

Линейные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

Напомним, что мы рассматриваем линейные однородные уравнения второго порядка вида

$$a_2(t)\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = 0, \quad (5.4.2)$$

где функции $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$, $t \in \Omega$ непрерывно дифференцируемы и $a_2(t) \neq 0$.

Мы показали, что уравнение (5.4.2) всегда может быть приведено к виду

$$\ddot{y} + a_0(t)y = 0,$$

не содержащего слагаемого с первой производной от искомой функции.

Для этого уравнения справедлива

Лемма 5.4.1 **Всякое ненулевое решение уравнения (5.4.1) может иметь лишь конечное число нулей на любом конечном отрезке.**

Доказательство.

Предположим, что *нетривиальное* (то есть $y(t) \not\equiv 0$) непрерывно дифференцируемое решение уравнения (5.4.1) имеет на отрезке $[\alpha, \beta]$ бесконечное число нулей, из которых можно образовать числовую последовательность $\{t_m\}$. Эта последовательность ограничена и по теореме Больцано–Вейерштрасса имеет предельную точку $t^* \in [\alpha, \beta]$. В нашем случае без ограничения общности можно считать, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = t^*. \quad (5.4.4)$$

Поскольку $y(t)$ непрерывна, то $\lim_{m \rightarrow \infty} y(t_m) = 0 = y(t^*)$.

С другой стороны, в силу $y(t_m) = y(t_{m+1}) = 0$ по теореме Ролля между точками t_m и t_{m+1} найдется точка θ_m такая, что $\dot{y}(\theta_m) = 0$. Тогда для непрерывно дифференцируемой $y(t)$ из (5.4.4) следует, что $\dot{y}(t^*) = 0$.

Из условий $y(t^*) = 0$ и $\dot{y}(t^*) = 0$ по теореме единственности решения задачи Коши получаем, что $y(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$. Однако это противоречит условию леммы.

Лемма доказана.

Теорема
5.4.1
(Штурма о
сравнении)

Пусть t_1 и t_2 соседние несовпадающие нули некоторого нетривиального решения уравнения

$$\ddot{y} + a_0(t)y = 0 \quad (5.4.5)$$

и пусть функции $a_0(t)$ и $A_0(t)$ непрерывны и таковы, что $A_0(t) \geq a_0(t) \quad \forall t \in [t_1, t_2]$.

Тогда любое нетривиальное решение $z(t)$ уравнения

$$\ddot{z} + A_0(t)z = 0, \quad (5.4.6)$$

имеет нуль хотя бы в одной точке отрезка $[t_1, t_2]$, при этом оно либо обращается в нуль на (t_1, t_2) , либо

$$\begin{cases} z(t_1) = z(t_2) = 0, \\ A_0(t) \equiv a_0(t) \quad \text{на } [t_1, t_2]. \end{cases}$$

Доказательство.

Пусть $y(t_1) = y(t_2) = 0$ и, кроме того, $y(t) \neq 0 \forall t \in (t_1, t_2)$.
Без потери общности также считаем, что на этом интервале $y(t) > 0$ (иначе можно взять решение $-y(t)$). Тогда

$$\dot{y}(t_1) = \lim_{t \rightarrow t_1+0} \frac{y(t)}{t - t_1} \geq 0, \quad \dot{y}(t_2) = \lim_{t \rightarrow t_2-0} \frac{y(t)}{t - t_2} \leq 0.$$

В силу теоремы единственности эти производные не могут быть нулевыми и потому $\dot{y}(t_1) > 0$ и $\dot{y}(t_2) < 0$ (иначе решение получилось бы тривиальным).

