

”Пространства, порожденные обобщенной мажорантой частных сумм”

Владимир Витальевич Пернай

31.03.2015

Используя обобщенную мажоранту частных сумм можно задать на \mathbb{R}^n норму вида

$$\left\| \sum_{\alpha \in I} a_{\alpha} \varphi_{\alpha} \right\|_X = \sup_{\omega \in \Omega} \left\| \sum_{\alpha \in \omega} a_{\alpha} \varphi_{\alpha} \right\|_{l_{\infty}^N},$$

где $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}^N$, $n \leq N$, – произвольная линейно-независимая система.

Свойства пространства $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_X)$ зависят от ”сложности” семейства Ω , по которому берется \sup . В частности, в работе Б.С. Кашина было показано, что при определенных ограничениях на ”сложность” Ω , для нормы $\|\cdot\|_X$ остается верным дискретный аналог классической теоремы Меньшова ”об исправлении” для дискретных ортонормированных систем.

Будет рассказано о верхних оценках Φ -поперечников и постоянных типа 2 пространств X , если для семейств Ω подмножеств заданного набора индексов I будет выполняться следующее ограничение на его ”сложность”: при некоторых $\alpha \geq 1$ и $\beta \geq 0$ найдутся семейства Δ_s , $\emptyset \in \Delta_s$, с числом элементов

$$\#\Delta_s \leq C_0 N^{\beta} \exp s^{\alpha}, s = 0, \dots, s_0,$$

такие, что каждое множество $\omega \in \Omega$ допускает представление в виде

$$\omega = \bigcup_{s=0}^{s_0} E_s, E_s \in \Delta_s, \#E_s \leq \frac{\#I}{2^s}, E_s \cap E_{s'} = \emptyset \text{ при } s \neq s'.$$

На докладе будет рассказано о семействах множеств, представляющих интерес для приложений, удовлетворяющих указанным ограничениям на ”сложность”. В частности, семейство выпуклых множеств в кубе можно приблизить семейством Ω , удовлетворяющим указанным ограничениям. Также будет доказан вспомогательный результат о том, что произвольное выпуклое ограниченное множество $K \subset \mathbb{R}^d$ содержит симплекс S , возможно, размерности меньше d , с вершинами в точках с целочисленными координатами такой, что

$$\mu_{\mathbb{Z}}(K) \leq d^{3d} \cdot \mu_{\mathbb{Z}}(S),$$

где $\mu_{\mathbb{Z}}(A)$ – количество целых точек в множестве A .