Устойчивость положения равновесия автономной системы

Рассмотрим теперь проблему устойчивости положений равновесия для систем (6.1.1) вида

$$\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\| \, , \tag{6.2.2}$$

$$\text{где} \quad \|A\| = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\| \quad \text{и} \quad \|x\| = \left\| \begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{array} \right\| .$$

Здесь числа a_{ij} – комплексные константы.

Пусть матрица $\|A\|$ задает линейное преобразование в унитарном пространстве U^n, имеющее собственные значения λ_1, λ_2, $\ldots$ λ_n, среди которых, быть может, имеются равные. Тогда для положения равновесия $x(t) = o$ справедлива

Теорема 6.2.1

1°. Если $\mathrm{Re}\lambda_j < 0 \ \ \forall j = [1, n]$, **то** $x(t) = o$ **асимптотически устойчиво.**

2°. Если $\mathrm{Re}\lambda_j \leq 0 \ \ \forall j = [1, n]$ **и для каждого** λ **с** $\mathrm{Re}\lambda_j = 0$ **его кратность совпадает с размерностью собственного подпространства, то** $x(t) = o$ **устойчиво по Ляпунову.**

3°. Если имеется хотя бы одно λ **с** $\mathrm{Re}\lambda > 0$ **или хотя бы для одного** λ **с** $\mathrm{Re}\lambda = 0$ **кратность больше размерности собственного подпространства, то** $x(t) = o$ **неустойчиво.**

Вернемся теперь к рассмотрению системы

$$\|\dot{\vec{x}}\| = \|\vec{F}(\vec{x})\| \tag{6.2.1}$$

в предположении, что $x_0 = o$ является ее положением равновесия, то есть $F(o) = o$. Опишем возможные подходы к исследованию такого положения равновесия на устойчивость.

Первый подход носит название исследования *устойчивости по линейному приближению* и заключается в следующем.

Пусть вектор-функция $F(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности положения равновесия $x_0 = o$. Тогда она представима в этой окрестности по формуле Тейлора (с остаточным членом в форме Пеано) в неразвернутом матричном виде как

$$\|F(x)\| = \|A\|\|x\| + \|R(x)\| \,,$$

где матрица $\|A\|$ имеет элементы α_{ij} такие, что $\alpha_{ij} = \left.\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}\right|_{x=o}$, а вектор-функция $R(x)$ не только равна o при $x = o$, но и удовлетворяет условию $\lim\limits_{x \to o} \dfrac{|R(x)|}{|x|} = 0 \,,$ где $|x| = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2}\,.$

Тогда система уравнений (6.2.1) принимает вид

$$\|\dot{x}\| = \|A\|\|x\| + \|R(x)\| \,, \tag{6.2.4}$$

и оказывается справедливой

Теорема 6.2.2 (Об устойчивости по линейному приближению)

1°. Если $\|A\|$ – матрица системы (6.2.4) такова, что $\mathrm{Re}\lambda_j < 0 \quad \forall\, j$, то решение этой системы $x(t) = o$ асимптотически устойчиво.

2°. Если матрица $\|A\|$ имеет хотя бы одно λ с $\mathrm{Re}\lambda > 0$, то решение системы (6.2.4) $x(t) = o$ неустойчиво.

3°. Если $\max\limits_j \mathrm{Re}\lambda_j = 0$, то устойчивость (или неустойчивость) $x(t) = o$ зависит не только от матрицы $\|A\|$, но и от вектор-функции $R(x)$.

Условия пунктов 1° и 2° являются достаточными для того, чтобы делать заключения об устойчивости (или неустойчивости) положения равновесия $x = o$ системы (6.2.4).

Положения равновесия, удовлетворяющие этим условиям, принято называть *грубыми положениями равновесия.*

Положения равновесия, для которых оказываются справедливыми условия пункта 3°, называются *негрубыми положениями равновесия.*

Исследование особых решений в этом случае можно попытаться выполнить альтернативным методом, разработанным А.М. Ляпуновым, основой которого служат следующие определения и теоремы.

Определение 6.2.3	Функция $\Phi(x)$ такая, что $\Phi(o) = 0$, называется в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}$ элемента $x = o$ – *положительно определенной*, если $\Phi(x) > 0 \ \ \forall x \in \dot{U}$; – *отрицательно определенной*, если $\Phi(x) < 0 \ \ \forall x \in \dot{U}$; – *неотрицательной*, если $\Phi(x) \geq 0 \ \ \forall x \in \dot{U}$; – *неположительной*, если $\Phi(x) \leq 0 \ \ \forall x \in \dot{U}$.

Определение 6.2.4	*Производной в силу системы* (6.2.1) *от функции* $\Phi(x)$ называется выражение $$\dot{\Phi}(x) = \\| \operatorname{grad} \Phi(x) \\|^{\mathrm{T}} \\|F(x)\\| = = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_j} F_j(x)\,.$$

Нетрудно заметить, что производная в силу системы (6.2.1) есть полная производная по t от сложной функции $\Phi(x(t))$, если $x(t)$ – решение этой системы.

При этом в произвольной точке x для вычисления значений производной в силу системы решать саму систему не требуется.

Определение 6.2.5	Положительно определенная в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}$ элемента $x = o$ функция $V(x)$ называется *функцией А.М. Ляпунова*, если $$\grave{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \dot{U}\,,$$ где $\grave{V}(x)$ – производная в силу системы (6.2.4).

