

Элементы операционного исчисления

Операционное исчисление или *метод Хевисайда* является одним из наиболее эффективных методов решения задачи Коши линейных дифференциальных уравнений (и систем уравнений) с постоянными коэффициентами. Приведем его краткое описание.¹

Определение
3.5.1

Оригиналом называется функция $f(t)$ такая, что

1°. $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$ и она непрерывна при $t \geq 0$, за исключением, быть может, конечного числа точек;

2°. Для каждой $f(t)$ существуют константы M и μ такие, что $|f(t)| \leq Me^{\mu t}$ при $t \geq 0$.

Функция $F(p)$ (зависящая от комплексной переменной p) вида

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (3.5.1)$$

называется *изображением* функции $f(t)$ или же *преобразованием Лапласа функции* $f(t)$, что кратко записывается как $f(t) \doteq F(p)$.

¹Строгое и полное описание этого метода можно найти, например, в [?].

Сформулируем основные свойства преобразования Лапласа в виде следующего набора утверждений.

Лемма 3.5.1 **В условиях определения 3.5.1 несобственный интеграл (3.5.1) очевидно сходится в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} p > \mu$.**

Доказательство.

Справедливость утверждения леммы вытекает из следующей оценки. При $\mu - \operatorname{Re} p < 0$ имеем

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-p t} f(t) dt \right| \leq M \int_0^{+\infty} e^{(\mu - \operatorname{Re} p)t} dt < +\infty .$$

Лемма доказана.

Лемма 3.5.2 **Несобственный интеграл (3.5.1) является в области своего существования бесконечно дифференцируемой функцией.**

Теорема **Преобразование Лапласа линейно.**
3.5.1

Доказательство.

Пусть $f(t) \doteq F(p)$ и $g(t) \doteq G(p)$, а α и β – постоянные, тогда, в силу линейности операции интегрирования,

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \doteq \alpha F(p) + \beta G(p) .$$

Теорема доказана.

Теорема 3.5.2 Пусть $f^{(m)}(t) \forall m = 0, 1, 2, \dots, k$ — оригиналы, тогда

$$f^{(k)}(t) \doteq p^k F(p) - p^{k-1} f(+0) - \dots - p f^{(k-2)}(+0) - f^{(k-1)}(+0).$$

Доказательство.

Пусть $k = 1$, тогда, интегрируя по частям и используя определения 3.5.1 и 3.5.2, получаем

$$\begin{aligned} f'(t) &\doteq \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t) dt = \\ &= e^{-pt} f(t) \Big|_{+0}^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = pF(p) - f(+0). \end{aligned}$$

Применим индукцию. Пусть доказываемая формула верна для $k = m$. Покажем, что тогда она будет верна и для $k = m + 1$. Действительно, пусть $g(t) = f^{(m)}(t)$, тогда

$$\begin{aligned} f^{(m+1)}(t) = g'(t) &\doteq pG(p) - g(+0) = \\ &= p \left(p^m F(p) - p^{m-1} f(+0) - \dots - f^{(m-1)}(+0) \right) - f^{(m)}(+0). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Из определения 3.5.2 следует, что изображение для каждого оригинала существует и единственно. При этом естественно возникает вопрос: всегда ли по изображению можно восстановить оригинал? Ответ на этот вопрос дает доказываемая в курсе ТФКП

Теорема 3.5.4 **Оригинал по изображению восстанавливается единственным образом, с точностью до значений в точках разрывов, и определяется формулой**

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{w \rightarrow +\infty} \int_{c-iw}^{c+iw} e^{tp} F(p) dp. \quad (3.5.2)$$

В формуле (3.5.2) интеграл берется на комплексной плоскости по любой прямой $\operatorname{Re} z = c > \mu$.

Рассмотрим теперь применение операционного исчисления для решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = b(t) \quad (3.5.3)$$

(или $L(\widehat{D})y(t) = b(t)$) с комплексными постоянными коэффициентами в случае, когда $b(t)$ есть квазимногочлен при $t \geq 0$. Начальные условия будем считать известными

$$y(+0) = C_1, y'(+0) = C_2, y''(+0) = C_3, \dots, y^{(n-1)}(+0) = C_n. \quad (3.5.4)$$

Согласно теоремам 2.5.1 и 2.5.2, $y(t)$ – каждое решение этого уравнения для неотрицательных t – также есть квазимногочлен. Доопределим значения функций $b(t)$ и $y(t)$ тождественными нулями при $t < 0$. Тогда эти функции являются некоторыми оригиналами, поскольку пункт 2° определения 3.5.1 выполняется для квазимногочленов очевидным образом.

Пусть $b(t) \doteq B(p)$ и $y(t) \doteq Y(p)$. Применяя преобразование Лапласа (в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} p > \mu$, то есть в которой оно существует) к обеим частям уравнения (3.5.3) и учитывая условия (3.5.3), в силу теоремы 3.5.2 получаем

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) Y(p) - H(p) = B(p)$$

$$\text{или} \quad L(p)Y(p) - H(p) = B(p), \quad (3.5.5)$$

где $H(p) = p^{n-1}C_1 + p^{n-2}C_2 + \dots + pC_{n-1} + C_n +$

$$+ a_1 (p^{n-2}C_1 + p^{n-3}C_2 + \dots + pC_{n-2} + C_{n-1}) + \dots + a_{n-1}C_1.$$

Уравнение (3.5.5) относительно $Y(p)$ линейное и алгебраическое. Его решение при $\operatorname{Re} p > \mu$ есть

$$Y(p) = \frac{B(p) + H(p)}{L(p)}.$$

Хотя оригинал $y(t)$ по найденному изображению $Y(p)$ можно получить при помощи формулы (3.5.2), удобнее поступить иначе: воспользоваться взаимной однозначностью связи оригиналов и отображений, допускающей «подбор» решений при помощи таблицы 3.5.1, основой которой служит

Лемма 3.5.3 **Для каждого целого неотрицательного k справедливо равенство**

$$t^k e^{\lambda t} \equiv \int_0^{+\infty} e^{-(p-\lambda)t} t^k dt = \frac{k!}{(p-\lambda)^{k+1}}.$$

Доказательство.

