А. Е. Умнов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

08сен2020г

0.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения класса (1.1.1), имеющие вид

$$y' = f(x)g(y) \ , \tag{1.2.1}$$

где $f(x)$ и $g(y)$ непрерывны на промежутках X и Y соответственно, принято называть *уравнениями с разделяющимися переменными*. Эти уравнения всегда интегрируются в квадратурах.

Сначала выделим очевидный случай: если существуют, принадлежащие промежутку Y, числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ такие, что $g(\alpha_i) = 0$, то функции $y(x) \equiv \alpha_i, \forall i = [1, k]$ суть частные решения уравнения (1.2.1).

Если же $y \neq \alpha_i$ (то есть $g(y) \neq 0$), то уравнение (1.2.1) равносильно уравнению

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x) \quad \text{или} \quad G'_x(y(x)) = F'(x) \ ,$$

где $G'_x(y(x)) = \dfrac{y'(x)}{g(y(x))}$, а $F'(x) = f(x)$, то есть $G(y)$ и $F(x)$ суть *некоторые первообразные* функции $\dfrac{1}{g(y)}$ и $f(x)$ соответственно.

Известно, что если две дифференцируемые функции на некотором промежутке имеют равные производные, то эти функции могут отличаться только на константу. Поэтому справедливо равенство $G(y(x)) = F(x) + C \ \ \forall C$ или же, просто

$$G(y) = F(x) + C \ , \tag{1.2.2}$$

которое определяет другое семейство частных решений уравнения (1.2.1) и, изображающих их на плоскости Oxy, интегральных кривых.

Определение 1.2.1	Дифференциальное уравнение первого порядка (1.1.1), имеющее вид (или сводящееся к виду) $$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \ , \qquad (1.2.4)$$ называется *уравнением однородным по переменным x и y* .

Определение 1.3.1	Дифференциальное уравнение первого порядка, имеющее вид

$$y' + a(x)y = b(x)\ , \tag{1.3.1}$$

где $a(x)$ и $b(x)$ известные непрерывные при $x \in X$ функции, называется *линейным уравнением первого порядка.*

Другими словами, линейное дифференциальное уравнение первого порядка это уравнение, в которое $y'(x)$ и $y(x)$ входят линейно. Функции же $a(x)$ и $b(x)$, вообще говоря, могут быть и нелинейными.

Как и в курсе линейной алгебры, будем называть уравнение (1.3.1) *однородным*, если $b(x) \equiv 0$, иначе – *неоднородным*. При этом уравнение (1.3.1) можно записать в виде $y' = -a(x)y + b(x)$, откуда следует, что для него множество Ω есть полоса $\{\, x \in X,\ \forall y \,\}$, в которой выполнены условия теоремы Коши.

Отметим также, общность свойств уравнений вида (1.3.1) и алгебраических систем линейных уравнений существенно более глубокая. Этот вопрос будет нами детально рассмотрен в главе 2. Здесь же (в качестве упражнения) проверьте самостоятельно справедливость например утверждений:

– *сумма частного решения однородного уравнения и частного решения неоднородного есть частное решение неоднородного;*
– *разность двух частных решений неоднородного уравнения есть частное решение однородного;*
– *общее решение неоднородного уравнения есть сумма общего решения однородного и какого-нибудь частного решения неоднородного.*

Теперь убедимся, что линейное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, всегда интегрируется в квадратурах. Сначала найдем решение однородного уравнения $y' = -a(x)y$. Оно имеет очевидное частное решение $y(x) = 0$, а в случае $y(x) \neq 0$ равносильно уравнению $\dfrac{dy}{y} = -a(x)dx$, решение которого имеет вид: $\ln|y| = -\int\limits_{x_0}^{x} a(u)\,du + \ln\tilde{C}$, где $\tilde{C} > 0$, а x_0 – любое фиксированное число из промежутка X. Объединение этих двух случаев дает формулу частных решений однородного уравнения

$$y(x) = C\varphi(x)\,, \quad \text{где} \quad \varphi(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(u)\,du} \quad \forall\, C. \tag{1.3.2}$$

Теорема 1.3.1 **Формула (1.3.2) описывает** *общее* **решение однородного уравнения (1.3.1).**

Доказательство.

Мы убедились, что при любом фиксированном C функция $C\varphi(x)$ есть частное решение однородного уравнения. Покажем теперь, что любое частное решение этого уравнения представимо в виде $C\varphi(x)$.

