Автономные системы уравнений и их свойства

Определение 6.1.1	*Нормальной автономной системой* дифференциальных уравнений порядка $n \geq 2$ с неизвестной вектор-функцией $x(t)$ $t \in T$ называется система уравнений вида $$\dot{x} = F(x)\,, \qquad x \in \Omega \subseteq E^n\ , \tag{6.1.1}$$ где вещественная вектор-функция $F(x)$ удовлетворяет условию теоремы 4.3.1 (Коши) на множестве Ω за исключением, быть может, конечного числа точек.

Заметим, что любая система вида $\dot{x} = F(t, x)$ может быть сведена к автономной путем введения дополнительной скалярной неизвестной $x_{n+1}(t) = t$. Координатная форма системы (6.1.1) в этом случае пополняется $(n+1)$-м уравнением $\dot{x}_{n+1} = 1$ и принимает автономный вид

$$\begin{cases} \dot{x}_k = F_k(x_{n+1}, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \forall\, k = [1, n]\,, \\ \\ \dot{x}_{n+1} = 1\,. \end{cases}$$

Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принято называть *фазовыми переменными*.

Пусть $x(t)$ есть частное решение системы (6.1.1), тогда вектор-функция $x(t),\ t \in T$ параметрически задает некоторую линию в E^n, называемую *фазовой траекторией* этой системы. Совокупность фазовых траекторий для всех частных решений будем именовать *фазовым портретом* системы (6.1.1).

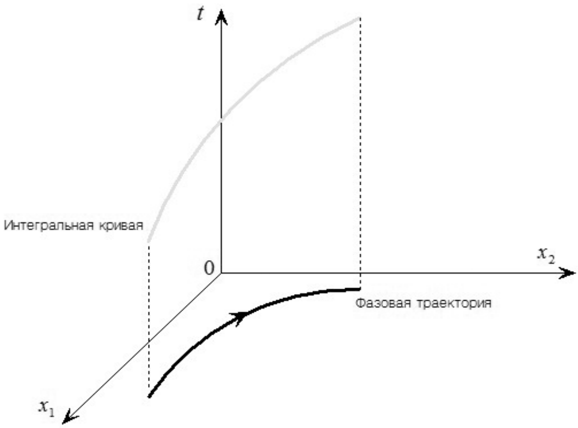

Рис. 1. Интегральные кривые и фазовые траектории

Стрелкой на фазовой траектории принято указывать направление перемещения точки по фазовой траектории при возрастании переменной t.

П р и м е р 6.1.1 : для автономной системы

$$\left\{ \begin{array}{rcr} \dot{x}_1 & = & x_2\,, \\ \dot{x}_2 & = & -x_1\,, \end{array} \right.$$

каждая интегральная кривая есть в $E^3\{\,t, x_1, x_2\}$ винтовая (или прямая при $C_1 = 0$) линия

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = C_1 \cos(t + C_2), \\ x_2 = C_1 \sin(t + C_2), \end{array} \right.$$

в то время как фазовые траектории являются в $E^2\{x_1, x_2\}$ окружностями (или точкой при $C_1 = 0$) вида $x_1^2 + x_2^2 = C_1^2$. Причем для каждой фазовой траектории с конкретным значением C_1 имеется бесконечно много интегральных кривых с различными значениями C_2.

Укажем некоторые полезные свойства решений автономных систем и их фазовых траекторий.

Теорема 6.1.1 **Если вектор-функция $x(t)$ есть решение автономной системы (6.1.1) при $t \in T$, то вектор-функция $x(t+c)$ (где c такая константа, что $t+c \in T$) также является решением системы (6.1.1) при всех допустимых t.**

Доказательство.

Следует непосредственно из равенств

$$\frac{dx(t+c)}{dt} = \frac{dx(t+c)}{d(t+c)} = F(x(t+c)) \ .$$

Теорема доказана.

Теорема 6.1.2 **Если фазовые траектории решений $x(t)$, $t \in T_1$ и $y(t)$, $t \in T_2$ автономной системы (6.1.1) имеют общую точку $b = x(t_1) = y(t_2)$, то $y(t) \equiv x(t + t_1 - t_2)$ для всех t, при которых определены обе части последнего тождества.**

Доказательство.

