

# Автономные системы уравнений и их свойства

Определение  
6.1.1

*Нормальной автономной системой* дифференциальных уравнений порядка  $n \geq 2$  с неизвестной вектор-функцией  $x(t)$   $t \in T$  называется система уравнений вида

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in \Omega \subseteq E^n, \quad (6.1.1)$$

где вектор-функция  $F(x)$  удовлетворяет условию теоремы 4.3.1 (Коши) на множестве  $\Omega$ .

Согласно данному определению независимая переменная  $t$  в условии автономной системы явно не входит, а решение задачи Коши для (6.1.1) с начальным условием  $x(t_0) = x_0$  существует и единственно при любых согласованных  $t_0 \in T$  и  $x_0 \in \Omega$ .

При этом отметим, что любая система вида  $\dot{x} = F(t, x)$  может быть сведена к автономной путем введения дополнительной скалярной неизвестной  $x_{n+1}(t) = t$ . Координатная форма системы (6.1.1) в этом случае дополняется  $(n + 1)$ -м уравнением  $\dot{x}_{n+1} = 1$  и принимает автономный вид

$$\begin{cases} \dot{x}_k = F_k(x_{n+1}, x_1, x_2, \dots, x_n) & \forall k = [1, n], \\ \dot{x}_{n+1} = 1. \end{cases}$$

Переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  принято называть *фазовыми переменными*.

Пусть  $x(t)$  есть частное решение системы (6.1.1), тогда вектор-функция  $x(t)$ ,  $t \in T$  параметрически задает некоторую линию в  $E^n$ , называемую *фазовой траекторией* этой системы. Совокупность фазовых траекторий для всех частных решений будем именовать *фазовым портретом* системы (6.1.1).

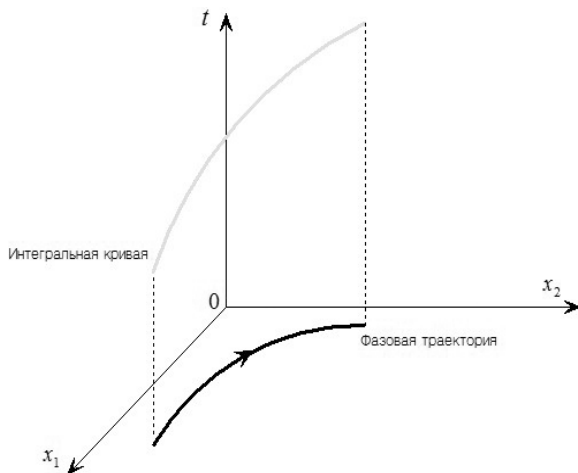


Рис. 1. Интегральные кривые и фазовые траектории

Заметим, что фазовая траектория и интегральная кривая суть различные способы наглядного представления решений системы (6.1.1), поскольку они образованы точками пространств разных размерностей:  $n$ -мерного фазового пространства и  $(n + 1)$ -мерного пространства, образованного векторами с координатными представлениями вида  $\|t, x_1, x_2, \dots, x_n\|^T$  (см. рис. 6.1).

Стрелкой на фазовой траектории принято указывать направление перемещения точки по фазовой траектории при возрастании координаты  $t$ .

Пример 6.1.1 : для автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1, \end{cases}$$

каждая интегральная кривая есть в  $E^3\{t, x_1, x_2\}$  винтовая (или прямая при  $C_1 = 0$ ) линия

$$\begin{cases} x_1 = C_1 \cos(t + C_2), \\ x_2 = C_1 \sin(t + C_2), \end{cases}$$

в то время как фазовые траектории являются в  $E^2\{x_1, x_2\}$  окружностями (или точкой при  $C_1 = 0$ ) вида  $x_1^2 + x_2^2 = C_1^2$ . Причем для каждой фазовой траектории с конкретным значением  $C_1$  имеется бесконечно много интегральных кривых с различными значениями  $C_2$ .

Укажем некоторые полезные свойства решений автономных систем и их фазовых траекторий.

**Теорема 6.1.1** Если вектор-функция  $x(t)$  есть решение автономной системы (6.1.1) при  $t \in T$ , то вектор-функция  $x(t + c)$  (где  $c$  такая константа, что  $t + c \in T$ ) также является решением системы (6.1.1) при всех допустимых  $t$ .

Доказательство.

Следует непосредственно из равенств

$$\frac{dx(t + c)}{dt} = \frac{dx(t + c)}{d(t + c)} = F(x(t + c)).$$

Теорема доказана.

