

Положения равновесия автономных систем второго порядка

Теорема 6.1.5 (о выпрямлении траекторий) не применима в окрестностях положений равновесия. Исследование поведения фазовых траекторий в этих областях требует использования более сложных, специальных методов.

Одним из таких методов, например, может послужить локальная линеаризация системы (6.1.1) в малой окрестности положения равновесия, а также набор условий, гарантирующий подобие поведения (или, как принято говорить, *эквивалентность*) в этой окрестности фазовых траекторий исходной и линеаризованных систем.

Рассмотрим в качестве примера вещественную нелинейную автономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad (6.3.1)$$

где $F_1(x_1, x_2)$ и $F_2(x_1, x_2)$ – заданные вещественные, непрерывно дифференцируемые в области $\Omega \subseteq E^2$ функции.

Найдем фазовый портрет для этой системы в окрестности некоторой точки $\|x_{01} \ x_{02}\|^T \in \Omega$.

Без потери общности можно считать, что $\|x_{01} \ x_{02}\|^T = \|0 \ 0\|^T$, поскольку начало координат фазовой плоскости переносится в рассматриваемую точку линейной невырожденной заменой

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_{01}, \\ y_2 = x_2 - x_{02}. \end{cases}$$

Если начало координат не есть особая точка, то фазовый портрет можно получить, применяя теорему о выпрямлении траекторий, из которой следует, что фазовые траектории в малой окрестности начала координат суть почти прямые, непересекающиеся линии.

Допустим теперь, что начало координат является положением равновесия системы (6.3.1). Тогда из равенств $F_1(0, 0) = 0$ и $F_2(0, 0) = 0$ и формулы Тейлора следуют соотношения

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2) = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + o(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}), \\ F_2(x_1, x_2) = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + o(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}), \end{cases}$$

где

$$\alpha_{ij} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_{\substack{x_1 = 0, \\ x_2 = 0}} \quad i, j = 1, 2.$$

Тогда система (6.3.1) может быть записана в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + o(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}), \\ \dot{x}_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + o(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \end{cases}$$

и естественно дать

Определение 6.3.1	<p>Линейная однородная система</p> $\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \end{cases} \quad (6.3.2)$ <p>называется <i>линеаризацией</i> системы (6.3.1) в начале координат.</p>
-----------------------------	---

Как и раньше, будем использовать обозначение

$$\|A\| = \left\| \begin{array}{cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{array} \right\|.$$

Основой для исследования поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия нелинейной системы (6.3.1) служит

Теорема 6.3.1 (0 линейаризации) **Если для линейного преобразования, задаваемого матрицей $\|A\|$, все собственные значения различны и имеют ненулевые вещественные части, то особая точка в начале координат системы (6.3.1) имеет тот же вид фазового портрета, что и ее линейаризация (6.3.2). При этом в малой окрестности особой точки сохраняются такие особенности фазовых траекторий, как направление закручивания и устойчивость.**

Будем исследовать характер поведения фазовых траекторий *линейных* автономных систем, для $n = 2$, то есть для случая, когда фазовое пространство есть двумерная плоскость.

Рассмотрим линейную, с произвольными вещественными коэффициентами, автономную систему уравнений вида

$$\|\dot{X}\| = \|A\| \|X\| \quad (6.3.3)$$

или же в развернутой матричной форме

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

где

$$\|\dot{X}\| = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}, \quad \|A\| = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \quad \|X\| = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Определение
6.3.2

Если $\det \|A\| \neq 0$, то систему (6.3.3) называют *простой*, и называют *сложной* при $\det \|A\| = 0$.

В силу определений 6.1.2 и 6.3.2 простая система (согласно теореме Крамера) имеет единственное положение равновесия – начало координат в E^2 – точку o .

Для исследования характера поведения фазовых траекторий системы (6.3.3) удобно найти аналитическое представление ее общего решения, что (как было показано в § 3.1–3.2) требует нахождения собственных значений λ_1 и λ_2 , а также собственных векторов линейного преобразования, задаваемого матрицей $\|A\|$, обозначаемых далее как $\|h_{(1)}\|$ и $\|h_{(2)}\|$.

Рассмотрим следующие случаи.

