А. Е. Умнов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Лекция 01. 01сен2020г

`Определение 0.1.1.`	*Дифференциальным уравнением* будем называть соотношение типа *равенство двух функций*, каждая часть которого может содержать независимые переменные, искомую функциональную зависимость и ее производные функции.

`Определение 0.1.2`	Если искомая зависимость, входящая в запись дифференциального уравнения, является функцией *одной* независимой переменной, то такое уравнение называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*. Если же искомая функция зависит от *нескольких* независимых переменных, то уравнение называется *уравнением в частных производных*.

Пусть искомая функция $y(x)$ зависит от одной переменной x, тогда дифференциальное уравнение, связывающее эту функцию с ее производными принято записывать в виде

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0\,, \qquad (0.1.3)$$

где F – известная непрерывная функция от $n+2$ переменных.

`Определение 0.1.3`	*Порядком дифференциального уравнения* называется порядок старшей производной от неизвестной функции $y(x)$.

В соответствии с этим определением уравнение (0.1.3) является обыкновенным дифференциальным уравнением порядка n. В дальнейшем, если не оговорено иное, термин *дифференциальное уравнение*> будет означать обыкновенное дифференциальное уравнение.

`Определение 0.1.4`	Функция $y(x)$ называется *частным решением* дифференциального уравнения (0.1.3), если – функция $y(x)$ имеет в своей области определения X непрерывные производные до n-го порядка включительно; – область определения и область значений функции $y(x)$ *согласуются* с множеством Ω – областью определения функции $F\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, x_{n+2}\right)$, то есть $$\|\; x \;\; y(x) \;\; y'(x) \;\; \ldots \;\; y^{(n)}(x) \;\|^{\mathrm{T}} \in \Omega \quad \forall x \in X\,;$$ – уравнение (0.1.3) превращается подстановкой $y(x)$ в *верное равенство.* Множество *всех* частных решений дифференциального уравнения называется его *общим решением.*

Изучение методов решения дифференциальных уравнений начнем с уравнений вида

$$y' = f(x, y), \tag{1.1.1}$$

являющегося частным случаем уравнения (0.1.3) при $n = 1$.

Определение 1.1.1	Функция $y(x)$ называется *частным решением* дифференциального уравнения (1.1.1), если – $f(x, y)$ непрерывна в своей области определения $\Omega \subseteq E^2$, – $y = y(x)$ непрерывно дифференцируемая в своей области определения $X \subseteq R$ функция, причем $\Vert\, x \;\; y(x) \,\Vert^{\mathrm{T}} \in \Omega \;\; \forall x \in X$, – $y'(x) = f\,(x, y(x)) \;\; \forall x \in X$.

График функции $y = y(x)$ можно рассматривать как геометрическое представление частного решения уравнения (1.1.1). Этот график обычно называют *интегральной кривой* так как график решения вполне может быть и прямой. Термин *линия*, видимо, был бы более уместен. уравнения (1.1.1).

Вместе с тем, может оказаться так, что например для уравнения $y' = e^{-x^2}$ каждое частное решение не выражается через элементарные функции, а представимо в виде

$$y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} e^{-u^2}\ du\ ,$$

то есть выражается через определенный интеграл с переменным верхним пределом.

Использование для записи решения дифференциального уравнения сочетания конечного числа операций над элементарными функциями и их суперпозиций с выражениями, содержащими определенные интегралы с переменным верхним пределом, принято называть *интегрированием в квадратурах.*

При этом отметим, что в общем случае и интегрирование в квадратурах может не давать описания частных решений уравнения (1.1.1). Жозеф Лиувилль показал, например, что уравнение $y' = y^2 + x$ в квадратурах не разрешимо.

Основные геометрические свойства решений определяет теорема, называемая *теоремой существования и единственности* решения задачи Коши вида

$$\text{найти частное решение уравнения } y' = f(x,y),$$

$$\text{для которого } \; y(x_0) = y_0 \;\text{ с }\; \{x_0, y_0\} \in \Omega\;, \tag{1.1.4}$$

`Теорема 1.1.1 (Коши)` **Пусть функции** $f(x,y)$ **и** $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ **непрерывны в области** Ω, **а** $X \subseteq R$ **– проекция** Ω **на ось** Ox, **тогда**

— $\forall x_0 \in X \; \exists \Delta > 0$ **такое, что решение задачи Коши (1.1.4) существует** $\forall x \in \mathrm{U}_\Delta(x_0)$

и

— **если** $y = y_1(x), \; x \in X_1$ **и** $y = y_2(x), \; x \in X_2$ **два решения задачи Коши (1.1.4), причем** $x_0 \in X_1 \cap X_2$, **то** $y_1(x) = y_2(x) \; \forall x \in X_1 \cap X_2$.

Из определения производной функции в точке следует, что

$$\mathrm{tg}\alpha = y' = f(x, y)$$

Поскольку $f(x, y)$ – функция, то интегральные кривые пересекаться не могут, а могут лишь, в крайнем случае, касаться друг друга.

Если же функция $f(x, y)$ достаточно гладкая, чтобы удовлетворить условиям теоремы 1.1.1, то невозможным оказывается и касание.

Графическое представление семейства изоклин на плоскости Oxy позволяет делать заключения о некоторых свойствах интегральных кривых и строить эскизы их графиков.