**Теорема 6.1.2** Если фазовые траектории решений  $x(t)$ ,  $t \in T_1$  и  $y(t)$ ,  $t \in T_2$  автономной системы (6.1.1) имеют общую точку  $b = x(t_1) = y(t_2)$ , то  $y(t) \equiv x(t + t_1 - t_2)$  для всех  $t$ , при которых определены обе части последнего тождества.

**Доказательство.**

Вектор-функция  $z(t) = x(t + t_1 - t_2)$  в силу теоремы 6.1.1 является решением системы (6.1.1) для всех  $t$  таких, что

$$t + t_1 - t_2 \in T_1.$$

Кроме того,

$$z(t_2) = x(t_1) = b = y(t_2).$$

Тогда по теореме единственности  $z(t) \equiv y(t)$  для всех  $t$ , при которых обе части этого тождества определены.

**Теорема доказана.**

Утверждение теоремы 6.1.2 означает, что фазовые траектории автономных систем либо не имеют общих точек, либо совпадают. Поэтому вектор-функцию  $F(x)$  можно рассматривать в области  $\Omega$  как задающую векторное поле *фазовых скоростей*, каждый ненулевой элемент которого является вектором, касательным к фазовой траектории, проходящей через точку  $x \in \Omega$ .

Для точек с нулевой фазовой скоростью используется

**Определение 6.1.2** *Положением равновесия или точкой покоя*<sup>1</sup> системы (6.1.1) называется ее решение вида

$$x(t) = x_0 \in \Omega \quad \forall t \in T$$

такое, что  $F(x_0) = 0$ .

Иначе говоря, положение равновесия есть постоянное (во времени) решение системы (6.1.1), фазовая траектория которого является точкой в фазовом пространстве  $E^n$ , а соответствующая этому решению интегральная кривая в  $E^{n+1}$  есть прямая, параллельная оси  $Ot$ . Из определения 6.1.2 также следует, что поиск положений равновесия системы (6.1.1) сводится к решению конечной (не дифференциальной) системы уравнений  $F(x_0) = 0$ .

Из вышесказанного следует, что *неособое решение* не может проходить через стационарную точку ни при каких конечных  $t$ . Оно может лишь асимптотически к ней приближаться при  $t \rightarrow +\infty$  или при  $t \rightarrow -\infty$ .

**Теорема 6.1.3** Пусть  $x(t)$ ,  $t \in T$  – неособое решение системы (6.1.1), фазовая траектория для которого замкнутая линия. Тогда  $x(t)$  – периодическая функция.



Доказательство.

В силу условий теоремы  $\Gamma$  – фазовая траектория, отвечающая решению  $x(t)$ , есть гладкая замкнутая линия в  $E^n$ , длина элемента дуги которой равна

$$dL = |dx| = |\dot{x}(t)|dt = |F(x(t))|dt.$$

Рассмотрим  $\gamma$  – некоторую дугу линии  $\Gamma$ , начинающуюся в точке  $x(0)$ . В силу теоремы 6.1.1 для каждой ее точки остается справедливым равенство (6.1.1). В этом случае длина дуги  $\gamma$  для  $t \in (0, \tau)$  при  $\tau > 0$  определяется формулой

$$L(\tau) = \int_0^{\tau} |F(x(t))|dt.$$

Покажем, что  $\exists P^* > 0 : x(P^*) = x(0)$ , то есть  $P^*$  – период. Поскольку точки линии  $\Gamma$  в своей совокупности образуют ограниченное и замкнутое множество, то для непрерывной на этом множестве функции  $|F(x)|$  существуют числа  $m$  и  $M$  такие, что

$$0 < m \leq |F(x)| \leq M < +\infty ,$$

а по свойствам определенного интеграла:  $m\tau \leq L(\tau) \leq M\tau$ .

Из неравенства  $m\tau \leq L(\tau)$  следует, что монотонно возрастающая функция  $L(\tau)$  стремится к  $+\infty$  при  $\tau \rightarrow +\infty$ .

Поскольку гладкая линия  $\Gamma$  замкнутая, то она имеет ограниченную длину, которую обозначим  $L^*$ . В этом случае при малых  $\tau > 0$

$$L(\tau) \leq M\tau < L^*,$$

ибо дуга  $\gamma$  является (например при  $\tau < L^*/M$ ) частью  $\Gamma$ .