Пусть $z(t)$ – некоторое нетривиальное решение уравнения (5.4.6). Умножая обе части уравнения (5.4.5) на $z(t)$, а обе части (5.4.6) – на $-y(t)$ и складывая их почленно, получим

$$\ddot{y}z - \ddot{z}y = \left(A_0(t) - a_0(t) \right) y(t)z(t).$$

Прибавляя и вычитая $\dot{y}\dot{z}$ в левой части, полученное равенство можно преобразовать к виду

$$\frac{d}{dt}(\dot{y}z - \dot{z}y) = \left(A_0(t) - a_0(t) \right) y(t)z(t).$$

Интегрируя это равенство в пределах от t_1 до t_2 и учитывая, что $y(t_1) = y(t_2) = 0$, получаем

$$\dot{y}(t_2)z(t_2) - \dot{y}(t_1)z(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \left(A_0(t) - a_0(t) \right) y(t)z(t) dt. \quad (5.4.7)$$

Если предположить, что теорема Штурма не верна, то должна реализоваться одна из следующих трех возможностей:

- 1°. $z(t) > 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2]$.
- 2°. $z(t) > 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2), \quad z(t_2) = 0$.
- 3°. $z(t) > 0 \quad \forall t \in (t_1, t_2], \quad z(t_1) = 0$.

Правая часть равенства (5.4.7) во всех трех случаях очевидно неотрицательная, в силу

$$A_0(t) \geq a_0(t), \quad y(t)z(t) \geq 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2],$$

а левая – отрицательная, поскольку $\dot{y}(t_1) > 0$, $\dot{y}(t_2) < 0$ и $|z(t_1)| + |z(t_2)| > 0$, а $z(t) = 0$ или в точке t_1 или в t_2 . Это противоречие показывает, что первое утверждение теоремы Штурма верно.

Наконец, при $z(t_1) = z(t_2) = 0$ из (5.4.7) в силу непрерывности $A_0(t) - a_0(t) \geq 0$ следует $A_0(t) \equiv a_0(t)$ на $[t_1, t_2]$.

Теорема доказана.

Следствие 5.4.1 **На отрезке, где $a_0(t) \leq 0$, любое нетривиальное решение $y(t)$ уравнения (5.4.1) может обратиться в нуль не более, чем в одной точке.**

Доказательство.

Применим теорему Штурма к паре уравнений

$$\ddot{y} + a_0(t)y = 0 \quad \text{и} \quad \ddot{z} + 0z = 0.$$

Предположим, что первое из них имеет на Ω по крайней мере два нуля $t_1 < t_2$. Тогда в силу условия $a_0(t) \leq 0 \quad \forall t \in \Omega$ каждое нетривиальное решение второго уравнения в силу теоремы 5.4.1 обязано иметь хотя бы один нуль на $[t_1, t_2]$.

Однако легко видеть, что $z(t) \equiv 1$ – нетривиальное решение второго уравнения – такого нуля не имеет. Следовательно, предположение о том, что первое уравнение может иметь более одного нуля, не верное.

Следствие доказано.

Следствие 5.4.2 (0 чередования нулей)
В промежутке между любыми двумя соседними нулями одного из двух линейно независимых решений уравнения (5.4.1) содержится ровно один нуль другого решения.

Доказательство.

Пусть $y_{(1)}(t)$ и $y_{(2)}(t)$ линейно независимые, нетривиальные решения уравнения (5.4.1). Применим теорему Штурма к паре уравнений вида

$$\ddot{y}_{(1)} + a_0(t)y_{(1)} = 0 \quad \text{и} \quad \ddot{y}_{(2)} + a_0(t)y_{(2)} = 0.$$

(Мы формально положили $a_0(t) \equiv A_0(t)$).

Если t_1 и t_2 соседние несовпадающие нули первого уравнения, то между ними имеется хотя бы один нуль второго уравнения t^* . Общих нулей у $y_{(1)}(t)$ и $y_{(2)}(t)$ быть не может. Действительно, если, например, $y_{(1)}(t^*) = y_{(2)}(t^*) = 0$, то вронсиан $W(t^*) = 0$ и решения $y_{(1)}(t)$ и $y_{(2)}(t)$ линейно зависимые. Поэтому $t^* \in (t_1, t_2)$.