1°. Числа λ_1 и λ_2 вещественные, различные и отличные от нуля

В этом случае в E^2 существует базис из собственных векторов $\|h_{(1)}\|$ и $\|h_{(2)}\|$, в котором система (6.3.3) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1, \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2 \end{cases}$$

и соответственно решения $y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}$ и $y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}$, где C_1 и C_2 – произвольные константы. Уравнения фазовых траекторий получаются из этих решений исключением t и имеют вид

$$y_2 = C_2 \left(\frac{y_1}{C_1} \right)^{\lambda_2/\lambda_1}, \quad \text{при } C_1 \neq 0, \tag{6.3.4}$$
$$y_1 = 0, \quad \text{при } C_1 = 0.$$

Из формул (6.3.4) следует, что если λ_1 и λ_2 одного знака, то фазовые траектории являются дугами парабол, касающихся в начале координат оси Oy_1 при $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. При $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ траектории в начале координат касаются оси Oy_2 .

Если λ_1 и λ_2 отрицательны, то движение с ростом t по фазовым траекториям происходит по направлению к началу координат, и положение равновесия называется *асимптотически устойчивым узлом*.

В случае, когда λ_1 и λ_2 положительны, движение происходит от начала координат (*неустойчивый узел*). Следует отметить, что координатные полуоси, равно как и само начало координат, также являются фазовыми траекториями.

Наконец, следует выполнить обратный переход к исходным переменным x_1 и x_2 , который является линейным невырожденным (аффинным) преобразованием в E^2 . Само преобразование при построении фазового портрета находить необязательно. Достаточно воспользоваться тем его свойством, что собственные векторы матрицы $\|A\|$ являются направляющими векторами прямолинейных фазовых траекторий

Итоговый вид фазовых портретов для положения равновесия типа *устойчивый узел* показан на рис. 6.3А, а для положения равновесия типа *неустойчивый узел* – на рис. 6.3В.

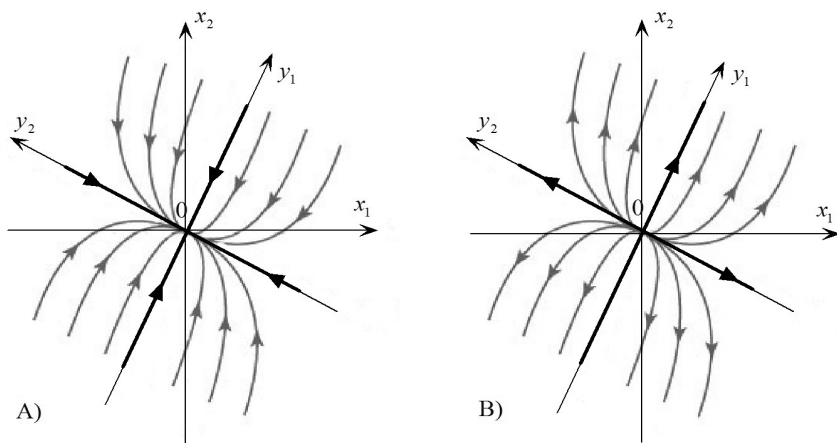


Рис. 1. Положение равновесия *узел*

Если λ_1 и λ_2 разных знаков, то положение равновесия называется *седлом*. Оно всегда неустойчиво, поскольку одно из собственных значений матрицы $\|A\|$ положительно.

В базисе из собственных векторов фазовые траектории седла (отличные от координатных полуосей и начала координат) по свойствам аналогичны ветвям гипербол. Действительно, из (6.3.4) имеем:

$$\lim_{y_1 \rightarrow 0} |y_2| = +\infty, \quad \lim_{|y_1| \rightarrow +\infty} y_2 = 0.$$

Движение по траекториям, являющимся координатными полуосями, направлено от начала координат для оси, которой соответствует $\lambda > 0$, и направлено к началу координат, если $\lambda < 0$. По остальным фазовым траекториям направление движения в каждой четверти координатной плоскости определяется направлением движения по смежным координатным полуосям (см. рис. 6.4).

Переход к исходным переменным выполняется также как и в случае узла.