Поэтому существует (а в силу монотонности и непрерывности  $L(\tau)$  – единственное) число  $P^* > 0$ , являющееся решением уравнения

$$L(P) = L^* \quad \text{или} \quad \int_0^P |F(x(t))| dt = L^* .$$

При  $P = P^*$  линия  $\gamma$  совпадает с  $\Gamma$  и  $x(P^*) = x(0)$ . Значит, число  $P^* > 0$  – наименьший положительный период вектор-функции  $x(t)$ .

Теорема доказана.

Из теорем 6.1.1–6.1.3 вытекает

**Следствие 6.1.1** Каждая фазовая траектория автономной системы (6.1.1) является либо точкой, либо незамкнутой линией или замкнутой линией без самопересечений.

**Доказательство.**

Действительно, незамкнутая траектория, очевидно, не имеет точек самопересечения.

В случае замкнутой фазовой траектории точек самопересечения также быть не может, поскольку из равенства  $x(t_1) = x(t_2)$  при некоторых  $t_1, t_2 \in [0, P^*]$  и  $|t_2 - t_1| < P^*$  следует, что решение  $x(t)$  имеет период  $P^{**} = |t_2 - t_1| < P^*$ , что невозможно, поскольку  $P^*$  наименьший положительный период.

Следствие доказано.

*Групповое* свойство автономной системы (6.1.1) описывает

**Теорема 6.1.4** Пусть  $x(t, a)$  есть решение задачи Коши следующего вида  $\dot{x} = F(x)$ ,  $x(0) = a$ . Тогда

$$x(t, x(t_0, a)) \equiv x(t + t_0, a)$$

для любых допустимых  $t$  и  $t_0$ .

**Доказательство.**

Вектор-функции  $x(t, x(t_0, a))$  и  $x(t + t_0, a)$  при  $t = 0$  равны вектору  $x(t_0, a)$ . По теореме единственности они совпадают для всех допустимых значений  $t$  и  $t_0$ .

**Теорема доказана.**

Исследование поведения фазовых траекторий системы (6.1.1) в малой окрестности некоторой точки фазового пространства *единообразно* выполнить удастся, вообще говоря, не всегда. Например в случаях, когда рассматриваемая точка является положением равновесия, оказывается, что фазовый портрет существенно зависит от типа этого равновесия (соответствующие случаи будут рассмотрены в последующих параграфах).

Однако в окрестности неособой точки характер поведения фазовой траектории качественно одинаков для любых автономных систем.

Пусть формулы  $x = \varphi(y) \quad \forall y \in \Theta \subset E^n, x \in \Omega \subset E^n$  задают замену переменных  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  на  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ . Напомним

<p><b>Определение</b> 6.1.3</p>	<p>Замена переменных <math>x = g(y)</math> называется <i>гладкой обратимой</i> в <math>\Theta</math>, если</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1°. Преобразование <math>x = g(y)</math> взаимно однозначно отображает <math>\Theta</math> в <math>\Omega</math>;</li> <li>2°. Вектор-функции <math>x = g(y)</math> и, обратная к ней <math>y = g^{-1}(x) = h(x)</math>, непрерывно дифференцируемы на множествах <math>\Theta</math> и <math>\Omega</math> соответственно;</li> <li>3°. Якобиан</li> </ol> $\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} \neq 0 \quad \forall y \in \Theta.$
<p><b>Определение</b> 6.1.4</p>	<p>Замена переменных <math>y = h(x)</math> называется <i>обратной</i> к замене <math>x = g(y)</math>.</p>

Замена переменных, обратная к гладкой и обратимой, также гладкая и обратимая в силу определений 6.1.3 и 6.1.4.

Будет справедлива

**Теорема 6.1.5** В малой окрестности точки  $a \in \Omega \subseteq E^n$ , не являющейся положением равновесия, система (6.1.1) может быть приведена к виду

(0  
выпрям-  
лении  
траек-  
торий)

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 0, \\ \dot{y}_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \dot{y}_{n-1} = 0, \\ \dot{y}_n = 1 \end{cases} \quad (6.1.2)$$

некоторой гладкой обратимой заменой  $x = g(y)$ .



### Доказательство.

Поскольку  $a$  не является положением равновесия для системы (6.1.1), то существует  $\Omega \subseteq E^n$  – некоторая окрестность точки  $a$ , в которой  $F(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega$ .

Без потери общности можно считать, что вектор  $F(x)$  имеет хотя бы одну ненулевую компоненту и у этой компоненты индекс равен  $n$ .