Остается доказать, что t^* единственное. Предположим, что существует также t^{**} такое, что

$$y_{(2)}(t^{**}) = 0, \quad t_1 < t^* < t^{**} < t_2.$$

Тогда по теореме Штурма у $y_{(1)}(t)$ должен иметься нуль на (t^*, t^{**}) , что противоречит предположению о том, что t_1 и t_2 соседние нули решения $y_{(1)}(t)$. Значит $t^* = t^{**}$.

Следствие доказано.

Отметим, что для линейных уравнений порядка большего, чем два ($n > 2$), следствие 5.4.2, вообще говоря, не верно. Например, для линейно независимых решений $y_{(1)}(t) = \sin t$ и $y_{(2)}(t) \equiv 1$ уравнения $\ddot{y} + \dot{y} = 0$ чередования нулей нет.

Следствие 5.4.3 Если некоторое нетривиальное решение уравнения (5.4.1) имеет бесконечное число нулей, то и каждое его нетривиальное решение имеет бесконечное число нулей.

Доказательство.

Вытекает непосредственно из утверждения следствия 5.4.2.

Следствие доказано.

Исследование решений дифференциальных уравнений на практике осложняется тем обстоятельством, что малые изменения в записи уравнения или в дополнительных условиях (начальных, краевых и т.д.), вообще говоря, могут приводить к не малым изменениям в решениях.

В этих случаях принято говорить о нерегулярности (некорректности) постановки задачи, а сами малые изменения условий называть *сингулярными возмущениями*.

Хотя изучение свойств таких задач и методов их решений не является составной частью нашего курса, ввиду важности их для приложений представляется целесообразным рассмотреть конкретный пример задачи содержащей в своем условии сингулярное возмущение.

Задача Найти $y(t, \varepsilon)$ – решение краевой задачи, где ε – малый
5.5.2 положительный параметр и $t \in [0, 1]$,

$$\varepsilon \ddot{y} + \dot{y} + y = F(t), \quad (5.5.11)$$

при условиях:

$$y(0) = 0 \quad \text{и} \quad y(1) = 1 \quad (5.5.12)$$

для

- а) $F(t) = 1$,
- б) $F(t) = 1 + t$.

Решение. 1°. Рассмотрим вначале случай $F(t) = 1$. В качестве частного решение уравнения (5.5.11) очевидно можно взять функцию $y(t) = 1$. Тогда его общее решение будет

$$y(t, \varepsilon) = 1 + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы, а λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения $\varepsilon \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, равные соответственно

$$\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon} \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon}.$$

Для определения значений констант C_1 и C_2 используем краевые условия (5.5.12), из которых следует, что

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -1, \\ e^{\lambda_1} C_1 + e^{\lambda_2} C_2 = 0. \end{cases}$$

Откуда получаем

$$C_1 = -\frac{e^{\lambda_2}}{e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{e^{\lambda_1}}{e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}}$$

и находим решение краевой задачи

$$y(t, \varepsilon) = 1 - \frac{e^{\lambda_2}}{e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}} e^{\lambda_1 t} + \frac{e^{\lambda_1}}{e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}} e^{\lambda_2 t},$$

где $t \in [0, 1]$.

2°. Исследуем теперь асимптотическое поведение найденного решения краевой задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для λ_1 и λ_2 имеем соответственно оценки:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon} = -\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon} \sqrt{1 - 4\varepsilon} = \\ &= -\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon} (1 - 2\varepsilon + o(\varepsilon)) = -1 + O(\varepsilon)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= \frac{-1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon} = -\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon} \sqrt{1 - 4\varepsilon} = \\ &= -\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon} (1 - 2\varepsilon + o(\varepsilon)) = -\frac{1}{\varepsilon} + 1 + O(\varepsilon).\end{aligned}$$

Проверьте самостоятельно, что также справедливы оценки: $C_1 = O(\varepsilon)$, $C_2 = -1 + O(\varepsilon)$ и

$$e^{\lambda_2 t} = \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon), \quad t \in [0, 1], \quad \varepsilon > 0.$$

Теперь можно выписать формулу асимптотической оценки при $\varepsilon > 0$ и для решения краевой задачи

$$y(t, \varepsilon) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon),$$

из которой следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} y(t, \varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{если } t = 0, \\ 1, & \text{если } t \in (0, 1]. \end{cases}$$

Графики функций $y(t, \varepsilon)$ для

$$\varepsilon = 0.1, 0.05, 0.025, 0.01, 0.001$$

показаны на рис. 5.1.

