Линейные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

В большинстве случаев решения линейного уравнения с переменными коэффициентами не выражаются даже в квадратурах. Поэтому для практики важными оказываются методы, позволяющие делать заключения о свойствах таких решений без построения их явного вида.

В этих методах мы ограничимся рассмотрением только *вещественных* функций вещественного переменного, что позволит более широко использовать неравенства для описания свойств решений.

Например, если для уравнения второго порядка

$$\ddot{y} + a_0(t)y = 0$$

имеем $a_0(t) > 0\,, t \in \Omega\,$, то (согласно известной из курса математического анализа теореме) можно утверждать, что при $y > 0$ график любого частного решения на Ω будет иметь выпуклость вверх, поскольку в этом случае

$$\ddot{y} = -a_0(t)y < 0\,.$$

Менее очевидные, но также практически полезные методы могут быть применены для исследования *нулей решений*, то есть значений независимой переменной t, для которых искомая функция принимает нулевое значение.

Далее будем рассматривать линейные однородные уравнения второго порядка вида

$$a_2(t)\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = 0\,,$$

где функции $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$, $\quad t \in \Omega$ непрерывно дифференцируемы и $a_2(t) \neq 0\,.$

Вначале убедимся, что данное уравнение может быть приведено к виду, не содержащему производной первого порядка, при помощи линейной замены искомой функции по формуле $y(t) = p(t)u(t)$, где $u(t)$ – новая неизвестная функция, а

$$p(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{a_1(s)}{a_2(s)}\,ds\right) .$$

Действительно, если в уравнение подставить $y(t) = p(t)u(t)$, то мы получим

$$\big(a_2 p\,\ddot{u} + 2a_2\dot{p}\,\dot{u} + a_2\ddot{p}\,u\big) + \big(a_1 p\,\dot{u} + a_1\dot{p}\,u\big) + a_0 p\,u = 0$$

или

$$a_2 p\,\ddot{u} + \big(2a_2\dot{p} + a_1 p\big)\dot{u} + \big(a_2\ddot{p} + a_1\dot{p} + a_0 p\big)u = 0\,,$$

то есть получаем уравнение, не содержащее слагаемого с $\dot{u}$, поскольку выбранная по этому правилу функция $p(t)$ удовлетворяет легко проверяемому равенству $2a_2\dot{p} + a_1 p = 0$.

Для упрощенного уравнения справедлива

`Лемма` **Всякое ненулевое решение уравнения может иметь лишь конечное число нулей на любом конечном отрезке.**

`Доказательство.`

Предположим, что *нетривиальное* (то есть $y(t) \not\equiv 0$) непрерывно дифференцируемое решение нашего уравнения имеет на отрезке $[\alpha, \beta]$ бесконечное число нулей, из которых можно образовать числовую последовательность $\{t_m\}$. Эта последовательность ограниченная и по теореме Больцано–Вейерштрасса имеет предельную точку $t^* \in [\alpha, \beta]$. В нашем случае без ограничения общности можно считать, что

$$\lim_{m \to \infty} t_m = t^*.$$

Поскольку $y(t)$ непрерывна, то $\lim\limits_{m \to \infty} y(t_m) = 0 = y(t^*)$.

С другой стороны, в силу $y(t_m) = y(t_{m+1}) = 0$ по теореме Ролля между точками t_m и t_{m+1} найдется точка θ_m такая, что $\dot{y}(\theta_m) = 0$. Тогда для непрерывно дифференцируемой $y(t)$ из (5.4.4) следует, что $\dot{y}(t^*) = 0$.

Из условий $y(t^*) = 0$ и $\dot{y}(t^*) = 0$ по теореме единственности решения задачи Коши получаем, что $y(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$. Однако это противоречит условию леммы.