Исследование системы (6.2.1) по методу Ляпунова базируется на следующих трех теоремах.

Теорема 6.2.3 (Ляпунова об устойчивости) **Если в некоторой окрестности положения равновесия системы (6.2.1)** $x = o$ **существует функция Ляпунова** $V(x)$**, то это положение равновесия устойчиво по Ляпунову.**

Другими словами, согласно теореме 6.2.3, неположительность производной в силу системы (6.2.4) от функции Ляпунова гарантирует устойчивость положения равновесия.

Теорема 6.2.4 (Об асимптотической устойчивости) **Если в некоторой окрестности положения равновесия системы (6.2.1) $x = o$ существует функция Ляпунова $V(x)$ такая, что ее производная в силу системы (6.2.1) $\grave{V}(x)$ отрицательно определена в этой окрестности, то данное положение равновесия асимптотически устойчиво.**

Обоснование неустойчивости положения равновесия может основываться на использовании специальной функции $W(x)$, называемой *функцией Н.Г. Четаева.*

Пусть U некоторая окрестность $x = o$, а $\Omega \subset U$ такая, что $x = o$ – граничная точка Ω.

`Теорема 6.2.5 (Четаева о неустойчивости)` **Если существует функция $W(x)$ непрерывно дифференцируемая на Ω такая, что**

$$W(x) > 0\,,\ \ \grave{W}(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega\,,$$

где $\grave{W}(x)$ производная в силу системы, и все точки $x^* \in \Omega$, в которых $W(x^*) = 0$, суть граничные точки Ω.

Тогда положение равновесия $x = o$ неустойчиво.

Условия сформулированные в теоремах 6.2.3–6.2.5 позволяют делать заключения о типе устойчивости негрубых положений равновесия, когда теорема об устойчивости по линейному приближению неприменима. При этом важно, что решения системы (6.2.4) для получения этих заключений, находить не требуется.

С другой стороны, общей методики построения функций $V(x)$ и $W(x)$ не имеется, и для этой цели приходится использовать специфику решаемой задачи. Например, доказано, что функция Ляпунова всегда существует в окрестности асимптотически устойчивого положения равновесия. Однако в более общем случае такие функции имеются не для любого класса систем дифференциальных уравнений.

Особенности практического применения методов Ляпунова и Четаева проиллюстрируем на примере решения двух следующих задач.

Задача 6.2.2 Найти и исследовать на устойчивость положения равновесия автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & -x_1^3 & + & x_2^2\,, \\ \dot{x}_2 & = & -x_1^5 & - & x_1 x_2\,. \end{cases} \qquad (6.2.5)$$

Решение. 1°. У данной системы единственное положение равновесия – начало координат. Матрица $\|A\|$ в начале координат очевидно нулевая и теорема 6.2.2 здесь не применима.

2°. Покажем, что функция $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ удовлетворяет условиям теоремы 6.2.4. Действительно, она положительно определенная в любой окрестности начала координат и $V(0,0) = 0$.

Ее производная в силу системы (6.2.5) равна

$$\grave{V}(x_1, x_2) = 2x_1\left(-x_1^3 + x_2^2\right) + 2x_2\left(-x_2^5 - x_1 x_2\right) =$$

$$= -2x_1^4 - 2x_2^6$$

и является отрицательно определенной в любой окрестности начала координат.

Решение получено. Тогда по теореме 6.2.4 $x = o$ есть асимптотически устойчивое положение равновесия для системы (6.2.5).

Задача 6.2.3 Найти и исследовать на устойчивость положения равновесия автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + 2x_2^5\,, \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2^2\,. \end{cases} \tag{6.2.6}$$

Решение. 1°. У системы (6.2.6) начало координат единственное положение равновесия. Матрица $\|A\|$ также нулевая и потому теорема 6.2.2 не применима.

2°. Пусть

$$U = \{(x_1; x_2) : x_1^2 + x_2^2 < \varepsilon\},$$

$$\text{а } \ \Omega = \{(x_1; x_2) \in U \,:\, x_1 > \, x_2^2\}\,.$$

Покажем, что функция $W(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^4$ удовлетворяет в Ω условиям теоремы 6.2.5. Действительно, здесь она положительно определенная и $W(0,0) = 0$. (см. рис. 6.2).

Ее производная в силу системы (6.2.6)

$$\grave{W}(x_1, x_2) = 2x_1 \left(x_1^2 + 2x_2^5\right) - 4x_2^3 x_1 x_2^2 = 2x_1^3$$

является положительно определенной в Ω, а начало координат есть единственная точка, в которой $\grave{W}(x_1, x_2) = 0$.

Решение получено.

Тогда по теореме 6.2.5 получаем, что начало координат есть неустойчивое положение равновесия для системы (6.2.6).

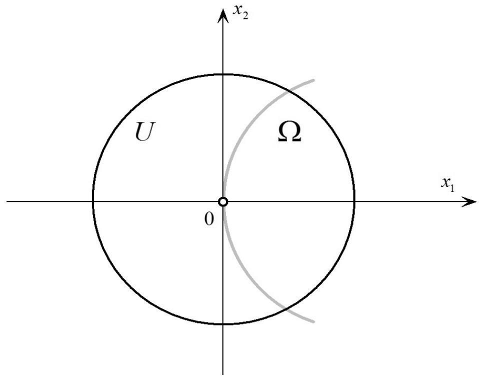

Рис. 1. К решению задачи 6.2.2