Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим теперь случай неоднородных линейных дифференциальных уравнений следующего вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x) \ , \tag{2.5.1}$$

предполагая, что общее решение соответствующего однородного уравнения уже найдено.

Заметьте, что здесь уравнение *приведенное*, т.е. $a_0 = 1$.

Согласно следствию 2.1.2 для построения общего решения неоднородного уравнения (2.5.1) достаточно найти какое-нибудь его частное решение.

Мы воспользуемся методом *вариации постоянных* (методом Лагранжа), основой которого является

Теорема 2.5.1 **Пусть общее решение** *однородного* **уравнения (2.5.1) имеет вид**

$$y(x) = C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x) + \cdots + C_n g_n(x) \ ,$$

где функции $\{g_1(x),\ g_2(x),\ \ldots\ g_n(x)\}$ **образуют базис в пространстве частных решений однородного уравнения. Тогда** *неоднородное* **уравнение (2.5.1) имеет решение вида**

$$y^*(x) = C_1(x) g_1(x) + C_2(x) g_2(x) + \cdots + C_n(x) g_n(x) \ ,$$

где непрерывно дифференцируемые функции $\{C_1(x),\ C_2(x),\ \ldots\ C_n(x)\}$ **находятся из системы линейных уравнений:**

$$\begin{cases} C_1'(x) g_1(x) + C_2'(x) g_2(x) + \cdots + C_n'(x) g_n(x) \ = \ 0 \ , \\ C_1'(x) g_1'(x) + C_2'(x) g_2'(x) + \cdots + C_n'(x) g_n'(x) \ = \ 0 \ , \\ C_1'(x) g_1''(x) + C_2'(x) g_2''(x) + \cdots + C_n'(x) g_n''(x) \ = \ 0 \ , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1'(x) g_1^{(n-1)}(x) \ + \ \ldots \ + \ C_n'(x) g_n^{(n-1)}(x) \ = \ b(x) \ . \end{cases}$$

Теорема 2.5.2 **Пусть $b(x)$ квазимногочлен вида $P_m(x)e^{\mu x}$, где $P_m(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_mx^m$, а $y^*(x)$ – некоторое частное решение неоднородного уравнения (2.5.1). Тогда найдется алгебраический многочлен $Q_m(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_mx^m$, такой, что**

- **$y^*(x) = Q_m(x)e^{\mu x}$, если μ не является корнем характеристического многочлена уравнения (2.5.1), (так называемый** *нерезонансный* **случай);**
- **либо $y^*(x) = x^kQ_m(x)e^{\mu x}$, если μ корень характеристического многочлена уравнения (2.5.1) кратности k (***резонансный* **случай).**

`Следствие 2.5.2` **Пусть коэффициенты уравнения (2.5.1) вещественны, а** $b(x) = e^{\alpha x}\left(A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x\right)$**, где**

α, β – **вещественные числа,** $A(x)$ **и** $B(x)$ – **вещественные многочлены, один из которых степени** m**, а второй степени не выше, чем** m. **Тогда уравнение (2.5.1) имеет частное решение вида**

- $y^*(x) = e^{\alpha x}\left(C(x)\cos\beta x + D(x)\sin\beta x\right)$, **если** $\alpha + i\beta$ **не является корнем характеристического многочлена уравнения (2.5.1) (***нерезонансный* **случай);**
- **либо** $y^*(x) = x^k e^{\alpha x}\left(C(x)\cos\beta x + D(x)\sin\beta x\right)$, **если** $\alpha + i\beta$ – **корень характеристического многочлена для уравнения (2.5.1) кратности** k **(***резонансный* **случай).**

Функции $C(x)$ **и** $D(x)$ – **вещественные алгебраические многочлены степени** m.

Существуют некоторые классы линейных уравнений с переменными коэффициентами, которые специальной заменой переменных сводятся к уравнениям с постоянными коэффициентами. Характерным примером такого класса может служить *уравнение Эйлера n−го порядка*, имеющего вид:

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ \dots \ + a_{n-1} x y' + a_n y = 0 \ ,$$

где a_k – некоторые константы.