Теорема (Штурма о сравнении)

Пусть t_1 **и** t_2 **соседние несовпадающие нули некоторого нетривиального решения уравнения**

$$\ddot{y} + a_0(t)y = 0 \tag{5.4.5}$$

и пусть функции $a_0(t)$ **и** $A_0(t)$ **непрерывны и таковы, что** $A_0(t) \geq a_0(t) \quad \forall t \in [t_1, t_2]$.

Тогда любое нетривиальное решение $z(t)$ **уравнения**

$$\ddot{z} + A_0(t)z = 0\,, \tag{5.4.6}$$

имеет нуль хотя бы в одной точке отрезка $[t_1, t_2]$, **при этом, либо этот нуль принадлежит** (t_1, t_2) , **либо**

$$\begin{cases} z(t_1) = z(t_2) = 0\,, \\ A_0(t) \equiv a_0(t) \quad \textbf{на} \quad [t_1, t_2]\,. \end{cases}$$

`Следствие 1.` **На отрезке, где $a_0(t) \leq 0$, любое нетривиальное решение $y(t)$ уравнения (5.4.1) может обратиться в нуль не более, чем в одной точке.**

`Доказательство.`

Применим теорему Штурма к паре уравнений

$$\ddot{y} + a_0(t)y = 0 \qquad \text{и} \qquad \ddot{z} + 0\,z = 0\,.$$

Предположим, что первое из них имеет на Ω по крайней мере два нуля $t_1 < t_2$. Тогда в силу условия $a_0(t) \leq 0 \quad \forall t \in \Omega$ каждое нетривиальное решение второго уравнения в силу теоремы Штурма обязано иметь хотя бы один нуль на $[t_1,\, t_2]$.

Однако легко видеть, что $z(t) \equiv 1$ – нетривиальное решение второго уравнения – такого нуля не имеет. Следовательно, предположение о том, что первое уравнение может иметь более одного нуля, не верное.

`Следствие 2 (О чередовании нулей)` **В промежутке между любыми двумя соседними нулями одного из двух линейно независимых решений уравнения содержится ровно один нуль другого решения.**

`Доказательство.`

Пусть $y_{(1)}(t)$ и $y_{(2)}(t)$ линейно независимые, нетривиальные решения нашего уравнения. Применим теорему Штурма к паре уравнений вида

$$\ddot{y}_{(1)} + a_0(t)y_{(1)} = 0 \qquad \text{и} \qquad \ddot{y}_{(2)} + a_0(t)y_{(2)} = 0\,.$$

(Мы формально положили $a_0(t) \equiv A_0(t)$) .

Если t_1 и t_2 соседние несовпадающие нули первого уравнения, то между ними имеется хотя бы один нуль второго уравнения t^*. Общих нулей у $y_{(1)}(t)$ и $y_{(2)}(t)$ быть не может. Действительно, если, например, $y_{(1)}(t^*) = y_{(2)}(t^*) = 0$, то вронскиан $W(t^*) = 0$ и решения $y_{(1)}(t)$ и $y_{(2)}(t)$ линейно зависимые. Поэтому $t^* \in (t_1,\, t_2)$.

Остается доказать, что t^* единственное. Предположим, что существует также t^{**} такое, что

$$y_{(2)}(t^{**}) = 0, \quad t_1 < t^* < t^{**} < t_2\ .$$

Тогда по теореме Штурма у $y_{(1)}(t)$ должен иметься нуль на $(t^*,\, t^{**})$, что противоречит предположению о том, что t_1 и t_2 соседние нули решения $y_{(1)}(t)$. Значит $t^* = t^{**}$.

Отметим, что для линейных уравнений порядка большего, чем два ($n > 2$), следствие 2, вообще говоря, не верно. Например, для линейно независимых решений $y_{(1)}(t) = \sin t$ и $y_{(2)}(t) \equiv 1$ уравнения $\dddot{y} + \dot{y} = 0$ чередования нулей нет.

`Следствие 3` **Если некоторое нетривиальное решение уравнения (5.4.1) имеет бесконечное число нулей, то и каждое его нетривиальное решение имеет бесконечное число нулей.**

Проиллюстрируем практическое применение теоремы Штурма следующим примером.

