

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 июня 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: Уравнения математической физики
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: ФАКТ
кафедра: высшей математики
курс: 3
семестр: 5

Трудоёмкость:
лекции — 30 часов
практические (семинарские)
занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Диф. зачёт — 5 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 30 часов

Программу и задание составили:

к. ф.-м. н., доцент Л. П. Купцов
к. ф.-м. н., доцент А. И. Беспорточный

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 20 мая 2021 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

1. Основные типы уравнений

Линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами. Приведение к каноническому виду. Классификация уравнений. Уравнения Лапласа, Пуассона, волновое уравнение, уравнение теплопроводности и другие.

Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка, линейные относительно старших производных. Классификация уравнений в точке. Характеристические поверхности.

Замена независимых переменных и приведение к каноническому виду уравнения с двумя независимыми переменными. Классификация в точке и в области. Характеристики.

Постановка задач математической физики. Типичные задачи. Краевые и начальные условия. Задачи: Коши; краевые; смешанные.

2. Уравнения гиперболического типа

Задача Коши для уравнения колебаний струны ($n = 1$). Формула Даламбера. Область зависимости. Смешанные задачи для полубесконечной струны. Условия согласования начальных и граничных данных.

Задача Коши для волнового уравнения ($n = 3$). Формула Кирхгофа.

Задача Коши для уравнения колебаний мембраны ($n = 2$). Формула Пуассона (метод спуска).

Единственность решения задачи Коши.

Задача Коши на плоскости для линейного дифференциального уравнения второго порядка гиперболического типа.

Задача с данными на характеристиках (задача Гурса).

3. Уравнения параболического типа

Уравнение теплопроводности. Фундаментальное решение и его свойства.

Задача Коши для уравнения теплопроводности. Интеграл Пуассона.

Принцип максимума. Теорема единственности.

Решение смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности на полупрямой.

4. Уравнения эллиптического типа

Уравнения Лапласа и Пуассона. Гармонические функции и их свойства.

Теорема о среднем. Принцип максимума. Преобразование Кельвина.

Лапласиан в полярных, цилиндрических и сферических координатах.

Фундаментальные решения ($n = 3$, $n = 2$) и дельта-функция.

Основные краевые задачи (внутренние, внешние): задача Дирихле, задача Неймана. Теоремы единственности.

Формулы Грина. Функция Грина задачи Дирихле. Представление решения задачи Дирихле (в круге и в шаре, в полуплоскости и в полупространстве) через краевые значения.

Конформные отображения и их использование для решения задачи Дирихле и для построения соответствующей функции Грина.
Метод разделения переменных и решение краевых задач в \mathbb{R}^2 .

Литература

Основная

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — 5-е изд. — Москва : Наука, 1988.
2. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. — Москва : Физматлит, 1971.
3. *Михайлов В. П.* Лекции по уравнениям математической физики. — Москва : Физматлит, 2001.
4. *Михайлов В. П., Михайлова Т. В., Шабунин М. И.* Сборник типовых задач по курсу уравнения математической физики. — Москва : МФТИ, 2007.
5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — Москва : Изд-во МГУ, 2004.
6. *Уровев В. М.* Уравнения математической физики. — Москва : ИФ Яуза, 1998.

Дополнительная

7. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. — Москва : Высшая школа, 1976.
8. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — Москва : Мир, 1964.
9. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. — Москва : Наука, 1966.
10. *Трикоми Ф.* Лекции об уравнениях в частных производных. — Москва : ИИЛ, 1957.
11. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. — Москва : ИИЛ, 1960.

ЗАДАНИЯ

Все номера задач указаны по книге *Владимиров В. С., Вашарин А. А., Каримова Х. Х., Михайлов В. П., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И.* Сборник задач по уравнениям математической физики. — Москва : Физматлит, 2004, 4-е изд., стереотип.

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 20–26 октября)

2.1(9); 2.2(1,4); 2.11(2,5); 14.26(1,2).

1. Решите задачи Коши:

а) $u_t = xu_x + x^2u$, $u(x, 0) = \sin x$;

б) $u_t = (8x - 6y)u_x + (9x - 7y)u_y$, $u(x, y, 0) = \alpha(x, y)$.

2. Найдите общее решение уравнения:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - 5 \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + 4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$$

12.13(1).

3. Решите задачу Коши и укажите наибольшую область, в которой решение определено и однозначно:

$$2x^2 u_{xx} - 3xy u_{xy} + y^2 u_{yy} + 2xu_x + yu_y = 0, \\ u|_{y=1} = x^3 - x, \quad u_y|_{y=1} = 3x^3 - 2x, \quad 1 < x < 2.$$

14.33; 14.37; 14.41.