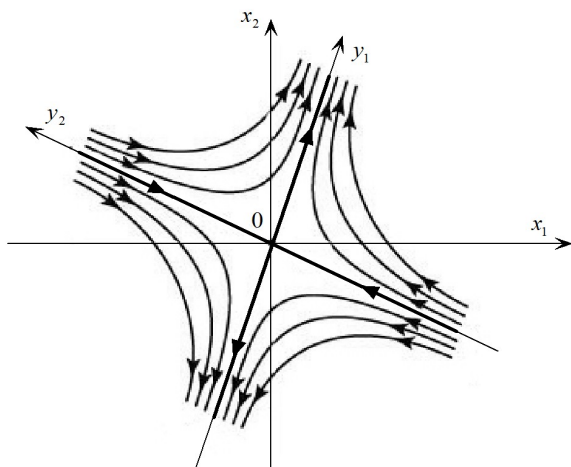


Рис. 2. Положение равновесия *седло* с $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$

Задача
6.3.1

Найти положения равновесия, определить их характер и нарисовать эскиз фазовых траекторий линеаризаций в окрестности положения равновесия для автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(3 + y - y^2), \\ \dot{y} = \arcsin(x - y^2). \end{cases}$$

Решение. 1°. Находим положения равновесия

$$\begin{cases} \ln(3 + y - y^2) = 0, \\ \arcsin(x - y^2) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 3 + y - y^2 = 1, \\ x - y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = -1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = 2. \end{cases}$$

2°. Исследуем положение равновесия – точку $M(1; -1)$.
 Вначале перенесем начало координат в особую точку M при помощи замены переменных

$$\begin{cases} u = x - 1, \\ v = y + 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = u + 1, \\ y = v - 1. \end{cases}$$

В этом случае справедливы равенства

$$\begin{aligned} \ln(3 + y - y^2) &= \ln(3 + (v - 1) - (v - 1)^2) = \\ &= \ln(1 + 3v - v^2) = 3v + o(\sqrt{u^2 + v^2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arcsin(x - y^2) &= \arcsin(u + 1 - (v - 1)^2) = \\ &= \arcsin(u + 2v - v^2) = u + 2v + o(\sqrt{u^2 + v^2}). \end{aligned}$$

Откуда следует, что линеаризация (6.3.3) для особой точки M имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} = & 3v, \\ \dot{v} = u + & 2v \end{cases} \implies \|A\| = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{array} \right\|.$$

Найдем собственные значения матрицы $\|A\|$, решив характеристическое уравнение $\det \|A - \lambda E\| = 0$.

$$\det \|A - \lambda E\| = \det \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Следовательно, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, и положение равновесия M есть седло.

Собственные векторы $\|h\|$ матрицы $\|A\|$ найдем, решив для каждого из собственных значений систему уравнений

$$\|A - \lambda E\| \|h\| = \|o\|.$$

В нашем случае для $\lambda_1 = -1$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\lambda_1 & 3 \\ 1 & 2 - \lambda_1 \end{vmatrix} \|h_{(1)}\| &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \implies \\ \implies \|h_{(1)}\| &= \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Аналогично для $\lambda_2 = 3$

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{cc} -\lambda_2 & 3 \\ 1 & 2 - \lambda_2 \end{array} \right\| \|h_{(2)}\| &= \left\| \begin{array}{cc} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_2 \\ \eta_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\| \\ \Rightarrow \|h_{(2)}\| &= \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\|. \end{aligned}$$

При построении эскиза фазового портрета для особой точки M учитываем, что прямолинейные фазовые траектории имеют своими направляющими собственными векторы $\|h_{(1)}\|$ и $\|h_{(2)}\|$ и являются при этом асимптотами для криволинейных траекторий. Направления движения по прямолинейным траекториям: от начала координат для асимптоты с $\|h_{(2)}\|$, так как $\lambda_2 = 3 > 0$, и соответственно к началу координат для асимптоты с $\|h_{(1)}\|$, так как $\lambda_1 = -1 < 0$. Как следствие этого факта, направления движения по криволинейным фазовым траекториям при этом оказываются однозначно определенными, поскольку в силу непрерывности они должны совпадать с направлениями движения по прямолинейным как при $t \rightarrow +\infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$. Итоговый вид эскиза показан на рис. 6.8А.

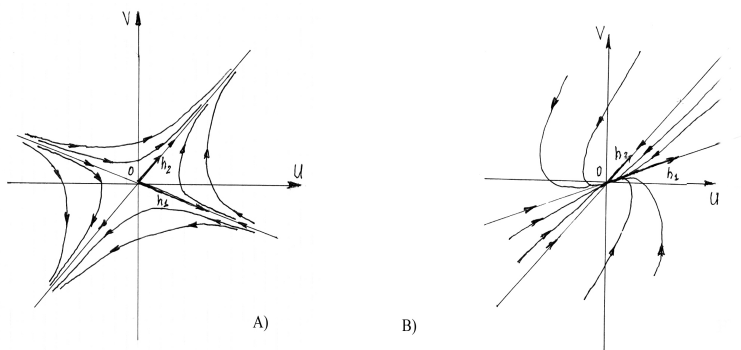


Рис. 3. Фазовые портреты положений равновесия для задачи 6.3.1

3°. Исследуем теперь второе положение равновесия – точку $N(4; 2)$. Вначале перенесем начало координат в особую точку N при помощи замены переменных

$$\begin{cases} u = x - 4, \\ v = y - 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = u + 4, \\ y = v + 2. \end{cases}$$

