

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДУ
С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

Пример 01. Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = -4x + y \end{cases}$ методом исключения.

Решение: 1) Имеем из первого уравнения $y = x - \dot{x}$. Откуда $\dot{y} = \dot{x} - \ddot{x}$.

Тогда из второго уравнения $\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 0$.

2) Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$.
Откуда $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$.

3) Подставляя в это в первое уравнение, получаем
 $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} - (-C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{3t}) = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t}$.

4) Итог в матричном виде будет $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{3t}$.

Пример 02. Решить систему $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = -4x + y \end{cases}$ методом построения базиса в ЛПЧР.

Решение: 1) Матрица системы $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, поэтому из $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$ получаем
 $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$.

2) Находим собственные векторы:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

3) Откуда, окончательно, $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{3t}$.

Для того, чтобы из собственных векторов линейного преобразования можно было построить базис, нужно, чтобы для каждого корня характеристического уравнения кратности k имелось k линейно независимых собственных векторов. Но это имеет место не всегда: известно (из курса ЛА), что m - максимальное число таких векторов - находится в диапазоне $1 \leq m \leq k$. На следующих примерах убедимся, что какое бывает.

Сначала рассмотрим тривиальную задачу.

Пример 03. Решить систему
$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = 0, \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$
 методом построения базиса в ЛПЧР.

Решение: 1) Матрица системы $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, поэтому из $\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$

получаем $\lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda_{123} = 0, k = 3$.

2) Очевидно, что линейно независимые собственные векторы для \hat{A} суть

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и, кроме того, } e^{\lambda t} = e^{0t} = 1,$$

3) Откуда, получим окончательно, что

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall C_1, C_2, C_3.$$

Рассмотрим теперь задачи посложнее.

Задача Найти общее решение системы линейных уравнений
3.1.1

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = & x_2(t) + x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) & - x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t) - x_2(t). \end{cases}$$

Решение. Найдем собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, задаваемого в U^3 матрицей

$$\|\widehat{A}\| = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right\| ,$$

являющейся матрицей данной системы дифференциальных уравнений.

Собственные значения являются корнями характеристического уравнения

$$\det \left\| \begin{array}{ccc} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{array} \right\| = 0 \implies \lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0 .$$

Или $(\lambda+2)(\lambda-1)^2 = 0$, откуда $\lambda_1 = -2, \lambda_{2,3} = 1$.

Пусть собственные векторы имеют координатные представления $\|f\| = \|\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3\|^T$. Каждый собственный вектор находится из системы линейных уравнений

$$\|\widehat{A} - \lambda\widehat{E}\| \|f\| = \|o\|.$$

Для собственного значения $\lambda_1 = -2$ имеем

$$\left\| \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| \implies \begin{cases} 2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0, \\ \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 = 0, \end{cases}$$

что дает $\|f_{(1)}\| = \|-1 \ 1 \ 1\|^T$.

Для собственного значения $\lambda_{2,3} = 1$, у которого кратность 2, получаем

$$\left\| \begin{array}{ccc} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| \implies \xi_1 - \xi_2 - \xi_3 = 0.$$

Откуда $\|f_{(2)}\| = \|1 \ 1 \ 0\|^T$ и $\|f_{(3)}\| = \|1 \ 0 \ 1\|^T$.

Легко убедиться, что все три собственных вектора линейно независимы и образуют базис в U^3 . Тогда, согласно теореме 3.1.3, общее решение исходной системы может быть записано в виде

$$\left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{array} \right\| = C_1 \left\| \begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\| e^{-2t} + C_2 \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right\| e^t + C_3 \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\| e^t,$$

Решение

получено. где C_1 , C_2 и C_3 – произвольные комплексные числа.

Если матрица исходной системы уравнений вещественна, то из общего комплексного решения можно выделить вещественные решения. В этом случае невещественные корни характеристического уравнения попарно комплексно сопряжены. Комплексно сопряженными при этом окажутся и соответствующие пары решений, входящие в базис. Каждую такую пару следует заменить двумя вектор-функциями, являющимися вещественной и мнимой частью одной из вектор-функций исходной пары.

