# Показательная функция матрицы

Рассмотрим квадратные матрицы порядка $n$. Для них определены операции сравнения, сложения и умножения числа на матрицу. Если использовать умножение и обращение матриц, то можно определить и операцию возведения матрицы в степень с любым целым показателем.

| | |
|---|---|
| Определение 3.4.1 | Степенью $k$, где $k \geq 2$ натуральное число, квадратной матрицы $\|A\|$ порядка $n$ называется квадратная матрица $\|A\|^k$ того же порядка, равная $$\|A\|^k = \underbrace{\|A\| \cdot \|A\| \cdot \ldots \cdot \|A\|}_{k}\ .$$ Кроме того, будем считать, что $\|A\|^0 = \|E\|$ и $\|A\|^1 = \|A\|$. Наконец, при $\det\|A\| \neq 0$ определим $\|A\|^{-1}$ так, чтобы $\|A\|^{-1}\|A\| = \|E\|$ и при $k \geq 2$. $$\|A\|^{-k} = \underbrace{\|A\|^{-1} \cdot \|A\|^{-1} \cdot \ldots \cdot \|A\|^{-1}}_{k}$$ |

Заметим, что из этого определения следует выполнение при любых целых $k$ и $m$ равенства $\|A\|^{k+m} = \|A\|^k\|A\|^m$.

Далее для матриц определим, выполняемые поэлементно, операции *предельного перехода*, *дифференцирования* и *интегрирования*.

| | |
|---|---|
| Определение 3.4.2 | Пусть элементы матрицы $\|A(t)\|$ непрерывно дифференцируемые функции $\alpha_{ij}(t)\ \ \forall i,j=[1,n]$ и $\forall t\in T$. Тогда элементами матрицы<br>– $\lim\limits_{t\to t_0}\|A(t)\|$ будут числа $\lim\limits_{t\to t_0}\alpha_{ij}(t)$;<br>– $\dfrac{d\,\|A(t)\|}{dt}$ будут функции $\dfrac{d}{dt}\alpha_{ij}(t)$;<br>– $\int\limits_{t_0}^{t}\|A(u)\|\,du$ будут интегралы с переменным верхним пределом $\int\limits_{t_0}^{t}\alpha_{ij}(u)\,du$ . |

Определения 3.4.1 и 3.4.2 позволяют вводить в рассмотрение и другие, более сложные функции матриц, используя для их описания *ряды*, то есть суммы с неограниченным числом слагаемых.

Отметим, что здесь (как и ранее) нижний индекс в круглых скобках является номером, в данном случае слагаемого в сумме.

| | |
|---|---|
| Определение 3.4.3 | Матрица $\|B\|$ называется *суммой матричного ряда* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \|A_{(k)}\|$, если $\forall i,j=[1,n]$ числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \alpha_{ij(k)}$ , составленный из $ij$-х элементов матриц $\|A_{(k)}\|$ , сходится к $ij-$му элементу $\|B\|$ . |

Аналогичным образом определяются понятия *абсолютной сходимости* матричного ряда, а также *поточечной* и *равномерной* сходимости рядов образованных из матриц, элементами которых являются функции.

Здесь же отметим, что в силу определений 3.4.2 и 3.4.3, для матричных рядов оказываются справедливыми, аналогичные, доказанным в курсе математического анализа, теоремы о *непрерывности* суммы ряда, а также о возможности его *почленного дифференцирования* и *интегрирования*.

Для дальнейшего анализа условий сходимости матричных рядов оказывается полезным

| | |
|---|---|
| Определение 3.4.4 | *Нормой матрицы* $\|A\|$ называется число $\langle \|A\| \rangle$, равное $\max\limits_{i,j=[1,n]} \lvert \alpha_{ij} \rvert$ . |

Теорема 3.4.1

**Если** $\left\langle \|A_{(k)}(t)\| \right\rangle \leq a_k \ \forall k = 0, 1, 2, \ldots, \forall t \in T$ **и мажорирующий числовой ряд** $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$ **сходится, то матричный ряд** $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \|A_{(k)}(t)\|$ **сходится абсолютно и равномерно на** $T$.