Задача 5.4.1 Оценить сверху и снизу расстояние между соседними нулями нетривиального решения уравнения

$$\ddot{y} + 2ty = 0 \quad \text{для} \quad t \in [20,\, 45]\,. \tag{5.4.8}$$

`Решение.` По условию задачи $a_0(t) = 2t$. Пусть $\omega^2 \le a_0(t) \le \Omega^2$ на указанном в условии задачи промежутке $t \in [20, 45]$. Сравним решения данного уравнения с решениями уравнений с постоянными коэффициентами

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0,\ \omega > 0 \ \text{и} \tag{5.4.9}$$

$$\ddot{z} + \Omega^2 z = 0,\ \Omega > 0\,, \tag{5.4.10}$$

решения которых представимы соответственно в виде

$$z(t) = C_1 \sin(\omega t + C_2) \quad \text{и}$$

$$z(t) = D_1 \sin(\Omega t + D_2)\ .$$

Рассмотрим вначале пару уравнений (5.4.8) и (5.4.9). Пусть t_{1z} и t_{2z} последовательные нули уравнения (5.4.9), то есть $t_{2z} = t_{1z} + \dfrac{\pi}{\omega}$, а t_{1y} и t_{2y} последовательная пара нулей уравнения (5.4.8) на промежутке $[t_{1z}, t_{2z}]$. По теореме Штурма имеем

$$t_{1z} \le t_{1y} < t_{2y} \le t_{2z}\,.$$

Откуда получаем оценки

$$t_{2y} \le t_{2z} = t_{1z} + \frac{\pi}{\omega} \le t_{1y} + \frac{\pi}{\omega}.$$

И окончательно

$$t_{2y} - t_{1y} \le \frac{\pi}{\omega}. \tag{5.4.11}$$

Рассмотрев пару уравнений (5.4.8) и (5.4.10), получаем путем аналогичных рассуждений оценку

$$t_{2y} - t_{1y} \geq \frac{\pi}{\Omega}. \qquad (5.4.12)$$

Вернемся теперь к условию исходной задачи и рассмотрим два крайних значения параметра: ω и Ω, для которых

$$0 < \ \omega^2 = 40 \ \leq \ 2t \ \leq \ 90 = \Omega^2, \quad \forall t \in [20,\, 45] \ .$$

Для указанного промежутка t расстояние d между соседними нулями исходного уравнения (5.4.7) в силу оценок (5.4.11) и (5.4.12) будет удовлетворять системе неравенств

$$\frac{\pi}{\Omega} \leq d \leq \frac{\pi}{\omega} \, .$$

Откуда получаем искомую оценку

$$0.3 < \frac{\pi}{3\sqrt{10}} \ \leq \ d \ \leq \ \frac{\pi}{2\sqrt{10}} < 0.5 \ .$$

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ И УРАВНЕНИЕ БЕССЕЛЯ

Пусть однородное уравнение

$$a_2(\tau)y'' + a_1(\tau)y' + a_0(\tau)y = 0 \quad a_2(\tau) \neq 0$$

приведено к виду $u'' + \left(1 + f(\tau)\right)u = 0,$ где $\left| f(\tau) \right| \le \dfrac{C}{\tau^{1+\alpha}}$ $C > 0, \alpha > 0$.

Тогда последнее уравнение будет иметь решения, для которых при $\tau \to +\infty$

$$u(\tau) = C_1 \cos\tau + C_2 \sin\tau + O\left(\frac{1}{\tau^{\alpha}}\right) .$$

Уравнение вида $x^2 y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$ (где p - вещественный параметр) называется *уравнением Бесселя*.

Пример 01. Построить асимптотическую оценку решений для уравнения Бесселя

$$x^2 y''+xy'+(x^2-p^2)y=0 \ ,$$

для значений параметра $|\,p\,|\le \frac{1}{2}$.

