Собственные значения невещественные и не равные друг другу.

В этом случае из вещественности коэффициентов матрицы $\|A\|$ следует, что $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ и $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ при условии $\beta \neq 0$.

Собственные векторы $\| h_{(1)}\|$ и $\| h_{(2)}\|$, отвечающие λ_1 и λ_2, комплексно сопряженные и линейно независимы как элементы в унитарном пространстве U^2, поэтому, если

$$\| h_{(1)}\| = \|p\| + i\|q\| \qquad \text{и} \qquad \| h_{(2)}\| = \|p\| - i\|q\|,$$

то $\|p\|$ и $\|q\|$ вещественные и также линейно независимые элементы пространства E^2 (см. лемму 2.4.3).

Комплекснозначная вектор-функция

$$\|x(t)\| = C_1 e^{\lambda_1 t} \|h_{(1)}\| = C_1 e^{(\alpha + i\beta)t} \left(\|p\| + i\|q\| \right)$$

по теореме 3.1.2 является решением системы (6.3.3) при любой комплексной константе C_1.

Кроме того, согласно лемме 2.4.2, решением системы (6.3.3) будет и вещественная вектор-функция $\mathrm{Re}\,\|x(t)\|$.

Найдем ее вид, представив предварительно константу C_1 в экспоненциальной форме $C_1 = \rho\, e^{i\theta}$, где $\rho \geq 0$, θ – произвольные вещественные постоянные.

Из

$$\|x(t)\| = \rho e^{\alpha t + i(\beta t + \theta)} \left(\|p\,\| + i\|q\|\right)$$

получаем, что

$$\mathrm{Re}\,\|x(t)\| = \|p\,\|\,\rho\, e^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta) - \|q\|\,\rho\, e^{\alpha t}\sin(\beta t + \theta)\,.$$

В силу линейной независимости $\|p\,\|$ и $\|q\|$ можно утверждать, что скалярные функции

$$\begin{cases} y_1(t) = \rho\, e^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta)\,, \\ y_2(t) = \rho\, e^{\alpha t}\sin(\beta t + \theta) \end{cases} \tag{6.3.5}$$

задают параметрическое представление интегральных кривых системы (6.3.1) в *новом декартовом базисе* $\{\,\|p\,\|;\ -\|q\|\,\}$, а сами являются соответствующими декартовыми координатами.

Определение вида фазовых траекторий удобно выполнить, перейдя от декартовой системы координат к полярной по стандартным формулам

$$\begin{cases} y_1 = r\cos\varphi\,, \\ y_2 = r\sin\varphi\,. \end{cases} \tag{6.3.6}$$

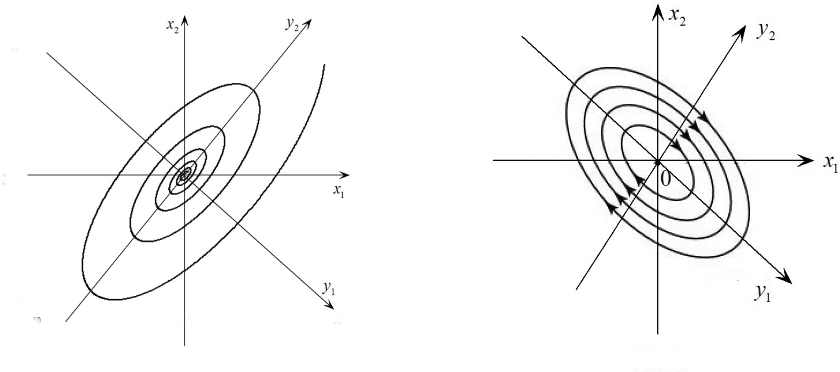

Рис. 1. Положения равновесия *фокус* и *центр*

Сопоставление формул (6.3.5) и (6.3.6) позволяет получить параметрическое представление фазовых траекторий в полярной системе координат:

$$\begin{cases} r = \rho\, e^{\alpha t}\,, \\ \varphi = \beta t + \theta\,, \end{cases} \tag{6.3.7}$$

из которого следует, что фазовые траектории в базисе $\{\,\|p\,\|;\ -\|q\|\,\}$

при $\alpha > 0$ суть раскручивающиеся от начала координат логарифмические спирали (положение равновесия называется *неустойчивым фокусом*);

при $\alpha < 0$ суть скручивающиеся к началу координат логарифмические спирали (это положение равновесия называется *асимптотически устойчивым фокусом*);

при $\alpha = 0$ образуют систему концентрических окружностей с центром в начале координат (положение равновесия называется *центром*). Это положение равновесия устойчиво по Ляпунову, но не устойчиво *асимптотически* .

Важно отметить: формулы (6.3.7) дают *все* вещественные решения, поскольку *для каждой* точки $\{ y_1, y_2 \}$ существуют значения полярных координат ρ и θ такие, что через эту точку проходит *единственная* в силу теоремы Коши фазовая траектория вида (6.3.7).

Переход от базиса $\{ \|p\|; -\|q\| \}$ к исходному выполняется стандартно.