Вектор-функция $z(t) = x(t + t_1 - t_2)$ в силу теоремы 6.1.1 является решением системы (6.1.1) для всех t таких, что

$$t + t_1 - t_2 \in T_1.$$

Кроме того,

$$z(t_2) = x(t_1) = b = y(t_2)\,.$$

Тогда по теореме единственности $z(t) \equiv y(t)$ для всех t, при которых обе части этого тождества определены.

Теорема доказана.

Утверждение теоремы 6.1.2 означает, что фазовые траектории автономных систем в окрестности точек, для которых выполняется теорема Коши, либо не имеют общих точек, либо совпадают.

Поэтому вектор-функцию $F(x)$ можно рассматривать в области Ω как задающую векторное поле *фазовых скоростей*, каждый ненулевой элемент которого является вектором, касательным к фазовой траектории, проходящей через точку $x \in \Omega$. Для точек с нулевой фазовой скоростью используется

Определение 6.1.2	*Положением равновесия* или *точкой покоя* системы (6.1.1) называется ее решение вида $$x(t) = x_0 \in \Omega \quad \forall t \in T$$ такое, что $F(x_0) = o$.

Иначе говоря, положение равновесия есть постоянное (во времени) решение системы (6.1.1), фазовая траектория которого является точкой в фазовом пространстве E^n, а соответствующая этому решению интегральная кривая в E^{n+1} есть прямая, параллельная оси Ot. Из определения 6.1.2 также следует, что поиск положений равновесия системы (6.1.1) сводится к решению недифференциальной системы уравнений $F(x_0) = o$.

Наконец, из вышесказанного следует, что *неособое решение* не может проходить через стационарную точку ни при каких конечных t. Оно может лишь асимптотически к ней приближаться при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$.

Теорема 6.1.3 **Пусть $x(t)$, $t \in T$ – неособое решение системы (6.1.1), фазовая траектория для которого замкнутая линия. Тогда $x(t)$ – периодическая функция.**

Из теорем 6.1.1 – 6.1.3 вытекает

Следствие 6.1.1 **Каждая фазовая траектория автономной системы (6.1.1) является либо точкой, либо незамкнутой линией или замкнутой линией без самопересечений.**

Групповое свойство автономной системы (6.1.1) описывает

Теорема 6.1.4 **Пусть $x(t,a)$ есть решение задачи Коши следующего вида $\dot{x} = F(x),\ x(0) = a$. Тогда**

$$x(t, x(t_0, a)) \equiv x(t + t_0, a)$$

для любых допустимых t и t_0.

Доказательство.

Вектор-функции $x(t, x(t_0, a))$ и $x(t + t_0, a)$ при $t = 0$ равны вектору $x(t_0, a)$. По теореме единственности они совпадают для всех допустимых значений t и t_0.

Теорема доказана.

Следует отметить, что исследование поведения фазовых траекторий системы (6.1.1) в малой окрестности некоторой точки фазового пространства *единообразно* выполнить удается, вообще говоря, не всегда. Например в случаях, когда рассматриваемая точка является положением равновесия, оказывается, что фазовый портрет существенно зависит от типа этого равновесия. Однако в окрестности неособой точки характер поведения фазовой траектории качественно одинаков для любых автономных систем.

Пусть формулы $x = g(y) \ \ \forall\, y \in \Theta \subset E^n$, $x \in \Omega \subset E^n$ задают замену переменных $\{\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n \,\}$ на $\{\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n \,\}$. Напомним

`Определение 6.1.3`

Замена переменных $x = g(y)$ называется *гладкой обратимой* в Θ, если

1°. Преобразование $x = g(y)$ взаимно однозначно отображает Θ в Ω;

2°. Вектор-функции $x = g(y)$ и, обратная к ней $y = g^{-1}(x) = h(x)$, непрерывно дифференцируемы на множествах Θ и Ω соответственно;

3°. Якобиан

$$\frac{\partial\,(\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n \,)}{\partial\,(\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_n \,)} \neq 0 \quad \forall y \in \Theta\,.$$

Будет справедлива

Теорема 6.1.5 (О выпрямлении траекторий) **В малой окрестности точки $a \in \Omega \subseteq E^n$, не являющейся положением равновесия, система (6.1.1) может быть приведена к виду**

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 0, \\ \dot{y}_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \dot{y}_{n-1} = 0, \\ \dot{y}_n = 1 \end{cases} \qquad (6.1.2)$$

некоторой гладкой обратимой заменой $x = g(y)$.