Интегрируя изображение последовательно k раз по частям, получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} e^{-(p-\lambda)t} t^k dt = \\ & = \frac{e^{(\lambda-p)t}}{\lambda-p} t^k \Big|_0^{+\infty} + \frac{k}{p-\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-(p-\lambda)t} t^{k-1} dt = \\ & = \frac{k}{p-\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-(p-\lambda)t} t^{k-1} dt = \dots = \frac{k!}{(p-\lambda)^{k+1}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Содержимое таблицы 3.5.1 получается из формулы, полученной в лемме 3.5.3, и формулы Эйлера $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$. Функция $Y(p)$ дробно-рациональная и всегда может быть разложена на простейшие дроби, подобные представленным в таблице 3.5.1.

Наконец, линейность преобразования Лапласа и взаимная однозначность сопоставления оригинала и изображения позволяют находить решение как уравнения (3.5.3) для любого квазимогочлена $b(t)$, (равно как и для некоторых других элементарных функций) так и системы линейных дифференциальных уравнений.

Таблица 3.5.1

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
$t^k e^{\lambda t},$ $k=0,1,2,\dots$	$\frac{k!}{(p-\lambda)^{k+1}}$	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$\operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	$e^{\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$
$\frac{\sin t}{t}$	$\operatorname{arcctg} p$	$e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$

Заметим также, что в случае, когда начальные условия не заданы, операционный метод дает *общее решение* уравнения (3.5.3), выраженное через n произвольных комплексных констант C_1, C_2, \dots, C_n .

Следующие примеры демонстрируют практическую эффективность операционного метода.

Задача Решить задачу Коши

3.5.1

$$x'' + \omega_0^2 x = A \cos \omega t ,$$

$$\text{при } x(0) = x'(0) = 0 ,$$

где $\omega_0 > 0$, $\omega > 0$ и $A \neq 0$ – некоторые константы.

Решение. Пусть $x(t) \doteq X(p)$. Воспользовавшись таблицей 3.5.1 и приравняв изображения от обеих частей данного уравнения, получим

$$(p^2 + \omega_0^2) X(p) = \frac{Ap}{p^2 + \omega^2} .$$

$$\text{Откуда } X(p) = \frac{Ap}{(p^2 + \omega_0^2)(p^2 + \omega^2)} .$$

Если $\omega \neq \omega_0$ (то есть, если мы имеем *нерезонансный* случай), то, разложив найденное изображение на простейшие дроби

$$X(p) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(\frac{p}{p^2 + \omega^2} - \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} \right) ,$$

из таблицы 3.5.1 получаем

$$x(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) .$$

Если же $\omega = \omega_0$ (*резонансный* случай), то

$$X(p) = \frac{Ap}{(p^2 + \omega_0^2)^2},$$

и, опять-таки по таблице 3.5.1, находим, что

Решение
получено .

$$x(t) = \frac{A}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t .$$

Задача Решить задачу Коши для системы линейных уравнений
3.5.2

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 2e^{-t}, \\ \dot{y} = 3x + 4y + e^{-t} \end{cases}$$

при $x(0) = y(0) = -1$.

Решение. Пусть $x(t) \doteq X(p)$ и $y(t) \doteq Y(p)$. Поскольку собственные числа основной матрицы системы $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$, то изображения неизвестных будут существовать (покажите это самостоятельно!) в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} p > 2 = \max\{-1, 1, 2\}$.

Применив преобразование Лапласа к обеим частям каждого уравнения системы, получим

$$\begin{cases} pX - (-1) = -X - 2Y + \frac{2}{p+1}, \\ pY - (-1) = 3X + 4Y + \frac{1}{p+1}. \end{cases}$$

Следовательно, для изображений неизвестных мы имеем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} (p+1)X + 2Y = -\frac{p-1}{p+1}, \\ -3X + (p-4)Y = -\frac{p}{p+1}, \end{cases}$$

решения которой легко находятся и имеют вид

$$\begin{cases} X(p) = \frac{-p^2 + 7p - 4}{(p+1)(p^2 - 3p + 2)}, \\ Y(p) = \frac{-p^2 - 4p + 3}{(p+1)(p^2 - 3p + 2)}. \end{cases}$$

Разложение этих изображений на простейшие дроби дает

$$\begin{cases} X(p) = -\frac{2}{p+1} - \frac{1}{p-1} + \frac{2}{p-2}, \\ Y(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p-1} - \frac{3}{p-2}. \end{cases}$$

Наконец, используя линейность преобразования Лапласа и таблицу 3.5.1, по полученным изображениям восстанавливаем оригиналы искомых функций, которые являются решением задачи Коши

Решение
получено.

$$\begin{cases} x(t) = -2e^{-t} - e^t + 2e^{2t}, \\ y(t) = e^{-t} + e^t - 3e^{2t}. \end{cases}$$