Пусть $z(x)$ некоторое частное решение однородного уравнения (1.3.1). Поскольку $\varphi(x_0) = 1$, где x_0 – некоторая точка принадлежащая X, то функция $w(x) = z(x_0)\varphi(x)$ будет иметь в x_0 значение $z(x_0)$.

То есть функции $z(x)$ и $w(x)$ в x_0 имеют равные значения и потому являются решением задачи Коши для однородного уравнения с начальным условием $\{x_0;\ z(x_0)\}$, которое согласно теореме Коши существует и единственно на промежутке X. Откуда следует, что

$$z(x) = z(x_0)\varphi(x) = C_0\varphi(x) \quad \forall x \in X,$$

где $C_0 = z(x_0)$.

Теорема доказана.

Затем будем искать частное решение неоднородного уравнения (1.3.1), следуя рекомендации Жозефа Лагранжа, методом *вариации постоянной*, а именно в виде $\bar{y}(x) = C(x)\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – частное решение однородного уравнения, задаваемое формулой (1.3.2) при $C = 1$.

Подставляя $\bar{y}(x) = C(x)\varphi(x)$ в исходное уравнение (1.3.1), получаем

$$C'(x)\varphi(x) + C(x)\varphi'(x) = -a(x)C(x)\varphi(x) + b(x) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad C'(x)\varphi(x) + C(x)\Big(\varphi'(x) + a(x)\varphi(x)\Big) = b(x) \ .$$

Откуда следует $C'(x)\varphi(x) = b(x)$, поскольку $\varphi(x)$ – частное решение однородного уравнения, а значит $\varphi'(x) + a(x)\varphi(x) = 0$.

Теперь находим $C(x) = \int\limits_{x_1}^{x} \frac{b(v)}{\varphi(v)}\, dv$, где $x_1 \in X$, а затем и

$$\bar{y}(x) = C(x)\varphi(x) = \varphi(x) \int\limits_{x_1}^{x} \frac{b(v)}{\varphi(v)}\, dv\ .$$

Наконец, записываем общее решение неоднородного уравнения (1.3.1) как

$$y(x) = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(u)\, du} + \varphi(x) \int\limits_{x_1}^{x} \frac{b(v)}{\varphi(v)}\, dv$$

или

$$y(x) = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(u)\, du} + e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(u)\, du} \cdot \int\limits_{x_1}^{x} e^{\int\limits_{x_0}^{v} a(t)\, dt} b(v)\, dv\ . \qquad (1.3.3)$$

Достаточно помнить лишь правило:

> *общее решение неоднородного уравнения есть сумма общего решения однородного уравнения уравнения и какого-нибудь частного решения неоднородного,*

поскольку нами было показано, что общее решение однородного уравнения уравнения всегда находится в квадратурах разделением переменных, а частное решение неоднородного можно получить, например, методом Лагранжа (вариации постоянной).

При этом формула (1.3.3) заслуживает некоторого пояснения. Дело в том, что это выражение содержит три произвольные константы – C, x_0 и x_1, между которыми имеется существенная разница: C есть вещественный параметр, изменение значения которого в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ позволяет получить *все* частные решения уравнения (1.3.1). Значения же величин x_0 и x_1 произвольные (из промежутка X), но фиксированные. Их изменение допустимо, оно поменяет лишь вид формулы (1.3.3), но не изменит *общего решения* уравнения (1.3.1).

`Задача 1.3.1` Решить уравнение

$$y' + a(x)y = b(x)y^p \ , \qquad (1.3.4)$$

называемое *уравнением Бернулли.*

`Решение.` Заметим, что при $p = 0$ или при $p = 1$ уравнение (1.3.4) уже само по себе есть линейное, первого порядка. Кроме того, при $p > 0$ оно очевидно имеет тривиальное решение $y(x) = 0$.

Пусть $p \neq 0$, $p \neq 1$ и $y(x) \neq 0$, тогда исходное уравнение почленным делением на y^p сводится к равносильному уравнению

$$\frac{y'}{y^p} + a(x)\frac{1}{y^{p-1}} = b(x)\ .$$

Вводя новую неизвестную функцию $u(x) = y^{1-p}(x)$, в силу $u' = \dfrac{(1-p)y'}{y^p}$, получаем:

$$u' + (1-p)a(x)u = (1-p)b(x),$$

– уравнение первого порядка, линейное относительно функции $u(x)$.

Наконец отметим, что уравнение Бернулли также можно решать методом вариации постоянной. С практической точки зрения этот подход может оказаться даже более эффективным, чем метод замены переменной.

Решение получено.