В этом случае справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \ln(3 + y - y^2) &= \ln(3 + (v + 2) - (v + 2)^2) = \\ &= \ln(1 - 3v - v^2) = -3v + o(\sqrt{u^2 + v^2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arcsin(x - y^2) &= \arcsin(u + 4 - (v + 2)^2) = \\ &= \arcsin(u - 4v - v^2) = u - 4v + o(\sqrt{u^2 + v^2}). \end{aligned}$$

Откуда следует, что линеаризация (6.3.3) для особой точки N имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} = & - & 3v, \\ \dot{v} = u & - & 4v \end{cases} \implies \|A\| = \left\| \begin{array}{cc} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{array} \right\|.$$

Найдем собственные значения матрицы $\|A\|$, решив характеристическое уравнение $\det \|A - \lambda E\| = 0$.

$$\det \left\| \begin{array}{cc} -\lambda & -3 \\ 1 & -4 - \lambda \end{array} \right\| = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0.$$

Следовательно, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$ и положение равновесия N есть устойчивый узел. Собственные векторы $\|h\|$ матрицы $\|A\|$ найдем, решив для каждого из собственных значений систему $\|A - \lambda E\| \|h\| = \|o\|$.

В нашем случае для $\lambda_1 = -1$

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{cc} -\lambda_1 & 3 \\ 1 & 2 - \lambda_1 \end{array} \right\| \|h_{(1)}\| &= \left\| \begin{array}{cc} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \eta_1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\| \\ \implies \|h_{(1)}\| &= \left\| \begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array} \right\|. \end{aligned}$$

Аналогично для $\lambda_2 = -3$

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{cc} -\lambda_2 & 3 \\ 1 & 2 - \lambda_2 \end{array} \right\| \|h_{(2)}\| &= \left\| \begin{array}{cc} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \xi_2 \\ \eta_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\| \\ \Rightarrow \|h_{(2)}\| &= \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\|. \end{aligned}$$

Исследуем теперь свойства фазовых траекторий. Это удобно сделать, перейдя в базис из собственных векторов, то есть в базис $\{\|h_{(1)}\|; \|h_{(2)}\|\}$, координаты в котором обозначим как $p(t)$ и $q(t)$. В этом базисе (как было показано в § 3.1) решения линеаризованной системы (6.3.3) имеют особенно простой вид:

$$\begin{cases} p(t) &= C_1 e^{-t}, \\ q(t) &= C_2 e^{-3t}, \end{cases}$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы. При $C_1 = 0$ вид фазовых траекторий очевиден: в зависимости от C_2 , это прямолинейные лучи или точка.

Исключив t из этих равенств при $C_1 \neq 0$, получим уравнения фазовых траекторий в виде $q = Dp^3$, где D – произвольная константа. То есть траектории суть дуги кубических парабол, касающихся в нуле оси $\|h_{(1)}\|$. Направление движения по всем траекториям одинаково: к положению равновесия. Эскиз портрета показан на рис. 6.8В.

Решение
получено.

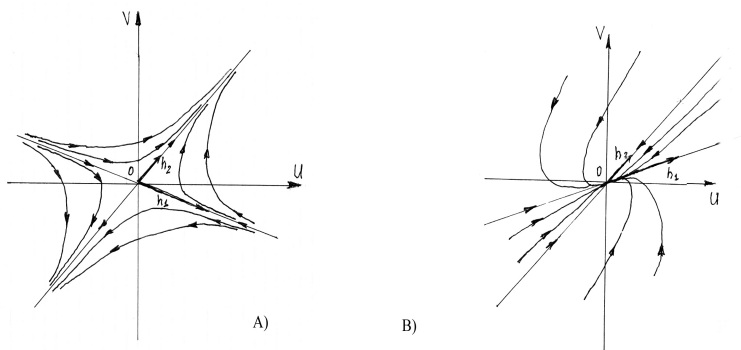


Рис. 4. Фазовые портреты положений равновесия для задачи 6.3.1