Рассмотрим для системы (6.1.1) задачу Коши с начальным условием следующего специального вида  $x(t_0) = a$ . Пусть непрерывно дифференцируемая вектор-функция  $x = \varphi(t)$  есть решение этой задачи Коши, фазовая траектория которого проходит через точку  $a$  при  $t = t_0$ .

Далее мы будем использовать компоненты вектора  $a$  с индексами  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  как произвольные константы со значениями  $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ , а  $n$ -ю компоненту вектора  $x$  будем рассматривать в качестве  $u$  – новой (вместо  $t$ ) независимой переменной.

Используя обозначения

$$\|\vec{A}\| = \left\| \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{n-1} \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad x_n = u,$$

покажем, что искомая замена  $x = g(y)$  может быть определена равенствами:

$$\left\| \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} x_1 - \varphi_1(t(u)) + a_1 \\ x_2 - \varphi_2(t(u)) + a_2 \\ \dots \\ x_{n-1} - \varphi_{n-1}(t(u)) + a_{n-1} \\ u \end{array} \right\|, \quad (6.1.3)$$

где функция  $t(u)$ , реализующая замену независимой переменной  $t$  на  $u$ , есть решение вспомогательной задачи Коши:

$$\frac{dt}{du} = \frac{1}{F_n(\vec{A}, u)} \quad t(a_n) = t_0, \quad (6.1.4)$$

которое в сделанных предположениях существует и единственно.

Найдем теперь вид системы (6.1.1) в новых переменных  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ .

В силу (6.1.3) и (6.1.4)  $\forall k = 1, 2, \dots, n-1$  на фазовой траектории  $x = \varphi(t)$ , удовлетворяющей (6.1.1), будут справедливы равенства

$$\frac{dy_k}{du} = \left( \frac{dx_k}{dt} - \frac{d\varphi_k}{dt} \right) \frac{dt}{du} = \left( \dot{\varphi}_k(t) - F_k(\varphi(t)) \right) \frac{1}{F_n(x)} = 0. \quad (6.1.5)$$

Кроме того, из условия  $y_n(u) = u$  получаем  $\frac{dy_n}{du} = 1$ , а это, в совокупности с равенствами (6.1.5), означает, что в переменных  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  система (6.1.1) имеет вид, указанный в формулировке теоремы.

Теперь остается доказать, что замена, определяемая соотношениями (6.1.3), гладкая и обратимая. Для этого достаточно установить факт невырожденности матрицы Якоби при данной замене.

Запишем соотношения (6.1.3) в следующем виде, заменив  $u$  на  $x_n$ ,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \varphi_1(t(x_n)) + a_1 \\ x_2 - \varphi_2(t(x_n)) + a_2 \\ \dots \\ x_{n-1} - \varphi_{n-1}(t(x_n)) + a_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (6.1.6)$$

В данном случае якобиан замены переменных

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \longrightarrow \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \quad (6.1.7)$$

в силу (6.1.6),  $F_n(x) \neq 0$  и соотношений

$$\frac{dy_k}{dx_n} = -\frac{d\varphi_k(t(x_n))}{dt} \cdot \frac{dt}{dx_n} = -\frac{F_k(x)}{F_n(x)}$$

$$\forall k = 1, 2, \dots, n-1$$

равен

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{F_1(x)}{F_n(x)} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{F_2(x)}{F_n(x)} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & -\frac{F_3(x)}{F_n(x)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{F_{n-1}(x)}{F_n(x)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Таким образом, гладкая и обратимая замена переменных (6.1.7) приводит систему (6.1.1) к виду, указанному в формулировке теоремы.

**Теорема доказана.**

В заключение отметим, что

- 1°. При выбранной начальной точке  $a$  замена (6.1.7) может считаться известной, ибо существование и единственность непрерывно дифференцируемой вектор функции  $x = \varphi(t)$  следует из теоремы Коши.
- 2°. Система (6.1.1) в переменных  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  легко интегрируется. Ее фазовые траектории суть отрезки прямых

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(u) = a_1, \\ y_2(u) = a_2, \\ \dots \\ y_{n-1}(u) = a_{n-1}, \\ y_n(u) = u + C, \end{array} \right.$$

что оправдывает название теоремы.

- 3°. Практическое значение теоремы 6.1.5 ограничено тем обстоятельством, что замена (6.1.7) для каждой точки  $a$  своя. Иначе говоря, построить эту замену единообразно для *немалого* множества  $\Omega$  удастся лишь исключительных случаях.