Задача 3.1.2 Найти общее вещественное решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) - x_2(t) - x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t), \\ \dot{x}_3(t) = 3x_1(t) + x_3(t). \end{cases}$$

Решение. Найдем собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, задаваемого в U^3 матрицей

$$\|\widehat{A}\| = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Собственные значения являются корнями характеристического уравнения

$$\det \left\| \begin{array}{ccc} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{array} \right\| = 0 \implies (1-\lambda)^3 + 4(1-\lambda) = 0.$$

Или $(\lambda-1)((\lambda-1)^2 + 4) = 0$, откуда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$.

Пусть собственные векторы имеют координатные представления $\|f\| = \|\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3\|^T$. Тогда каждый собственный вектор находится из системы линейных уравнений $\|\widehat{A} - \lambda\widehat{E}\| \|f\| = \|o\|$.

Для собственного значения $\lambda_1 = 1$ имеем

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\| \implies \begin{cases} \xi_2 + \xi_3 = 0, \\ \xi_1 = 0, \end{cases}$$

что дает $\|f_{(1)}\| = \|0 \ 1 \ -1\|^T$.

Для $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2i$ достаточно найти лишь один собственный вектор, например для $\lambda_2 = 1 + 2i$, поскольку другой должен быть ему комплексно сопряженным.

Имеем

$$\begin{vmatrix} -2i & -1 & -1 \\ 1 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & -2i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \implies \begin{cases} \xi_1 - 2i\xi_2 = 0. \\ 3\xi_1 - 2i\xi_3 = 0. \end{cases}$$

Откуда $\|f_{(2)}\| = \|2i \ 1 \ 3\|^T$ и $\|f_{(3)}\| = \|-2i \ 1 \ 3\|^T$

Все три собственных вектора линейно независимы (поскольку собственные значения попарно различны) и образуют базис в U^3 . Согласно теореме 3.1.3, общее решение исходной системы может быть записано в виде

$$\begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{vmatrix} = C_1 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} e^t + \\ + C_2 \begin{vmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix} e^{(1+2i)t} + C_3 \begin{vmatrix} -2i \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix} e^{(1-2i)t},$$

где C_1 , C_2 и C_3 – произвольные комплексные постоянные.

Пусть $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{(1+2i)t} = \operatorname{Re} \Phi(t) + i \operatorname{Im} \Phi(t)$. Найдём $\operatorname{Re} \Phi(t)$ и $\operatorname{Im} \Phi(t)$. Используя правила действий с матрицами и формулу Эйлера, получим

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^t (\cos 2t + i \sin 2t) = \\ &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^t \cos 2t - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \sin 2t \right) + \\ &+ i \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^t \sin 2t + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \cos 2t \right). \end{aligned}$$

Или, сгруппировав подобные члены, найдем

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -2 \sin 2t \\ \cos 2t \\ 3 \cos 2t \end{pmatrix} e^t + i \begin{pmatrix} 2 \cos 2t \\ \sin 2t \\ 3 \sin 2t \end{pmatrix} e^t,$$

что дает

$$\operatorname{Re}\Phi(t) = \begin{pmatrix} -2 \sin 2t \\ \cos 2t \\ 3 \cos 2t \end{pmatrix} e^t \quad \text{и} \quad \operatorname{Im}\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos 2t \\ \sin 2t \\ 3 \sin 2t \end{pmatrix} e^t.$$

Теперь общее вещественное решение может быть записано в виде

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = R_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + R_2 \begin{pmatrix} -2 \sin 2t \\ \cos 2t \\ 3 \cos 2t \end{pmatrix} e^t + R_3 \begin{pmatrix} 2 \cos 2t \\ \sin 2t \\ 3 \sin 2t \end{pmatrix} e^t,$$

Решение где R_1 , R_2 и R_3 – произвольные вещественные постоянные. получено.