Решение: Заметим, что замена неизвестной функции на функцию вида $y(x)=\frac{u(x)}{\sqrt{x}}$

приводит к уравнению $u''+\left(1+\dfrac{\frac{1}{4}-p^2}{x^2}\right)u=0$.

При $|\,p\,|<\frac{1}{2}$ можно использовать асимптотическую оценку с $\alpha=1$,

которая имеет вид $u(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+O\left(\frac{1}{x}\right)$. Откуда окончательно

$$y(x)=\frac{C_1\cos x+C_2\sin x}{\sqrt{x}}+O\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right).$$

Заметим, что при $|\,p\,|=\frac{1}{2}$ уравнение Бесселя решается точно

$$y(x)=\frac{C_1\cos x+C_2\sin x}{\sqrt{x}} \ .$$

Пример 02. Доказать, что уравнение Бесселя $x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$ не может иметь в положительной полуокрестности нуля $x\in(0,+\infty)$ двух, ограниченных вместе со своими производными, частных линейно независимых решений.

Решение: Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ суть два частных линейно независимых решения уравнения Бесселя. Тогда их вронскиан будет

$$W(x)=\det\begin{Vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x)\end{Vmatrix}\neq 0 \quad \forall x\in(0,+\infty)\ .$$

Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ ограничены вместе со своими производными, то будет ограничен и их вронскиан

$$|W(x)|=\left|\det\begin{Vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x)\end{Vmatrix}\right|=|\,y_1(x)y'_2(x)-y_2(x)y'_1(x)\,|\le$$

$$\le|\,y_1(x)\,|\cdot|\,y'_2(x)\,|+|\,y_2(x)\,|\cdot|\,y'_1(x)\,|\,.$$

Однако, этого быть не может, поскольку по формуле Лиувилля-Остроградского

$$W(x)=W(1)\cdot\exp\left(-\int_1^x\frac{du}{u}\right)=W(1)\cdot e^{-\ln x}=\frac{W(1)}{x}\,.$$

То есть, $|W(x)|\to+\infty$ при $x\to+0$.

Пример 03. Построить асимптотическую оценку решения для уравнения

$$y''+e^{2x}y=0\ .$$

Решение: 1. Сделаем замену неизвестной функции $t=\varphi(x)\Rightarrow x=\psi(t)$. Пусть $z(t)=y(\psi(t))$.

Дифференцирование по t будем обозначать верхней точкой. Тогда, по правилам дифференцирования имеем

$$y'=\dot{z}\varphi' \qquad \Rightarrow \qquad y''=\ddot{z}(\varphi')^2+\dot{z}\varphi''$$

Для данного в условии уравнения удобно принять $\varphi(x)=e^x$, поскольку в этом случае $\varphi'=\varphi''=e^x$, а исходное уравнение принимает вид

$$e^{2x}\ddot{z}+e^x\dot{z}+e^{2x}z=0 \quad \text{или} \quad \ddot{z}+\frac{1}{t}\dot{z}+z=0\ .$$

2. Избавимся от слагаемого с $\dot{z}$ при помощи замены $z(t) = a(t)u(t)$, подобрав подходящего вида функцию $a(t)$. Имеем

$$\dot{z} = \dot{a}u + a\dot{u} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{z} = \ddot{a}u + 2\dot{a}\dot{u} + a\ddot{u} \;.$$

Откуда $a\ddot{u} + \left(2\dot{a} + \dfrac{a}{t}\right)\dot{u} + \left(\ddot{a} + \dfrac{\dot{a}}{t} + a\right)u = 0$. И искомая функция $a(t)$ определяется уравнением $2\dot{a} + \dfrac{a}{t} = 0$.

Используя интегрирующий множитель ta, приходим к равенству

$$t\,2a\,\dot{a} + a^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{(ta^2)} = 0,$$

в силу которого можно взять $a(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. То есть, будем делать замену неизвестной функции $z(t) = \dfrac{u(t)}{\sqrt{t}}$.