Направление движения по фазовым траекториям (то есть по часовой стрелке или против) можно установить, найдя фазовую скорость для некоторой конкретной точки, не являющейся положением равновесия. Например из (6.3.3) следует, что в точке $\| 1 \; 0 \|^{\mathrm{T}}$ фазовая скорость равна вектору $\| \alpha_{11} \; \alpha_{21} \|^{\mathrm{T}}$.

Кроме того, для уточнения вида фазовой траектории полезной может оказаться информация о точках, в которых касательная к ней либо горизонтальна (то есть, $\dot{x}_2 = 0$), либо вертикальна ($\dot{x}_1 = 0$).

Уравнения соответствующих изоклин находятся из системы (6.3.3) и имеют вид

$$\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 = 0 \qquad \text{и} \qquad \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 = 0$$

соответственно.

Задача 6.3.2 Найти расположенные во второй четверти положения равновесия автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} & = & \exp\,(4x + 3y - 4) - 1\,, \\ \dot{y} & = & x^2 - 4x - 3y\,. \end{cases}$$

Определить их характер и нарисовать эскиз фазовых траекторий.

Решение. 1°. Находим положения равновесия

$$\begin{cases} \exp\,(4x + 3y - 4) - 1 & = & 0\,, \\ x^2 - 4x - 3y & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x + 3y & = & 4\,, \\ 4x + 3y & = & x^2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 & = & 2\,, \\ y_1 & = & -4/3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_2 & = & -2\,, \\ y_2 & = & 4\,. \end{cases}$$

2°. Перенесем начало координат в положение равновесия – точку $M(-2;\,4)$, расположенную во второй четверти, сделав замену переменных $x = u-2$ и $y = v+4$. В этом случае значения функций, стоящих в правых частях исследуемой автономной системы будут равны:

$$\begin{aligned} &\exp\left(4x + 3y - 4\right) - 1 = \exp\left(4u + 3v\right) - 1\,, \\ &x^2 - 4x - 3y \qquad\quad\;\; = u^2 - 8u - 3v\,. \end{aligned}$$

В этой задаче (в отличие от решения задачи 6.3.1) для нахождения коэффициентов линеаризации (6.3.8) мы не будем применять разложений по формуле Тейлора, а воспользуемся теоремой Тейлора, т.е. формулами (6.3.7), из которых непосредственно следует, что в новом начале координат, то есть в точке $\left\| \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\|$,

$$\alpha_{11} = \frac{\partial}{\partial u}\Big(\exp\left(4u + 3v - 4\right) - 1\Big) = 4\,,$$

$$\alpha_{12} = \frac{\partial}{\partial v}\Big(\exp\left(4u + 3v - 4\right) - 1\Big) = 3\,,$$

$$\alpha_{21} = \frac{\partial}{\partial u}\Big(u^2 - 8u - 3v\Big) = -8\,,$$

$$\alpha_{22} = \frac{\partial}{\partial v}\Big(u^2 - 8u - 3v\Big) = -3\,.$$

Полученные равенства проверьте самостоятельно.

Откуда следует, что линеаризация (6.3.8) для особой точки M имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} \dot{u} & = & 4u & + & 3v\,, \\ \dot{v} & = & -8u & - & 3v \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \|A\| = \left\| \begin{array}{rr} 4 & 3 \\ -8 & -3 \end{array} \right\|\,.$$

3°. Найдем собственные значения линейного оператора с матрицей матрицы $\|A\|$

$$\det \left\| \begin{array}{cc} 4-\lambda & 3 \\ -8 & -3-\lambda \end{array} \right\| \;=\; \lambda^2 - \lambda + 12 = 0\,.$$

Следовательно, $\lambda_{1,2} = \left(1 \pm i\sqrt{47}\right)/2$ и положение равновесия M есть *неустойчивый фокус.*

Заметим, что раскручивание спирали фазовой траектории происходит *по часовой стрелке*, поскольку вектор фазовой скорости, например, в точке

$$\left\| \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\| \qquad \text{равен} \qquad \left\| \begin{array}{c} \dot u \\ \dot v \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{r} 3 \\ -3 \end{array} \right\|.$$

Наконец, легко видеть, что AB – изоклина вертикальных касательных к исследуемой фазовой траектории – имеет уравнение $8u + 3v = 0$, в то время как CD – изоклина горизонтальных – уравнение $4u + 3v = 0$.

`Решение получено.` Итоговый вид эскиза показан на следующем рисунке.

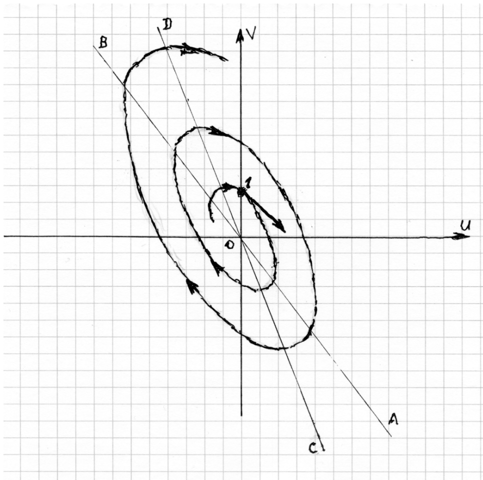

Рис. 2. Фазовый портрет положения равновесия для задачи 6.3.2