Отметим, что

1°. Система (6.1.1) в переменных $\{\, y_1, y_2, \ldots, y_n \,\}$ легко интегрируется. Ее фазовые траектории суть отрезки прямых

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1(u) & = & a_1\,, \\ y_2(u) & = & a_2\,, \\ & \ldots & \\ y_{n-1}(u) & = & a_{n-1}\,, \\ y_n(u) & = & u + C\,, \end{array} \right.$$

что оправдывает название теоремы.

2°. Практическое значение теоремы 6.1.5 ограничено тем обстоятельством, что замена (6.1.7) для каждой точки a своя. Иначе говоря, построить эту замену единообразно для *немалого* множества Ω удается лишь исключительных случаях.

Устойчивость положения равновесия автономной системы

Было отмечено, что достижение особых точек при движении по фазовым траекториям возможно лишь при $t \to \infty$. Это означает, что изучение поведения решений системы (6.1.1) в окрестностях таких точек требует исследования их поведения при $t \to \infty$.

Одним из самых важных пунктов этого исследования является ответ на вопрос: в каких случаях малые изменения начальных условий для системы (6.1.1) приводят к малым изменениям решений на полубесконечных интервалах $(\,-\infty,\, \underline{\Delta}\,)$ и $(\,\overline{\Delta},\, +\infty\,)$.

Пусть $x(t,a)$ есть решение задачи Коши

$$\dot{x} = F(x)\,, \quad x(t_0) = a \in \Omega\,, \tag{6.2.1}$$

такое, что $x(t,a)$ $\forall t \in T$ целиком находится в некоторой окрестности x_0 – положения равновесия (особого решения) системы (6.1.1), т.е. точки, для которой $F(x_0) = o$.

Дадим следующие определения:

`Определение 6.2.1`	Положение равновесия x_0 называется *устойчивым по Ляпунову* (или просто *устойчивым*), если 1°. Найдется $\Delta > 0$ такое, что решение $x(t,a)$ задачи (6.2.1) существует на T для любых a таких, что $\mid a - x_0 \mid < \Delta$. 2°. $\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\,\delta_\varepsilon > 0$ такое, что, если $$\mid a - x_0 \mid < \delta_\varepsilon,$$ то $\mid x(t,a) - x_0 \mid < \varepsilon \quad \forall\, t \in T$. Иначе положение равновесия будем называть *неустойчивым.*

Определение 6.2.2	Положение равновесия x_0 называется *асимптотически устойчивым*, если 1°. Оно устойчиво по Ляпунову. 2°. При достаточно малых $\lvert a - x_0 \rvert$ $$\lim_{t\to\infty} x(t,a) = x_0.$$

Для данных определений сделаем следующие замечания.

Во-первых, мы рассматриваем устойчивость по отношению лишь к *малым* отклонениям от положений равновесия.

Во-вторых, использование одних лишь определений 6.2.1 и 6.2.2 для исследования устойчивости эффективно в тех случаях, когда возможно либо построение общего решения, либо выявление таких свойств решений, как ограниченность, возрастание или убывание.

Следует также обратить внимание, что пункты 1° и 2° в определении 6.2.2 независимы: из 1° не следует 2°, а из 2° не следует 1°. Эту особенность определения 6.2.2 иллюстрируют пример 6.1.1 и

Пример 6.2.1

Устойчиво ли нулевое решение уравнения $\dot{x} = -x^2$?

Решение.

Очевидно, что $x(t) = 0$ есть решение данного уравнения. Общее ненулевое решение описывается формулой

$$x(t) = \frac{1}{t + C},$$

где C – произвольная константа.

Заметим, что хотя $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$, устойчивым нулевое решение не является.

Действительно, при $t = -C$ интегральная кривая имеет вертикальную асимптоту и $\forall C < 0$ из условия $|x(0)| < \delta$ условие $|x(t)| < \varepsilon$ при $t \in (0, +\infty)$ следовать не будет.

Решение получено.