4. Решите задачу и укажите наибольшую область, в которой решение определено и однозначно:

$$u_{yy} - 4u_{xx} = 0, \quad u|_{y=0} = x^2, \quad u_y|_{y=0} = 0 \quad \text{при } -2 < x \leq 0, \\ u|_{y=x} = 5x^2 + 3x^3 \quad \text{при } 0 \leq x < 1.$$

12.27; 12.28; 12.30; 12.36(1); 12.37(5); 12.38(3).

5. Решите задачу Коши для волнового уравнения:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + g(t)f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \text{если } f(x), u_0(x), u_1(x) \text{ являются собственными функциями оператора Лапласа: } \Delta f = \lambda f, \quad \Delta u_0 = \mu_0 u_0, \quad \Delta u_1 = \mu_1 u_1, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \lambda, \mu_0, \mu_1 - \text{ постоянные.}$$

21.1; 21.2; 21.4; 21.21.

6. Решите задачу Коши для волнового уравнения:

$$u_{tt} = 2\Delta u, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = e^{-(x^2+y^2+z^2)}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Указание. Решение следует искать в виде

$$u(x, y, z, t) = \frac{v(r, t)}{r}, \quad \text{где } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

7. Приведите к каноническому виду гиперболическую систему:

$$\begin{cases} u_t - v_x = 0, \\ v_t - u_x = 0. \end{cases}$$

Найдите общее решение системы.

8. Найдите общее решение системы:

$$\begin{cases} u_t + 4u_x - 6v_x = 0, \\ v_t + 3u_x - 5v_x = 0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

и решите задачу Коши с начальными условиями: $u(x, 0) = \sin x$, $v(x, 0) = \cos x$.

9. Решите задачу Коши:

$$\begin{cases} u_t = -9u_x + 16v_x, \\ v_t = -9u_x + 15v_x, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

$u(x, 0) = \cos x$, $v(x, 0) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

10. Решите задачу Коши:

$$\begin{cases} u_t = 4u_x - 2v_x - 9w_x, \\ v_t = -3u_x + 5v_x + 15w_x, \\ w_t = 2u_x - 2v_x - 7w_x, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

$u(x, 0) = \sin x$, $v(x, 0) = 0$, $w(x, 0) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

11. Решите задачу Коши:

$$\begin{cases} u_t = 8u_x - 18v_x, \\ v_t = 3u_x - 7v_x, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

$u(x, 0) = \theta(x)$, $v(x, 0) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Изобразите на плоскости (x, t) линии разрыва функций $u(x, t)$ и $v(x, t)$. Вычислите значения функций $u(x, t)$ и $v(x, t)$ между этими линиями.

12*. Найдите общее решение системы:

$$\begin{cases} u_t = 3u_x - 4v_x - 2v_y, \\ v_t = 2u_x - 3v_x + u_y - 3v_y, \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0,$$

и решите задачу Коши с начальными условиями: $u(x, y, 0) = \theta(x + y)$, $v(x, y, 0) = \theta(x - y)$.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 08–14 декабря)

13.1; 13.2; 13.4; 13.5(3); 13.6(2); 13.7(2,5); 13.8(1,3,5).
21.30; 21.33.

1. Решите задачу Коши:

$$\begin{cases} u_t + 5u_{xx} - 9v_{xx} = 0, \\ v_t + 6u_{xx} - 10v_{xx} = 0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$
$$u(x, 0) = e^x, \quad v(x, 0) = \cos 2x.$$

2. Решите задачу Коши:

$$u_t = u_{xx} + 2tu_{xy} + t^2u_{yy}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0, u(x, y, 0) = \sin^2(x + y).$$

3. Решите задачу Коши:

$$u_t = u_{xx} + xu_x, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, u(x, 0) = \exp(-x^2/2).$$

4. Постройте фундаментальные решения уравнений:

а) $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0$ с сингулярностью в точке (a, b) ;

б) $3u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{xz} + 2u_{yy} + 2u_{yz} + u_{zz} = 0$ с сингулярностью в точке (a, b, c) .

17.1(2,3); 17.2(2); 17.11(2,3,6).

16.1(2); 16.2(1); 16.3(2).

5. Найдите гармоническую при $r < 2$ функцию $u(x, y)$, совпадающую с функцией x^3y при $r = 2$.

Задания составили:

к. ф.-м. н., доцент Л. П. Купцов
к. ф.-м. н., доцент А. И. Беспорточный