Исследование при $\varepsilon < 0$ сводится к уже рассмотренному случаю при помощи замены переменной t на $-t$.

3°. Отметим важный факт, следующий из предыдущего рассмотрения: предельный переход $\varepsilon \rightarrow +0$, выполненный в *решении* задачи (5.5.11)–(5.5.12) приводит к результату, отличающемуся от результата предельного перехода в *условии* этой задачи.

Действительно, если в уравнении (5.5.11) положить $\varepsilon = 0$ и оставить лишь одно краевое условие $y(1) = 1$, то мы получим решение для уравнения первого порядка $\dot{y} + y = 1$ вида $y(t) \equiv 1 \quad \forall t \in [0, 1]$.

Данное решение будет близко к решению задачи (5.5.11)–(5.5.12) везде на отрезке $[0, 1]$, за исключением ε -окрестности точки $t = 0$, где решения будут значительно отличаться.

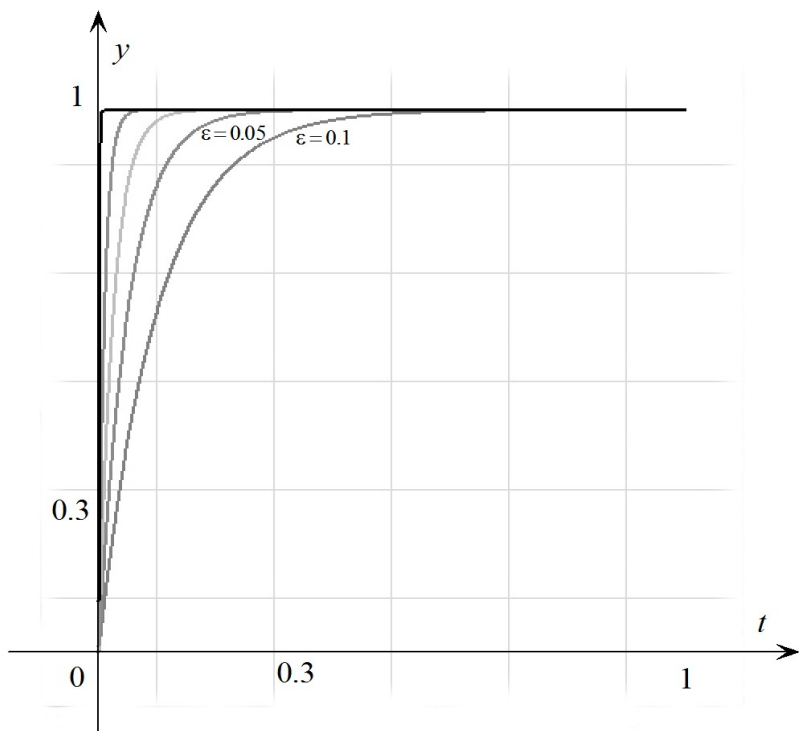


Рис. 1. Графики решений краевой задачи для различных $\epsilon > 0$

Эту окрестность принято называть *пограничным слоем*, а отмеченное различие решений – *поведением типа пограничного слоя*. Математически природа эффекта пограничного слоя вполне очевидна: возмущенное уравнение (то есть уравнение (5.5.11) с $\varepsilon \neq 0$) есть уравнение второго порядка, в то время как невозмущенное является уравнением первого порядка, решения которого могут не удовлетворять двум различным краевым условиям.

В заключение обратим внимание на то, что эффект пограничного слоя возникает не при любом возмущении. Например, в случае б) при $F(t) = 1 + t$ решение невозмущенной задачи имеет вид $y(t) = t$ и является при этом также решением краевой возмущенной задачи при любом ε .

Решение
получено.