3. Подставляя это выражение в уравнение для $z(t)$, получим (проверьте это самостоятельно) $\ddot{u}+\left(1+\frac{1}{4t^2}\right)u=0$.

Теперь можно записать асимптотическое решение (с $\alpha=1$)

$$u(t)=C_1\cos t+C_2\sin t+O\left(\frac{1}{t}\right)$$

Откуда $z(t)=\frac{C_1\cos t+C_2\sin t}{\sqrt{t}}+O\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right)$ и, окончательно,

$$y(x)=C_1e^{-\frac{x}{2}}\cos e^x+C_2e^{-\frac{x}{2}}\sin e^x+O\left(e^{-\frac{3x}{2}}\right)$$

Получение приближенных описаний решений дифференциальных уравнений на практике осложняется тем обстоятельством, что малые изменения в записи уравнения или в дополнительных условиях (начальных, краевых и т.д.), вообще говоря, могут приводить к не малым изменениям в решениях. В этих случаях принято говорить о нерегулярности (некорректности) постановки задачи, а сами малые изменения условий называть *сингулярными возмущениями.*

Рассмотрим конкретный пример задачи содержащей в своем условии сингулярное возмущение.

`Задача 5` Найти $y(t,\varepsilon)$ – решение краевой задачи, где ε – малый положительный параметр и $t \in [\,0,1]$,

$$\varepsilon\ddot{y} + \dot{y} + y = F(t)\,, \tag{5.5.11}$$

при условиях:

$$y(0) = 0 \quad \text{и} \quad y(1) = 1 \tag{5.5.12}$$

для

а) $F(t) = 1$,
б) $F(t) = 1 + t$.

`Решение.`

1°. Рассмотрим вначале случай $F(t) = 1$. В качестве частного решение уравнения (5.5.11) очевидно можно взять функцию $y(t) = 1$. Тогда его общее решение будет

$$y(t, \varepsilon) = 1 + C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \ ,$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы, а λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения $\varepsilon\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, равные соответственно

$$\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon} \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}}{2\varepsilon} \, .$$

Для определения значений констант C_1 и C_2 используем краевые условия (5.5.12), из которых следует, что

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} C_1 & + & C_2 & = & -1, \\ e^{\lambda_1}C_1 & + & e^{\lambda_2}C_2 & = & 0. \end{array}\right.$$

Откуда получаем

$$C_1 = -\frac{e^{\lambda_2}}{e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{e^{\lambda_1}}{e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}}$$

и находим решение краевой задачи

$$y(t,\varepsilon) = 1 - \frac{e^{\lambda_2}}{e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}} e^{\lambda_1 t} + \frac{e^{\lambda_1}}{e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}} e^{\lambda_2 t} \,,$$

где $t \in [\,0, 1]$.

2°. Исследуем теперь асимптотическое поведение найденного решения краевой задачи при $\varepsilon \to 0$. Для λ_1 и λ_2 имеем соответственно оценки:

$$\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon} = -\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{1-4\varepsilon} =$$

$$= -\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon}\Big(1 - 2\varepsilon + o(\varepsilon)\Big) = -1 + O(\varepsilon)$$

и

$$\lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon} = -\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{1-4\varepsilon} =$$

$$= -\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon}\Big(1 - 2\varepsilon + o(\varepsilon)\Big) = -\frac{1}{\varepsilon} + 1 + O(\varepsilon) \ .$$

Проверьте самостоятельно, что также справедливы оценки: $C_1 = O(\varepsilon)$, $C_2 = -1 + O(\varepsilon)$ и

$$e^{\lambda_2 t} = \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon) \ , \quad t \in [\,0, 1\,], \ \ \varepsilon > 0 \ .$$

Теперь можно выписать формулу асимптотической оценки при $\varepsilon > 0$ и для решения краевой задачи

$$y(t, \varepsilon) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon) \ ,$$

из которой следует, что

$$\lim_{\varepsilon \to +0} y(t, \varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t = 0, \\ 1, & \text{если} \quad t \in (\,0, 1\,]. \end{cases}$$

Графики функций $y(t, \varepsilon)$ для

$$\varepsilon = 0.1,\ 0.05,\ 0.025,\ 0.01,\ 0.001$$

показаны на рис. 5.1.

