”Пространства, порожденные обобщенной мажорантой частных сумм”

Владимир Витальевич Пернай

31.03.2015

Используя обобщенную мажоранту частных сумм можно задать на $\mathbb{R}^n$ норму вида

$$\left\|\sum_{\alpha\in I} a_\alpha\varphi_\alpha\right\|_X = \sup_{\omega\in\Omega}\left\|\sum_{\alpha\in\omega} a_\alpha\varphi_\alpha\right\|_{l_\infty^N},$$

где $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}^N, n \leqslant N,$ – произвольная линейно-независимая система.

Свойства пространства $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_X)$ зависят от ”сложности” семейства Ω, по которому берется sup. В частности, в работе Б.С. Кашина было показано, что при определенных ограничениях на ”сложность” Ω, для нормы $\|\cdot\|_X$ остается верным дискретный аналог классической теоремы Меньшова ”об исправлении” для дискретных ортнормированных систем.

Будет рассказано о верхних оценках Ф-поперечников и постоянных типа 2 пространств X, если для семейств Ω подмножеств заданного набора индексов I будет выполняться следующее ограничение на его ”сложность”: при некоторых $\alpha \geqslant 1$ и $\beta \geqslant 0$ найдутся семейства $\Delta_s, \varnothing \in \Delta_s$, с числом элементов

$$\#\Delta_s \leqslant C_0 N^\beta \exp s^\alpha, s = 0, \ldots, s_0,$$

такие, что каждое множество $\omega \in \Omega$ допускает представление в виде

$$\omega = \bigcup_{s=0}^{s_0} E_s,\ E_s \in \Delta_s,\ \#E_s \leqslant \frac{\#I}{2^s}, E_s \cap E_{s'} = \varnothing \text{ при } s \neq s'.$$

На докладе будет рассказано о семействах множеств, представляющих интерес для приложений, удовлетворяющих указанным ограничениям на ”сложность”. В частности, семейство выпуклых множеств в кубе можно приблизить семейством Ω, удовлетворяющим указанным ограничениям. Также будет доказан вспомогательный результат о том, что произвольное выпуклое ограниченное множество $K \subset \mathbb{R}^d$ содержит симплекс S, возможно, размерности меньше d, с вершинами в точках с целочисленными координатами такой, что

$$\mu_{\mathbb{Z}}(K) \leqslant d^{3d} \cdot \mu_{\mathbb{Z}}(S),$$

где $\mu_{\mathbb{Z}}(A)$ – количество целых точек в множестве A.