Линейные уравнения в частных производных первого порядка

До сих пор в нашем курсе рассматривались дифференциальные уравнения (системы уравнений), в которых неизвестными являлись функции (вектор-функции) от одной независимой переменной.

Однако в приложениях достаточно часто возникают дифференциальные уравнения, неизвестные в которых являются функциями от нескольких переменных.

При этом, если такие уравнения содержат частные производные от неизвестных порядка не выше первого, то (как будет показано ниже) их решения сводятся к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений и потому традиционно изучаются в курсах, аналогичному нашему.

Пусть в некоторой области $G \subseteq E^{2n+1}, \ n \geq 2$ определена действительная непрерывно дифференцируемая функция

$$F(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, u,\, p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_n)$$

такая, что в каждой допустимой точке $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{\partial F}{\partial p_k} \right)^2 \neq 0\,.$

Тогда можно дать

`Определение 6.5.1`	Уравнение вида $$F\left(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, u,\, \frac{\partial u}{\partial x_1},\, \frac{\partial u}{\partial x_2},\, \ldots,\, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \qquad (6.5.1)$$ называется *уравнением в частных производных первого порядка* относительно неизвестной функции $u = u(x), \ x \in \Omega \subseteq E^n$, где $$\|x\| = \|x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n\|^{\mathrm{T}}.$$

Определение 6.5.2

Функция $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *решением* уравнения (6.5.1), если

1°. $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – непрерывно дифференцируемая функция в Ω.

2°. $\forall x \in \Omega$ точка

$$\left\| x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\|^{\mathrm{T}} \in G\,.$$

3°. $\forall x \in \Omega$

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \equiv 0\,.$$

Приступим теперь к рассмотрению методов решения уравнений (6.5.1) на примере решения линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка вида:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)\frac{\partial u(x)}{\partial x_k} = 0\,, \tag{6.5.2}$$

где $A_k(x)\ \ \forall k = [1, n]$ – известные непрерывно дифференцируемые в Ω функции такие, что $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k^2(x) \neq 0\ \ \forall\, x \in \Omega\,.$

Введем в рассмотрение вектор-функцию $A(x)$

$$\| A(x)\| = \| A_1(x_1, \ldots, x_n)\, A_2(x_1, \ldots, x_n)\; \ldots\; A_n(x_1, \ldots, x_n)\, \|^{\mathrm{T}}.$$

Тогда уравнение (6.5.2) можно записать в неразвернутом матричном виде как

$$\| A(x)\|^{\mathrm{T}} \| \operatorname{grad} u(x)\| = 0\,.$$

`Определение 6.5.3`	Автономная система $$\| \dot{x}(t)\| = \| A(x)\| \qquad (6.5.3)$$ называется *характеристической системой* для уравнения (6.5.2), а ее фазовые траектории – *характеристиками* этого уравнения.

Связь между решением уравнения (6.5.2) и решением его характеристической системы (6.5.3) описывает

Теорема 6.5.1 **В некоторой окрестности каждой неособой точки $x_0 \in \Omega$ общее решение уравнения (6.5.2) имеет вид**

$$u(x) = \Phi\left(u_{(1)}(x),\, u_{(2)}(x),\, \ldots,\, u_{(n-1)}(x) \right) \,,$$

где $u_{(k)}(x), k = [1, n-1]$ – функционально независимые в x_0 первые интегралы системы (6.5.3), а $\Phi\,(\,\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots,\, \xi_{n-1})$ любая непрерывно дифференцируемая функция от $n-1$ переменной.

Таким образом можно заключить, что общее решение однородного уравнения в частных производных первого порядка содержит в своей записи произвольную, непрерывно дифференцируемую функцию, зависящую от $n-1$ переменной, в то время как, например, общее решение векторного обыкновенного дифференциального уравнения $\dot{x} = F(t, x)$ выражается через n произвольных постоянных.

Для неоднородного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка правило записи общего решения полностью аналогично случаю обыкновенных дифференциальных уравнений: общее решение неоднородного уравнения есть общее решение однородного, сложенного с частным (любым!) решением неоднородного.

Заметим также, что для решения уравнения вида

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, u)\frac{\partial u}{\partial x_k} = b(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, u)\,.$$

можно применить алгоритм решения уравнения (6.5.2), если принять за неизвестную функцию

$$v(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, u) = u(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) - u\,,$$

увеличив размерность задачи на единицу и записав уравнение в виде

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, u)\frac{\partial v}{\partial x_k} + b(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, u)\frac{\partial v}{\partial u} = 0\,.$$

Поскольку в этом случае $\dfrac{\partial v}{\partial u} = -1\,.$

Выделение конкретного частного решения из общего для уравнений в частных производных осуществляется путем задания дополнительных условий: начальных, краевых, смешанных и т. д.

Рассмотрим в качестве примера *задачу Коши* для уравнения (6.5.2).