Проверьте самостоятельно, что это уравнение сводится к уравнению с постоянными коэффициентами при замене $x = e^t$, причем будут иметь место равенства: $y(x) = y\left(e^t\right) = u(t)$,

$$\begin{array}{rcl} xy' & = & \dot{u}\,, \\ x^2 y'' & = & \ddot{u} - \dot{u}\,, \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^n y^{('n)} & = & u^{(\cdot n)} + \mu_{n,n-1} u^{(\cdot (n-1))} + \ \dots \ + \mu_{n,2}\ddot{u} + \mu_{n,1}\dot{u}\,, \end{array}$$

где μ_{pq} – постоянные коэффициенты, находимые в процессе последовательного дифференцирования функции $y(x)$.

Заметьте, что здесь штриховой символ обозначает дифференцирование по x, а верхняя точка – дифференцирование по t.

Пример 1. Решить уравнение $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$.

Решение: 1) $y_0(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$ - общее решение однородного.

2) Частное решение неоднородного ищем в виде $y^*(x)=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$.

3) Функции и находим из системы линейных уравнений

$$\begin{Vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}C_1'\\ C_2'\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0\\ \dfrac{1}{\sin x}\end{Vmatrix}.$$

4) Ее решение (некоторое) $\begin{matrix}C_1'=-1\\ C_2'=\dfrac{\cos x}{\sin x}\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{matrix}C_1=-x\\ C_2=\ln|\sin x|\end{matrix}$

Откуда $y^*(x)=-x\cos x+(\ln|\sin x|)\sin x$.

5) Окончательно $y_0(x)=C_1\cos x+C_2\sin x-x\cos x+(\ln|\sin x|)\sin x$.

Пример 2. Найти вещественные решения уравнения $y''-3y'+2y=\sin x$.

Решение: 1) Характеристическое уравнение $\lambda^2-3\lambda+2=0$, его корни $\lambda_1=1, \lambda_2=2$. Общее решение однородного уравнения $y_0(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

2) Заменив $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, получаем, что $\mu=\pm i$, т.е. резонанса нет. Частное решение неоднородного ищем в виде $y^*(x)=A\cos x+B\sin x$.

3). Используем *дополнительные* обозначения:

$$\begin{cases}P=A\cos x+B\sin x\\ Q=-A\sin x+B\cos x\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}y^*{}'=Q\\ y^*{}''=-P\end{cases}\Rightarrow$$

$$-P-3Q+2P=0\quad\Rightarrow\quad P-3Q=\sin x$$

или $\quad A\cos x+B\sin x-3(-A\sin x+B\cos x)=\sin x\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}A-3B=0\\ 3A+B=1\end{cases}.$

Это дает $A=\dfrac{3}{10}, B=\dfrac{1}{10}$.

Ответ: $y(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}+\dfrac{1}{10}(3\cos x+\sin x)$.

Пример 3. Решить уравнение $y''-4y'+8y=e^{2x}+\sin 2x.$

Решение: 1) Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$, его корни $\lambda_{12} = 2 \pm 2i$. Общее решение однородного уравнения $y_0(x) = C_1 e^{2x}\cos 2x + C_2 e^{2x}\sin 2x$.

2) Заменив $\sin 2x = \dfrac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i}$, получаем, что $\mu_1 = 2$ и $\mu_2 = \pm 2i$, т.е. резонанса нет. Частные решения неоднородного ищем в виде $y_1^*(x) = De^{2x}$ и $y_2^*(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$. Эти неоднородности будем искать независимо друг от друга.

3) Для первой неоднородности имеем $D(4-8+8)e^{2x} = e^{2x} \Rightarrow D = \dfrac{1}{4}$. Т.е. $y_1^*(x) = \dfrac{1}{4}e^{2x}$.

