

Программа курса Мера и интеграл Лебега

для студентов МФТИ, четвёртый семестр

1. Симметричная разность множеств и её свойства. Структура открытых множеств на прямой.
2. Кольца, алгебры, σ -кольца и σ -алгебры множеств; существование σ -алгебры, порожденной классом множеств. Борелевская σ -алгебра.
3. Внешняя мера. Определение измеримого множества. Мера Хаусдорфа.
4. Аддитивные и счётно-аддитивные меры. Мера Дирака.
5. Построение меры Лебега в \mathbb{R}^n . Мера Лебега–Стилтьеса на прямой.
6. Внешняя и внутренняя регулярность борелевских мер.
7. Аксиома выбора и существование неизмеримых множеств.
8. Измеримые функции и их свойства.
9. Сходимость почти всюду. Сходимость по мере. Связь различных видов сходимости измеримых функций.
10. Теоремы Лузина и Егорова.
11. Определение и основные свойства интеграла Лебега.
12. Неравенство Чебышёва. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.
13. Предельный переход в интеграле Лебега. Теоремы Лебега, Леви и Фату.
14. Неравенства Гёльдера и Минковского.
15. Связь меры Лебега с мерой Жордана. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана.
16. Полная вариация знакопеременной меры. Разложение Хана.
17. Абсолютно непрерывные функции и формула Ньютона–Лейбница.
18. Произведение пространств с мерами. Теоремы Фубини и Тонелли.
19. Нормированные пространства интегрируемых по Лебегу в степени p функций, их полнота.
20. Теорема Радона–Никодима.
21. Точки Лебега абсолютно интегрируемой на \mathbb{R}^n функции.

Список литературы

1. У. Рудин, Основы математического анализа, издание второе, стереотипное, Мир, 1976.
2. W. Rudin, Principles of mathematical analysis, third edition, McGraw-Hill, 1976.
3. W. Rudin, Real and complex analysis, third edition, McGraw-Hill, 1987.
4. П.Л. Ульянов, А.Н. Бахвалов, М.И. Дьяченко, К.С. Казарян, П. Сифуэнтес, Действительный анализ в задачах, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
5. В.И. Богачев, О.Г. Смолянов, Действительный и функциональный анализ, 2-ое издание, М.: УРСС, 2011.
6. В.И. Богачев, Основы теории меры, 2-е изд. (в двух томах), НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Москва–Ижевск, 2006.
7. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, 7-ое издание, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.