Пусть непрерывно дифференцируемая функция $s(x)$, $x \in \Omega \subseteq E^n$ такова, что $\operatorname{grad} s(x) \neq o \ \ \forall\, x \in \Omega$. Тогда уравнение $s(x) = 0$ задает в Ω гладкую гиперповерхность γ, называемую *начальной поверхностью.* И пусть на этой начальной поверхности задана непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x)$. Теперь мы можем дать

Определение 6.5.4	*Задачей Коши* называется задача отыскания $u(x)$ – такого решения уравнения $$\| A(x)\|^{\mathrm{T}} \| \operatorname{grad} u(x)\| = 0\,, \qquad (6.5.4)$$ для которого $u(x)\Big\vert_{x\in\gamma} = \varphi(x)$.

Задача Коши для линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка, в отличие от случая обыкновенных линейных уравнений первого порядка, обладает следующими особенностями.

Во-первых, ее решение существует и единственно не для любой гладкой начальной поверхности γ.

Во-вторых, ее разрешимость имеет локальный характер.

Для уточнения условий однозначной разрешимости задачи Коши дадим

Определение 6.5.5	*Характеристической точкой задачи Коши вида* (6.5.4) называется точка $x_0 \in \gamma$ такая, что $$\dot{s}(x_0) = \|\, A(x_0)\|^{\mathrm{T}} \|\,\mathrm{grad}\, s(x_0)\| = 0\,.$$

Сравнение определений 6.5.4 и 6.5.5 дает следующую геометрическую интерпретацию:

в характеристической точке вектор $A(x_0)$ касается поверхности γ.

При этом оказывается справедливой

Теорема 6.5.2 **Если точка $x_0 \in \gamma$ не является характеристической точкой задачи Коши (6.5.4), то в $\omega \subset \Omega$ – некоторой окрестности x_0 – решение задачи Коши существует и единственно.**

Теперь продемонстрируем особенности практического использования полученных теоретических результатов.

`Задача 6.5.1` Найти общее решение уравнения

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x}+y(z-x)\frac{\partial u}{\partial y}-z^2\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

и решить для этого уравнения задачу Коши с начальным условием

$$u=y \quad \text{при} \quad x=z\,.$$

`Решение.` 1°. Для данного уравнения в частных производных составляем характеристическую систему в симметричной форме

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y(z-x)} = -\frac{dz}{z^2}\,.$$

2°. Один из двух функционально независимых первых интегралов находим так

$$\frac{dx}{x^2} + \frac{dz}{z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad d\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = C_1.$$

3°. Другой первый интеграл попробуем найти из уравнения

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y(z-x)} \quad \text{или} \quad \frac{z-x}{x^2}\,dx = \frac{dy}{y}\,.$$

С учетом $z = \dfrac{x}{C_1 x - 1}$ - условия связи, следующего из уже найденного первого интеграла, получаем

$$\left(\frac{1}{x(C_1 x - 1)} - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{dy}{y}.$$

Разложение первого слагаемого в больших скобках дает

$$\frac{1}{x(C_1 x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{C_1 x - 1} \quad \Rightarrow \quad A = -1;\ B = C_1.$$

Откуда

$$-\frac{2}{x}dx + \frac{C_1}{C_1 x - 1}dx = \frac{dy}{y},$$

$$-\ln x^2 + \ln|C_1 x - 1| = \ln|y| + \ln|\tilde{C}_2|\,.$$

Поэтому $\dfrac{C_1 x - 1}{x^2 y} = C_2$, что, с учетом равенства $z = \dfrac{x}{C_1 x - 1}$, окончательно дает $\dfrac{1}{xyz} = C_2$.

Найденные первые интегралы очевидно функционально независимы, поскольку формула для одного из них содержит независимую переменную y, а для другого – нет. Таким образом, в силу теоремы 6.5.1, общее решение исходного уравнения будет иметь вид

$$u(x, y, z) = \Phi\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z},\ xyz\right)\,.$$

4°. Рассмотрим теперь задачу Коши. Отметим, что в данной задаче $\varphi(x, y, z) = y$, а начальная поверхность γ это плоскость $x - z = 0$, то есть $s(x, y, z) = x - z$.

Составим вначале вспомогательную систему уравнений (6.5.5), включающую формулы первых интегралов и уравнение, задающее начальную поверхность

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} & = & C_1, \\ xyz & = & C_2, \\ x - z & = & 0. \end{array} \right. \qquad (6.5.6)$$

Конкретный вид функции Ψ, дающей решение задачи Коши, можно найти, если при помощи вспомогательной системы (6.5.6) выразить независимые переменные через C_1 и C_2 и подставить эти выражения в формулу начальной поверхности. Действительно, из системы (6.5.6) получаем

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{C_1}, \\ y = \dfrac{C_1^2 C_2}{4}, \\ z = \dfrac{2}{C_1}. \end{cases}$$

Первые интегралы (равно как и любые непрерывно дифференцируемые функции от них) сохраняют постоянные значения на траекториях характеристической системы. Поэтому те условия связи между первыми интегралами, которые имеют место на начальной поверхности, остаются верными при движении вдоль траекторий.

В нашем случае на начальной поверхности

$$u(x, y, z) = y = \frac{C_1^2 C_2}{4},$$

поэтому решением задачи Коши будет функция

Решение получено.

$$\Psi(x, y, z) = \frac{\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z}\right)^2 xyz}{4} = \frac{(x+z)^2 y}{4xz}.$$