

Элементы геометрии и физики. Бурский В.П.

Аннотация

Излагаются основные сведения из современной римановой геометрии с приложением к уравнениям математической физики безмассовых классических полей. Настоящий курс в основном соответствует стандартным курсам современной дифференциальной геометрии и изложению соответствующих математико-физических конструкций, включающих основные положения релятивистской динамики и теорий классических безмассовых полей – электромагнитного и гравитационного, построенные на аппарате предыдущих лекций. Лектор стремится придать изложению мировоззренческий характер, т.е. стремится больше отвечать на вопросы типа: что такое... (категория? вектор? многообразие? дифференциал? гравитационное поле?) и какие между понятиями связи, нежели к более или менее полному построению теорий. Курс задуман как введение в геометрические структуры, являющиеся основой при современном описании физических полей, однако без квантования и без привлечения групповых и алгебро-топологических построений типа групп Ли, алгебр Ли и теорий когомологий, которые лучше изучать после усвоения основ. Тем самым автор хотел бы внести посильный вклад во введение в практические лекционные курсы уравнений математической физики XXI века, каковые, по его мнению, являются необходимым элементом современного образования.

Содержание курса.

1. Введение. Множества и классы. Категории и функторы, примеры, морфизмы, универсальные объекты.
2. Сопряженное пространство. Прямая сумма и тензорное произведение линейных пространств как бифункторы. Категория билинейных отображений.
3. Формулы преобразования координат при замене базиса. Операции над тензорами.
4. Топологические многообразия. Примеры и контрпримеры.
5. Карты и атласы. Гладкая структура как максимальный атлас и как пучок.
6. Вектор как класс соприкасающихся кривых, как дифференцирование на пучке и как набор координат в карте. Касательное пространство.
7. Касательное расслоение. Дифференциал гладкого отображения и его функториальные свойства.
8. Векторные поля и однопараметрические группы диффеоморфизмов.
9. Кокасательное расслоение. Ковекторы и ковекторные поля. Индуцированное отображение и его функториальные свойства.
10. Векторные расслоения. Прямая сумма и тензорное произведение векторных расслоений. Тензорные пучки. Дифференциал гладкого отображения и индуцированное отображение как функторы.
11. Ковариантные тензоры на многообразии. Симметрическое произведение. Формула Тейлора. Внешнее произведение ковекторов. Дифференциальные формы. Индуцированное отображение форм. Внешний дифференциал и его свойства.
12. Многообразия с краем. Интегрирование дифференциальных форм.

Форма Лере - Гельфанда. Формула Стокса и ее частные случаи.

13. Псевдориманова метрика. Оператор Ходжа. Форма объема. Теория Ходжа-Кодаиры.

14. Аффинная связность и параллельный перенос. Теорема Леви-Чивита.

15. Тензоры кривизны и кручения на псевдоримановом многообразии и их свойства.

16. Одномерный лагранжев формализм. Законы сохранения импульса и энергии. Небесная механика как лагранжева теория. Геодезическая на псевдоримановом многообразии как кратчайшая.

17. Псевдоевклидовы пространства. Преобразования Лоренца. Релятивистская динамика как лагранжева теория. Формула Эйнштейна.

18. Многомерный лагранжев формализм. 4-импульс. Закон сохранения энергии-импульса и тензора момента импульса.

19. Уравнения электромагнитного поля в терминах дифференциальных форм. Потенциалы электромагнитного поля. Инварианты.

20. Примеры решений. Электростатика, магнитостатика, электромагнитные волны.

21. Действие Гильберта-Эйнштейна. Уравнения гравитационного поля. Движение точечной массы в гравитационном поле.

22. Примеры решений. Поле Шварцшильда черной дыры. Переход к теории гравитации Ньютона. Гравитационные волны.

23. Космологические модели. Решения Фридмана. Большой взрыв. Космологическая постоянная. Сценарии эволюции.

24. Исходные положения общей теории относительности Эйнштейна. Другие теории гравитации. Релятивистская теория гравитации.

Список литературы.

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. - М.: Наука, 1986. 760 с. (Переиздание в 2013 г.)
2. Кириллов А.А. Элементы теории представлений. - М.: Наука, 1976. 344с.
3. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия. -- М.: Наука, 1988. - 496 с. (Переиздание в 2017 г.)
4. Мищенко А. С, Соловьев Ю. П., Фоменко А. Т. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии.- М.: Издательство физико-математической литературы, 2004.- 412 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. - М.: Наука, 1988. 512 с.
6. Богородский А.Ф. Всемирное тяготение. - Киев: Наук. думка, 1971. 352 с.
7. Зельдович Я.В., Новиков И.Д. Стрoение и эволюция Вселенной. - М.: Наука, 1975. 736 с.
8. Хелгассон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. - М.: Мир, 1964. 533 с. (Переиздание в 2005 г.)
9. Иваненко Д.Д., Сарданашвили Г.А. Гравитация. М.:Изд.ЛКИ, 2012. 200 с.
10. Sternberg Sh. Curvature in mathematics and physics. Dover Publ.: 2012. 492 pp.
11. Мизнер Ч., К.Торн, Дж.Уилер - ГРАВИТАЦИЯ, Т.1. М., Мир, 1977, 480, Т.2, Т.3. (Переиздание на английском в 2016 г.)