Исследование при $\varepsilon < 0$ сводится к уже рассмотренному случаю при помощи замены переменной t на $-t$.

3°. Отметим важный факт, следующий из предыдущего рассмотрения: предельный переход $\varepsilon \to +0$, выполненный в *решении* задачи (5.5.11) – (5.5.12) приводит к результату, отличающемуся от результата предельного перехода в *условии* этой задачи.

Действительно, если в уравнении (5.5.11) положить $\varepsilon = 0$ и оставить лишь одно краевое условие $y(1) = 1$, то мы получим решение для уравнения первого порядка $\dot{y} + y = 1$ вида $y(t) \equiv 1 \ \ \forall t \in [\,0, 1\,]$.

Данное решение будет близко к решению задачи (5.5.11) – (5.5.12) везде на отрезке $[\,0, 1\,]$, за исключением ε-окрестности точки $t = 0$, где решения будут значительно отличаться.

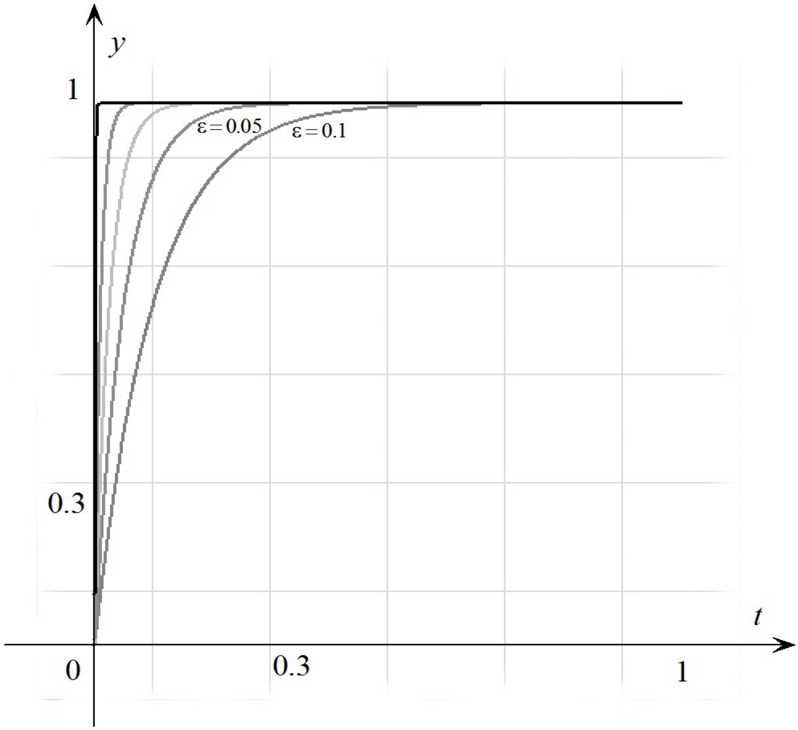

Рис. 1. Графики решений краевой задачи для различных $\varepsilon > 0$

Эту окрестность принято называть *пограничным слоем*, а отмеченное различие решений – *поведением типа пограничного слоя.* Математически природа эффекта пограничного слоя вполне очевидна: возмущенное уравнение (то есть уравнение (5.5.11) с $\varepsilon \neq 0$) есть уравнение второго порядка, в то время как невозмущенное является уравнением первого порядка, решения которого могут не удовлетворять двум различным краевым условиям.

В заключение обратим внимание на то, что эффект пограничного слоя возникает не при любом возмущении. Например, в случае б) при $F(t) = 1 + t$ решение невозмущенной задачи имеет вид $y(t) = t$ и является при этом также решением краевой возмущенной задачи при любом ε.