag{6.4.1}$$

где $F(x)$ непрерывно дифференцируемая, вещественная вектор-функция, а $x(t)$ $t \in T$ – решение системы (6.4.1) на промежутке T.

Определение 6.4.1	Непрерывно дифференцируемая в Ω функция $u(x)$ называется *первым интегралом* системы (6.4.1), если $u(x(t)) \equiv \text{const}$ $\forall t \in T$ для *каждого* решения $x(t)$ этой системы.

Тривиальным примером первого интеграла может служить функция $u(x) \equiv const$. Условия же существования нетривиальных первых интегралов формулируются с помощью понятий *производной в силу системы* (см. определение (6.2.4)) и *функциональной независимости* первых интегралов.

Определение 6.4.2	Первые интегралы $\left\{u_{(k)}(x)\,,\ k=[1,s]\,,\ \ s \le n\right\}$ называются *функционально независимыми* в точке $a \in \Omega$, если ранг матрицы Якоби равен s, то есть $$\mathrm{rg}\left(\left\| \frac{\partial u_{(k)}}{\partial x_j} \right\| \Bigg|_{x=a} \right) = s\,, \quad \text{где } k=[1,s]\,,\ \ j=[1,n]\,.$$

Согласно этому определению, функциональная зависимость, исходя из известной теоремы о неявных функциях, означает возможность функционально выразить (локально) один первый интеграл через другой.

Следует также отметить различие понятий функциональной зависимости и линейной зависимости. Из линейной зависимости следует функциональная, но не наоборот. Пример: функционально зависимые функции $u_{(1)}(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ и $u_{(2)}(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$ в E^2 линейно независимы.

Критерий существования первого интеграла описывает

`Теорема 6.4.1` **Для того чтобы непрерывно дифференцируемая в области Ω функция $u(x)$ являлась первым интегралом системы (6.4.1), необходимо и достаточно, чтобы $\grave{u}(x)$ – производная от $u(x)$ в силу системы (6.4.1) – равнялась нулю на каждом решении системы (6.4.1).**

Доказательство.

Пусть $x(t)$ некоторое решение системы (6.4.1). Рассмотрим функцию $v(t) = u(x(t))$. Согласно правилу дифференцирования сложной функции

$$\dot{v}(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \dot{x}_j(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} F_j(x(t)) = \grave{u}(x(t))\,.$$

Откуда мы имеем для первого интеграла

$$u(x(t)) = \mathrm{const} \quad \Longleftrightarrow \quad \grave{u}(x(t)) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{v}(t) = 0 \quad (6.4.2)$$

А по теореме 4.3.1 (Коши) через каждую неособую точку Ω проходит некоторая фазовая траектория системы (6.4.1), на которой выполняются соотношения (6.4.2).

Теорема доказана.

Выясним теперь геометрический смысл первого интеграла.

Пусть $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} \neq 0$ для некоторого j и пусть C – любое из значений первого интеграла $u(x)$, принимаемых в Ω. Тогда уравнение $u(x) = C$ задает в E^n $(n-1)$-мерную гиперповерхность Γ, на которой целиком лежат фазовые траектории системы (6.4.1).

Действительно, пусть точка a принадлежит поверхности Γ, тогда $u(a) = C$. Поскольку $u(x)$ первый интеграл, то в любой точке фазовой траектории $x(t)$, проходящей через a, будет $u(x(t)) = C$. Значит, вся эта траектория лежит на Γ.

Заметим, что обратное не верно: не любая линия на поверхности уровня есть фазовая траектория.

Если известен какой-либо первый интеграл $u(x)$, у которого

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} \neq 0$$

для некоторого j, то система (6.4.1) может быть сведена к системе с меньшим на единицу числом неизвестных функций.

Для этого следует x_j выразить при помощи уравнения $u(x) = C$ через остальные неизвестные и подставить это выражение во все (кроме j-го) уравнения исходной системы (6.4.1).

Знание же $n - 1$ функционально независимых первых интегралов позволяет получить решение системы (6.4.1) в квадратурах.

Поскольку любая непрерывно дифференцируемая функция от нескольких первых интегралов системы (6.4.1) очевидно также является ее первым интегралом, то первых интегралов у этой системы бесконечно много.

При этом однако возникает вопрос о том какое число из них может оказаться функционально независимыми.

Ответ на данный вопрос находится при помощи нижеследующих рассуждений.