4). При поиске второй неоднородности используем *дополнительные* обозначения:

$$\begin{cases} P = A\cos x + B\sin x \\ Q = -A\sin x + B\cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^{*}{}' = 2Q \\ y^{*}{}'' = -4P \end{cases} \Rightarrow$$

$$-4P - 8Q + 8P = 0 \quad \Rightarrow \quad 4P - 8Q = \sin 2x$$

или $\quad 4A\cos 2x + 4B\sin 2x - 8(-A\sin 2x + B\cos 2x) = \sin 2x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 4A - 8B = 0 \\ 8A + 4B = 1 \end{cases}$.

Откуда $A = \dfrac{1}{10}$, $B = \dfrac{1}{20}$.

Ответ: $y(x) = C_1 e^{2x}\cos 2x + C_2 e^{2x}\sin 2x + \dfrac{1}{4}e^{2x} + \dfrac{1}{20}(2\cos 2x + \sin 2x)$.

Пример 4. Решить уравнение $y'' + y' - 2y = 3xe^x$.

Решение: 1) Характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, его корни $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = 1$. Общее решение однородного уравнения $y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

2) Здесь есть *резонансный* случай, поскольку $\mu = 1$. Так как кратность резонирующего корня равна единице, то частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y^*(x) = x(Ax + B)e^x$.

Для удобства вычислений обозначим $D = x(Ax + B)$. Тогда по формуле

$$y^*(x) = De^x$$

Лейбница получим: $y^{*}{}'(x) = D'e^x + De^x$

$$y^{*}{}''(x) = D''e^x + 2D'e^x + De^x$$

Подстановка этих соотношений в исходное неоднородное уравнение дает $(D''e^x + 2D'e^x + De^x) + (D'e^x + De^x) - 2(De^x) = 3xe^x$ или $D''+3D' = 3x$.

Но, поскольку $D' = 2Ax + B, \quad D'' = 2A$, то $2A + 3(2Ax + B) = 3x$ и, приравнивая коэффициенты при равных степенях x в правой и левой частях последнего рапвенства, получаем $\begin{cases} 6A = 3 \\ 2A + 3B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{3}.$

Ответ: $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + (\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3})e^x$.

Пример **5 :** Решить уравнение: $x^3 y'' - 2xy = 6\ln x$.

Решение:

1) Имеем $x > 0$, поэтому данное уравнение равносильно уравнению $x^2 y'' - 2y = 6\frac{\ln x}{x}$.

2) Делаем замену: $x = e^t$, то есть $t = \ln x$. При этом имеем $\begin{cases} x = e^t, \\ y(x) = y(e^t) \end{cases}$ и $t_x' = \frac{1}{x}$.

3) Выразим производные y'_x и y''_{xx} через производные y'_t и y''_{tt}.

Имеем: $y_x' = y_t' t_x' = \frac{y_t'}{x}$.

Аналогично:

$$y_{xx}'' = (y_x')_x' = \left(\frac{y_t'}{x}\right)_x' = .\frac{(y_t')_x' \cdot x - y_t'}{x^2} = \frac{y_{tt}'' \cdot \frac{1}{x} \cdot x - y_t'}{x^2} = \frac{y_{tt}'' - y_t'}{x^2}.$$

5) Тогда уравнение $x^2 y'' - 2y = 6\frac{\ln x}{x}$ примет вид $x^2 \frac{y_{tt}'' - y_t'}{x^2} - 2y = 6te^{-t}$ или $y_{tt}'' - y_t' - 2y = 6te^{-t}$.

6) Общее решение однородного находится при помощи характеристического уравнения $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ и имеет вид: $y_0(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$.

7) Частное решение (поскольку есть резонанс) ищется в виде $y^8(t) = t(\alpha t + \beta)e^{-t}$ и оказывается равным $y^*(t) = (-t^2 - \frac{2}{3}t)e^{-t}$.

8) Возвращаясь к независимой переменной x, получаем общее решение исходного уравнения $y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2 x^2 - \frac{1}{x}\left(\ln^2 x + \frac{2}{3}\ln x\right)$.