Программа спецкурса

“**Дополнительные главы алгебры**”

1. Группы, подгруппы. Гомоморфизмы групп. Ядро и образ гомоморфизма.

2. Циклические группы, свойства их подгрупп. Порядок элемента группы.

3. Смежные классы, теорема Лагранжа.

4. Нормальные подгруппы, факторгруппа. Теорема о гомоморфизме групп.

5. Группы преобразований. Действия групп, орбиты и стабилизаторы. Примеры действий. Формула орбит. Формула Бернсайда.

6. Коммутант, его свойства.

7. Классы сопряженных элементов и централизаторы. Описание классов сопряженных элементов группы преобразований.

8. Кольца, определение и примеры. Алгебры над полем. Групповая алгебра конечной группы.

9. Евклидовы кольца, примеры. Наибольший общий делитель. Разложение на простые в евклидовом кольце.

10. Идеалы и факторкольца. Кольца главных идеалов. Теорема о гомоморфизме колец.

11. Понятие модуля над кольцом, подмодуля, примеры (модули над кольцом многочленов, над групповой алгеброй, ...). Теорема о гомоморфизме модулей. Циклические модули.

12. Подмодули свободного модуля конечного ранга над евклидовым кольцом.

13. Разложение конечнопорожденного модуля над евклидовым кольцом в прямую сумму циклических модулей.

14. Разложение циклического модуля над евклидовым кольцом в прямую сумму примарных циклических модулей.

15. Классификация конечнопорожденных модулей над евклидовым кольцом с точностью до изоморфизма. Применение полученных результатов к конечнопорожденным абелевым группам и жордановой нормальной форме.

16. Тензорное произведение векторных пространств, универсальное свойство. Существование и единственность (в конечномерном случае). Канонические изоморфизмы.

17. Тензорная алгебра векторного пространства, ее универсальное свойство.

18. Симметрическая алгебра векторного пространства, универсальное свойство и изоморфизм с алгеброй многочленов на сопряженном пространстве.

19. Внешняя алгебра векторного пространства, ее универсальное свойство.

20. (В случае характеристики 0). Операторы симметрирования и альтернирования. Вложение симметрической и внешней алгебру в тензорную (в качестве подпространства).

21. Линейные представления конечных групп, подпредставления, факторпредставления. Неприводимые представления, лемма Шура. Вполне приводимые представле-

ния. Полная приводимость представлений конечной группы над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Структура групповой алгебры конечной группы над полем $\mathbb{C}$ (без доказательства).

22. Определение категории, примеры. Сумма и произведение в категории, примеры. Универсальные объекты, их единственность. Примеры (тензорное произведение пространств, тензорная алгебра, свободная группа, абелианизация группы, групповая алгебра, ...).

23. Функторы: определение и примеры. Категорное описание линейных представлений группы и действий группы. Тензорная алгебра, свободная группа, групповая алгебра, расширение и ограничение скаляров как функторы. Тензорное произведение векторных пространств как бифунктор. Контравариантные функторы, примеры (функтор сопряжения на линейных пространствах).

24. Естественные преобразования функторов (функторные морфизмы). Примеры. Естественное преобразование из тождественного функтора в функтор двойного сопряжения для линейных пространств над полем. Эквивалентность категорий, примеры.

25. Групповые обекты в категории, примеры. Когрупповые объекты. Коммутативность фундаментальной группы топологической группы.

26. Сопряженные функторы, их определение и свойства. Примеры.

Литература:

Винберг Э.Б. “Курс Алгебры”, М.: МЦНМО, 2013

Кострикин А.И., Манин Ю.И. “Линейная алгебра и геометрия”, М.: Наука, 1986

Шафаревич И.Р. “Основные понятия алгебры”, Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999

Бахтурин Ю.А. “Основные структуры современной алгебры”, М.: Наука, 1990

Ершов А.В. “Категории и функторы”, Саратов, ООО Издательский центр “Наука”, 2012 (ссылка на онлайн-версию: http://window.edu.ru/resource/165/77165)

Ершов А.В. “Функторные морфизмы”, Саратов, ООО Издательский центр “Наука”, 2012 (ссылка на онлайн-версию: http://window.edu.ru/resource/166/77166)