Имеет место

`Теорема 3.4.2` **Для любой квадратной матрицы $\|A\|$ и каждого $\rho > 0$ матричный ряд**

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} = \|E\| + \frac{t\|A\|}{1!} + \frac{t^2\|A\|^2}{2!} + \frac{t^3\|A\|^3}{3!} + \dots \quad (3.4.1)$$

**сходится абсолютно и равномерно в круге $|t| \leq \rho$ комплексной плоскости.**

`Доказательство.`

Согласно определению 3.4.4, для любой квадратной матрицы $\|A\|$ существует неотрицательное число $M = \langle\|A\|\rangle$ , для которого $|\alpha_{ij}| \leq M \ \forall i, j = [1, n]$ . Оценим, исходя из правила умножения матриц, норму матрицы $\|A\|^2$. Обозначим элемент $\|A\|^k$ как $\alpha_{ij(k)}$. Поскольку

$$\|A\|^2 = \|A\| \cdot \|A\|, \text{ то } \alpha_{ij(2)} = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{is}\alpha_{sj}$$

и

$$\left|\alpha_{ij(2)}\right| \ \leq \ \sum_{s=1}^{n} |\alpha_{is}||\alpha_{sj}| \ \leq \ nM^2 \ .$$

Действуя аналогично для бо́льших степеней матрицы $\|A\|$, по индукции получаем $\left|\alpha_{ij(k)}\right| \leq n^{k-1}M^k$.

В силу определения 3.4.3 сходимость матричного ряда (3.4.1) равносильна сходимости числовых рядов

$$\delta_{ij}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^k\alpha_{ij(k)}}{k!}=\delta_{ij}+\frac{t\alpha_{ij(1)}}{1!}+\frac{t^2\alpha_{ij(2)}}{2!}+\frac{t^3\alpha_{ij(3)}}{3!}+\dots \quad (3.4.2)$$

для всех $i, j = [1, n]$. В этой формуле слагаемое $\delta_{ij}$ есть символ Кронекера.

Сходимость каждого из рядов (3.4.2) следует из сходимости мажорирующего числового ряда

$$1+\frac{\rho M}{1!}+\frac{\rho^2 n M^2}{2!}+\dots+\frac{\rho^k n^{k-1} M^k}{k!}+\dots\ ,$$

который сходится по признаку д'Аламбера (проверьте это самостоятельно!).

Наконец, используя утверждение теоремы 3.4.1, приходим к доказываемому результату.

`Теорема доказана.`

| | |
|---|---|
| `Определение 3.4.5` | *Показательной функцией* (или *экспонентой*) *матрицы* $\|A\|$ называется сумма матричного ряда $$e^{\|A\|} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = \|E\| + \frac{\|A\|}{1!} + \frac{\|A\|^2}{2!} + \frac{\|A\|^3}{3!} + \ldots$$ |

Согласно этому определению и правилу умножения числа на матрицу, сумма матричного ряда (3.4.1) будет иметь вид

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} = \|E\| + \frac{t\|A\|}{1!} + \frac{t^2\|A\|^2}{2!} + \frac{t^3\|A\|^3}{3!} + \ldots = e^{t\|A\|} \ . \qquad (3.4.3)$$

Основные свойства матричной экспоненты описывает

Теорема 3.4.3 **Пусть $\|A\|$ и $\|B\|$ квадратные матрицы порядка $n$. Тогда для матричной экспоненты справедливы равенства:**

- **если** $\|A\| \cdot \|B\| = \|B\| \cdot \|A\|$,

  **то** $e^{\|A\|+\|B\|} = e^{\|A\|}e^{\|B\|}$**;**

- $\dfrac{d}{dt}\ e^{t\|A\|} = \|A\|\ e^{t\|A\|}$ .

`Доказательство.`

Докажем первое утверждение теоремы.

Имеем, с одной стороны,

$$e^{\|A\|}\,e^{\|B\|} =$$

$$= \left(\|E\| + \frac{\|A\|}{1!} + \frac{\|A\|^2}{2!} + \ldots\right)\left(\|E\| + \frac{\|B\|}{1!} + \frac{\|B\|^2}{2!} + \ldots\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} g_{km}\|A\|^k\|B\|^m. \qquad (3.4.4)$$

С другой стороны,

$$e^{\|A\|+\|B\|} = \|E\| + \frac{\|A\|+\|B\|}{1!} + \frac{(\|A\|+\|B\|)^2}{2!} + \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} h_{km}\|A\|^k\|B\|^m\ , \qquad (3.4.5)$$

поскольку из коммутируемости матриц $\|A\|$ и $\|B\|$ следует справедливость матричного аналога формулы бинома Ньютона, то есть равенств вида

$$(\|A\|+\|B\|)^2 = (\|A\|+\|B\|)(\|A\|+\|B\|) =$$

$$= \|A\|^2+\|A\|\|B\|+\|B\|\|A\|+\|B\|^2 = \|A\|^2+2\|A\|\|B\|+\|B\|^2$$

и им подобным.