Система (6.4.1) в неразвернутом матричном виде записывается так:

$$\|\dot{x}\| = \|F(x)\|, \quad x \in \Omega \subseteq E^n. \tag{6.4.3}$$

При гладкой обратимой замене переменных $\|x\| = \|g(y)\|$ с матрицей Якоби

$$\|G(y)\| = \left\| \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \right\| \quad \forall i, j = [1, n]$$

и якобианом

$$\det \|G(y)\| = \frac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \neq 0 \quad \forall y \in \Omega^*,$$

в области Ω^*, являющейся образом области Ω, автономная система (6.4.3) примет вид

$$\|\dot{y}\| = \|G(y)\|^{-1} \|F(g(y))\|, \quad y \in \Omega^* \subseteq E^n. \tag{6.4.4}$$

Система (6.4.4) непосредственно получается из (6.4.3) в силу равенств

$$\|\dot{x}\| = \|G(y)\| \|\dot{y}\| = \|F(g(y))\|.$$

На вопрос о том, как связаны первые интегралы автономных систем (6.4.3) и (6.4.4), отвечает

`Теорема 6.4.2` **Для того чтобы непрерывно дифференцируемая функция $u(x)$, $x \in \Omega$ являлась первым интегралом системы (6.4.3), необходимо и достаточно, чтобы функция $v(y) = u(g(y))$, $y \in \Omega^*$ являлась первым интегралом системы (6.4.4).**

Доказательство.

Поскольку из теоремы 6.4.1 следует, что $u(x)\,,\ x \in \Omega$ есть первый интеграл системы (6.4.3) тогда и только тогда, когда $\grave{u}(x) = 0\,,\ x \in \Omega$, а $v(y)\,,\ y \in \Omega^*$ есть первый интеграл системы (6.4.4) тогда и только тогда, когда $\grave{v}(y) = 0\,,\ y \in \Omega^*$, то для доказательства теоремы достаточно убедиться лишь в том, что

$$\grave{u}(x) = \grave{v}(y) \quad \text{при } x = g(y)\ \ \forall y \in \Omega^*.$$

Действительно, в этом случае из $\grave{u}(x) = 0,\ x \in \Omega$ будет следовать, что $\grave{v}(y) = 0,\ y \in \Omega^*$, и наоборот.

Справедливость равенства $\grave{u}(x) = \grave{v}(y)$ при $x = g(y) \ \ \forall y \in \Omega^*$ проверим непосредственно. Во введенных выше обозначениях в силу (6.4.4) имеем

$$\grave{v}(y) = \|\operatorname{grad} v(y)\|^{\mathrm{T}} \|\dot{y}\| = \|\operatorname{grad} v(y)\|^{\mathrm{T}} \|G(y)\|^{-1} \|F(g(y))\|\,,$$

что с учетом равенства $v(y) = u(g(y))$ (поскольку по правилам дифференцирования сложной функции выполняется равенство $\|\operatorname{grad} v(y)\|^{\mathrm{T}} = \|\operatorname{grad} u(g(y))\|^{\mathrm{T}} \|G(y)\|$) дает

$$\grave{v}(y) = \|\operatorname{grad} u(g(y))\|^{\mathrm{T}} \|G(y)\| \|G(y)\|^{-1} \|F(g(y))\| =$$

$$= \|\operatorname{grad} u(g(y))\|^{\mathrm{T}} \|E\| \, \|F(g(y))\| =$$
$$= \|\operatorname{grad} u(x)\|^{\mathrm{T}} \|F(x)\| = \grave{u}(x)\,.$$

Теорема доказана.

Достаточные условия существования $n-1$ функционально независимых первых интегралов системы (6.4.3), а также формулу для любого ее первого интеграла, дает

`Теорема 6.4.3` **Пусть точка $a \in \Omega$ не есть положение равновесия системы (6.4.3). Тогда**

1°. В $\omega \subseteq \Omega$ – некоторой окрестности точки a, существует множество, состоящее из $n-1$ функционально независимых первых интегралов $u_{(1)}(x),\ u_{(2)}(x),\ \ldots,\ u_{(n-1)}(x)$.

2°. Для любого первого интеграла $u(x)$ найдется непрерывно дифференцируемая функция $\Phi(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_{n-1})$ такая, что

$$u(x) = \Phi(u_{(1)}(x),\ u_{(2)}(x),\ \ldots,\ u_{(n-1)}(x)),\quad x \in \omega\,.$$

`Доказательство.`

1°. Поскольку точка $a \in \Omega$ не есть положение равновесия системы (6.4.3), то по теореме 6.1.5 (о выпрямлении траекторий) для a найдется окрестность ω и гладкая обратимая замена переменных $x = g(y)$ в этой окрестности такие, что система (6.4.3) примет вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 0, \\ \dot{y}_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dot{y}_{n-1} = 0, \\ \dot{y}_n = 1, \end{cases} \tag{6.4.5}$$

решениями которой будут функции:

$$y_1(t) = C_1\,,\ \ y_2(t) = C_2\,, \ldots\,,\ \ y_{n-1}(t) = C_{n-1}\,,\ \ y_n(t) = t + C_n\,.$$

Нетрудно видеть, что система (6.4.5) имеет $n-1$ независимых первых интегралов:

$$v_{(1)}(y) = y_1,\ v_{(2)}(y) = y_2, \ldots, v_{(n-1)}(y) = y_{n-1}.$$

Поскольку замена переменных имеет гладкую обратную $y = h(x)$ с невырожденным якобианом, то по теореме 6.4.2 система (6.4.3) будет иметь $n-1$ независимых при $x = a$ первых интегралов вида

$$u_{(1)} = h_1(x),\ u_{(2)} = h_2(x), \ldots, u_{(n-1)} = h_{n-1}(x).$$

2°. Всякий первый интеграл системы (6.4.5) представим в виде

$$v(y) = \Phi(y_1,\, y_2,\, \ldots, y_{n-1})\,,$$

где Φ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов. Поэтому, в силу теоремы 6.4.2 при замене переменных $y = h(x)$ и $x = g(y)$

$$u(x) = u(g(y)) = v(y) = \Phi(h_1(x),\, h_2(x),\, \ldots, h_{n-1}(x)) =$$

$$= \Phi(u_{(1)}(x),\, u_{(2)}(x),\, \ldots, u_{(n-1)}(x))$$

есть первый интеграл системы (6.4.3).

Теорема доказана.

Следует также иметь в виду, что теорема гарантирует существование функции Φ лишь в ω – окрестности неособой точки a, но не *разом во всей области* Ω. Что касается окрестностей положения равновесия, то в них первые интегралы могут как существовать, так и нет. Тут оказывается необходимым дополнительное исследование.

В заключение продемонстрируем некоторые приемы отыскания первых интегралов на примере решения следующей задачи.

`Задача 6.4.1` Найти независимые первые интегралы для системы дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x\,, \\ \dot{y} & = & y\,, \\ \dot{z} & = & x^2 + y^2 + z\,. \end{array} \right.$$

при условиях: $x > 0,\ y > 0,\ z - x^2 - y^2 > 0.$

`Решение.` Исключая независимую переменную t из первых двух уравнений, получаем $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$, что дает $y = C_1 x$. Значит,

$$u_{(1)}(x, y, z) = \frac{y}{x}$$

есть первый интеграл рассматриваемой системы дифференциальных уравнений.

При поиске первых интегралов часто оказывается удобным использование *правила пропорций* (или *свойства равных дробей*), если

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \ldots = \frac{\alpha_m}{\beta_m},$$

то

$$\frac{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m}{k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_m\beta_m} = \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Для использования этого правила запишем исходную систему в так называемом *симметричном виде*, когда нет явного указания на то, какая из переменных является независимой. В этом случае для записи используются не производные, а дифференциалы:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x^2 + y^2 + z}.$$

Заметим, что в рассматриваемом случае (по правилу пропорций)

$$\frac{(-2x)dx}{(-2x)x} = \frac{(-2y)dy}{(-2y)y} = \frac{dz}{x^2 + y^2 + z} = \frac{dz - 2xdx - 2ydy}{z - x^2 - y^2},$$

а это дает равенство полных дифференциалов

$$\frac{d(z - x^2 - y^2)}{z - x^2 - y^2} = \frac{dx}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{z - x^2 - y^2}{x} = C_2.$$

Из равенства $\dfrac{z - x^2 - y^2}{x} = C_2$, в свою очередь, получаем другой первый интеграл

$$u_{(2)}(x, y, z) = \frac{z - x^2 - y^2}{x},$$

который очевидно независим от найденного ранее, поскольку он в своей записи содержит переменную z.

Решение
получено.