Таким образом, матрицы $\|A\|$ и $\|B\|$, в предположении коммутативности их произведения, по алгебраическим свойствам не отличаются от чисел. Значит, вид разложений (3.4.4) и (3.4.5) не зависит от того, являются ли $\|A\|$ и $\|B\|$ числами или матрицами.

Сравним теперь значения коэффициентов $g_{km}$ и $h_{km}$, исходя из факта, что разложение функции в степенной ряд если существует, то оно единственно. Это дает

$$g_{km} = h_{km}\ \ \forall k, m = 0, 1, 2, 3, \ldots\ ,$$

то есть выражения (3.4.4) и (3.4.5) совпадают.

Убедимся теперь в справедливости второго утверждения теоремы.

Поскольку в нашем случае матричный ряд (3.4.3) сходится на множестве $T$, а ряд, составленный из производных его членов, сходится равномерно к производной от суммы ряда, его можно почленно дифференцировать. Поэтому

$$\frac{d}{dt}\ e^{t\|A\|} = \frac{d}{dt}\left(\|E\| + \frac{t\|A\|}{1!} + \frac{t^2\|A\|^2}{2!} + \frac{t^3\|A\|^3}{3!} + \ldots\right) =$$

$$= \|A\| + \frac{t\|A\|^2}{1!} + \frac{t^2\|A\|^3}{2!} + \frac{t^3\|A\|^4}{3!} + \ldots =$$

$$= \|A\|\left(\|E\| + \frac{t\|A\|}{1!} + \frac{t^2\|A\|^2}{2!} + \frac{t^3\|A\|^3}{3!} + \ldots\right) =$$

$$= \|A\|\ e^{t\|A\|}\ .$$

И мы приходим к заключению о справедливости второго утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Следствие 3.4.1 **Матрица $\|X(t)\| = e^{t\|A\|}$ является решением задачи Коши с начальным условием $\|X(0)\| = \|E\|$ для матричного уравнения $\|\dot{X}\| = \|A\|\|X\|$.**

Теорема 3.4.4 **Общее решение однородной системы (3.1.1) может быть представлено в форме**

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{array} \right\| = e^{t\|A\|} \left\| \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{array} \right\| , \qquad (3.4.6)$$

**где** $C_1, C_2, \dots, C_n$ – **произвольные комплексные числа.**

`Доказательство.`

Пусть $k-$ый столбец матрицы $\|X(t)\|$ есть вектор-функция $\|g_{(k)}(t)\| \quad \forall k = [1, n]$. Тогда матричное дифференциальное уравнение

$$\|\dot{X}\| = \|A\|\|X\|$$

можно записать в покомпонентном виде, как следующий набор из $n$ систем $\forall k = [1, n]$

$$\begin{cases} \dot{g}_{1(k)}(t) & = & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} g_{j(k)}(t) \ , \\ \dot{g}_{2(k)}(t) & = & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j} g_{j(k)}(t) \ , \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{g}_{n(k)}(t) & = & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj} g_{j(k)}(t) \ . \end{cases}$$

Это означает, что каждая вектор-функция $\|g_{(k)}(t)\|$ есть частное решение однородной системы (3.1.1).

Кроме того, поскольку $\|X(0)\| = \|E\|$, то каждая такая вектор-функция есть решение задачи Коши с начальным условием в виде

$$\|g_{(k)}(0)\| = \| 0\ 0\ \dots\ 0\ 1\ 0\ \dots\ 0\ 0 \|^{\mathrm{T}},$$

где единица стоит в $k-$ой строке столбца – результата транспонирования.

Эти столбцы очевидно линейно независимые, значит, по теореме существования и единственности решения задачи Коши линейно независимыми будут и сами вектор-функции $\|g_{(k)}(t)\|\ \ \forall k = [1, n]$.

Но тогда $\|g_{(k)}(t)\|\ \ \forall k = [1, n]$ можно принять за базис в линейном пространстве частных решений однородной системы (3.1.1) и записать общее решение как

$$\| x(t) \| = \sum_{k=1}^{n} C_k \| g_{(k)}(t) \|,$$

или в матричной форме

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{array} \right\| = \|X(t)\| \left\| \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{array} \right\|,$$

где $C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_n$ – произвольные комплексные числа.

Откуда, использовав равенство $\|X(t)\| = e^{t\|A\|}$, получим утверждение теоремы.

`Теорема доказана.`

Иначе говоря, теорема 3.4.4 утверждает, что столбцами матрицы $e^{t\|A\|}$ являются решения задач Коши для однородной системы уравнений $\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\|$, начальные условия в которых суть столбцы единичной матрицы. Такие решения линейно независимые и образуют базис в $n$-мерном линейном пространстве частных решений этой системы уравнений, что очевидно позволяет находить и общее решение этой системы уравнений.